OBJETIVO GENERALES DE LA ASIGNATURA:
Al finalizar el curso el estudiante resolverá problemas con técnicas matemáticas y conocerá modelos virtuales para una mejor toma de decisiones.

INTRODUCCIÓN
El propósito de estos apuntes es apoyar al estudiante en el estudio independiente de la asignatura de I**nvestigación de Operaciones**, ya que como él sabe en este sistema debe preparar la asignatura en su tiempo y lugares disponibles.

Este material forma parte del paquete de estudio autodirigido, es una exposición sistematizada y resumida de cada unidad, contiene ejercicios desarrollados paso a paso y en su caso problemas de aplicación de la misma forma. Su función es permitirle reafirmar o completar a través del estudio de las lecturas básicas recomendadas, la comprensión de algún tema que no haya comprendido en su totalidad, estos apuntes le servirán de apoyo.

Al igual que en los semestres anteriores, se le propone revisar con cuidado la guía de estudios para que tenga un panorama general de la asignatura. Enseguida estudiar los temas de cada unidad de las lecturas recomendadas, Después repasar el contendió en los apuntes y resolver el cuestionario de autoevaluación en la guía de estudio, y finalmente trabajar con el cuaderno de actividades resolviendo los exámenes propuestos y si aún continuas con dudas consultar al asesor que esta dispuesto de forma presencial o en línea.

Tal vez este consejo no sea necesario, pero no olvides tener a mano las herramientas necesarias para el propósito: actividades que vas a realizar, lápiz, hojas, cuaderno, formularios, muy indispensable la calculadora electrónica.

Unidad I. INTRODUCCION

1. Origen y naturaleza de la Investigación de Operaciones
2. Metodología de la Investigación de Operaciones
3. Concepto de Optimización
4. Recordar:
   a. Desigualdades
   b. Gráfica de funciones lineales con dos o más ecuaciones con dos variables
   c. Reducción de matrices. Método de Gauss-Jordán

Objetivos particulares de la unidad.
Al finalizar la unidad tendrás una idea clara de la Investigación de operaciones, historia así como la forma de quienes la utilizan.
Recordarás y podrás aplicar en problemas propios los métodos matemáticos de sistemas de ecuaciones: gráfico y reducción de matrices.

1.1. Definición de Investigación de Operaciones.
Definición de Churchman, Ackoff y Arnoff: la investigación de operaciones es la aplicación, por grupos interdisciplinarios del método científico a problemas relacionadas con el control de las organizaciones

o sistemas (hombre-máquina), a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de la organización.

1.2. HISTORIA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

La primera actividad de la Investigación de Operaciones se dio durante la Segunda Guerra Mundial en Gran Bretaña, donde la administración Militar llamó a un grupo de científicos de distintas áreas del saber para que estudiaran problemas tácticos y estratégicos asociados a la defensa del país.

Motivados por los resultados alentadores obtenidos por los equipos británicos, los administradores militares de Estados Unidos comenzaron a realizar investigaciones similares. Para ello reunieron a un grupo selecto de especialistas, los cuales empezaron atener buenos resultados y en sus estudios incluyeron problemas logísticos complejos, la planeación de mina en el mar y la utilización efectiva del equipo electrónico.

Al término de la guerra y atraídos por los resultados obtenidos por los estrategas militares, los administradores industriales empezaron a aplicar las herramientas de I.O. a la resolución de sus problemas que originaron debido al crecimiento y la complejidad de las industrias.

Aunque se ha acreditado a Gran Bretaña la iniciación de I IO como una nueva disciplina, Los EEUU tomaron pronto el liderazgo en este campo. La primera técnica matemática ampliamente aceptada en el medio de de IO fue el método simplex de programación lineal, desarrollado en 1947 por el matemático norteamericano George B. Dantzig. Desde entonces nuevas técnicas se han desarrollado gracia al esfuerzo y cooperación de las personas interesadas tanto en el área académica como en el área industrial.

Un segundo factor en el progreso de la IO fue el desarrollo de la computadora digital, ya que su capacidad de velocidad del cómputo, de almacenamiento y reoperación de información, permitieron al tomador de decisiones rapidez y precisión.

Gracias a la computadora digital, la IO ha tenido un gran crecimiento hasta nuestros días.

Actualmente la IO se está aplicando en muchas actividades y empresas. Estas actividades han ido más allá de las aplicaciones militares e industriales hoy se incluyen en los servicios de salud, sistemas de transporte de comercialización, el gobierno, etc.

1.3. NATURALEZA DE LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES.

Como su nombre lo dice, la IO significa “hacer investigación sobre las operaciones de la empresa”. La IO se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones (activdades9 dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la IO se ha aplicado de manera extensa en áreas tan diversas como la manufactura, el transporte, las telecomunicaciones, la planeación financiera, el cuidado de la salud, la milicia y los servicios públicos, por nombrar solo algunas. La gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia.

La parte de investigación en el nombre significa que la IO usa un enfoque similar a la manera en que se lleva a cabo la investigación en los campos científicos establecidos. En gran medida, se usa el método científico para investigar el problema en cuestión. (En muchas ocasiones se usa el término ciencias de la administración como sinónimo de IO). En particular, el proceso comienza por la observación y la formulación del problema incluyendo la recolección de los datos pertinentes. El siguiente paso es la construcción de un modelo científico (matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas para el problema real. Después se llevan a cabo los experimentos adecuados para probar esta hipótesis, modificando si es necesario y volviendo a verificar. (este paso se conoce como validación del modelo). En cierto modo la IO incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe mas que esto. En particular, la IO se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá proporcionar conclusiones claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.

Otra de las características de la IO es u amplio punto de vista. Como quedo implícito en la sección anterior, la IO adopta un punto de vista organizacional. De esta manera, intenta resolver los conflictos de intereses entre los componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa. Esto no significa que el estudio de cada problema debe considerar en forma explícita todos los aspectos de la organización sino que los objetivos que se buscan deben ser consistentes con los de toda ella.

Todas estas características llevan de una manera casi natural a otra. Es evidente que no puede esperarse que un solo individuo se aun experto en todos los múltiples aspectos del trabajo de la IO o de los problemas que se estudian; se requiere un grupo de individuos con diversos antecedentes y habilidades. Cuando se va a emprender un estudio general es necesario emplear el empleo de equipo. Este debe incluir individuos con conocimientos firmes en matemáticas, estadística y teoría de probabilidades, al igual que en economía, administración de empresas, ciencias de la computación, ingeniería, ciencias del comportamiento y por supuesto en las técnicas especiales de IO. El equipo debe tener la experiencia y las habilidades necesaria para permitir la consideración adecuada de todas las ramificaciones del problema a través de la organización.

ESTRUCTURA DE LOS MODELOS EMPLEADOS EN LA IO.

El enfoque de la IO es el modelaje. Un modelo es una herramienta que nos sirve para lograr una visión bien estructurada de la realidad. Así, el propósito del modelo es proporcionar un medio para analizar el comportamiento de las componentes de un sistema con el fin de optimizar su desempeño. La ventaja que tiene el sacar un modelo que represente una situación ral, es que nos permite analizar tal situación sin interferir en la operación que se realiza, ya que el modelo es como si fuera “un espejo” de lo que ocurre.

Los modelos se clasifican como:

a) **ICÓNICOS**. Son la representación física, a escala reducida o aumentad de un sistema real.
b) **ANÁLOGOS** esencialmente requieren la sustitución de una propiedad por otra con el fin de permitir la manipulación del modelo. Después de resolver el problema, la solución se reinterpreta de acuerdo al sistema original.
c) **SIMBÓLICOS** o matemáticos; son los modelos más importantes para la IO, emplean un conjunto de símbolos y funciones para representar las variables de decisión y sus relaciones para describir el comportamiento del sistema. El uso de las matemáticas para representar el modelo, el cual es una representación aproximada de la realidad, nos permite aprovechar las computadoras de alta velocidad y técnicas de solución con matemáticas avanzadas.

Un modelo matemático comprende principalmente tres conjuntos básicos de elementos:

1) **Variables y parámetros de decisión**. Son las incógnitas (decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo. Los parámetros son los valores conocidos que relacionan las variables de decisión con las restricciones y función objetivo. Los parámetros del modelo pueden ser determinísticos o probablísticos.
2) **Restricciones**. Para tener en cuenta las limitaciones tecnológicas, económicas y otras del sistema, el modelo debe incluir restricciones (implícitas o explícitas) que restrinjan las variables de decisión a un rango de valores factibles.
3) **Función Objetivo** La función objetivo define la medida de efectividad del sistema como una función matemática de las variables de decisión. La solución óptima es aquella que produce el mejor valor de la función objetivo, sujeta a las restricciones.

1.4. **OPTIMIZACIÓN.**

Una característica adicional, que se mencionó como de pasada, es que la IO intenta encontrar la mejor solución o la solución óptima al problema bajo consideración. La meta es identificar el mejor curso de la acción: maximizar utilidad o minimizar costos o gastos. Aun cuando debe interpretarse con todo cuidado, esta "búsqueda de la optimalidad" es un aspecto muy importante dentro de la IO.

ÁREAS DE APLICACIÓN DE LA IO

Como su nombre los dice es "hacer investigación sobre las operaciones". Esto dice algo del enfoque como del área de aplicación. La IO se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la IO se ha aplicado en los negocios, la industria, la milicia el gobierno, los hospitales, etc. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia. Casi todas las organizaciones más grandes mundo y una buena proporción de las industrias más pequeñas cuentas con grupos bien establecidos de IO. Muchas industrias, incluyendo el área de proyectiles, automotriz, comunicaciones, computación, energía eléctrica, electrónica, alimenticia, metalúrgica, minera, del papel, petróleo y del transporte, han empleado la IO. Las instituciones financieras, gubernamentales y de salud están incluyendo cada día estas técnicas.

Para ser más específicos, se consideran algunos problemas que se han resuelto mediante algunas técnicas de IO. La programación lineal se ha usado con éxito en la solución de problemas referentes a la asignación de personal, la mezcla de materiales, la distribución y el transporte y así como las carteras de inversión. La programación dinámica se ha aplicado con buenos resultados en áreas tales como la planeación de los gastos de comercialización, la estrategia de ventas y la planeación de la producción. La teoría de colas ha tenido aplicaciones en la solución de problemas referentes al congestionamiento del tráfico, al servicio de máquinas sujetas a descomposturas, a la determinación del nivel de la mano de obra, a la programación del tráfico aéreo, al diseño de presa, ala programación de la producción y a la administración de hospitales. Otras técnicas de la IO, como la teoría de inventarios, la teoría de juegos, la simulación han tenido exitosas aplicaciones en una gran variedad de contextos.

RESOLVER LOS PROBLEMAS EN VEZ DE APLICAR TÉCNICAS

Desde el punto de vista de la administración el éxito del empleo de la IO es el de un enfoque de solución de problemas no una colección asociada de métodos cuantitativos. Básicamente la IO es una extensión adicional de los instrumentos administrativos para la toma de decisiones.

Resolver el siguiente problema por el método de Gauss-Jordán.

1. Un agricultor tiene 200 metros^2 de terreno adecuado para los cultivos A, B y C. El costo respectivo por metro es de \$40, \$60 y \$80 y dispones de \$12600 para trabajar la tierra. Cada metro del cultivo A requiere 20 horas de trabajo; cada metro del cultivo B, 25 horas de trabajo y cada metro del cultivo C, 40 horas de trabajo. El agricultor tiene un máximo de 5950 horas de trabajo disponibles. Si desea utilizar toda la tierra cultivable, todo el presupuesto y toda la mano de obra disponible ¿Cuántos metros debe plantar para cada cultivo?

Si hacemos que: A = x; B = y; y C = z

El sistema se representa: $\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 40x + 60y + 80z = 12600 \\ 20x + 25y + 40z = 5950 \end{cases}$ ahora se hace la matriz correspondiente: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 60 & 80 \\ 20 & 25 & 40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200 \\ 12600 \\ 5950 \end{bmatrix}$ Recordemos que la finalidad del método de reducción de matrices es que la diagonal principal queden en “1” (unos) iniciando con el de la esquina superior izquierda y todos los demás en “0” (ceros).

Si acomodamos la variable “x” en la primera columna, “y” en la segunda columna y las “z” en la tercera columna el resultado será: el valor para “x” el fel primer renglón; el valor para "y" el del segundo renglón y para "z" será el valor del tercer renglón $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Para iniciar a resolver el sistema. Se inicia haciendo "cero" el valor de la esquina superior izquierda. Como ya esta el "1" en la esquina izquierda superior se toma como pivote. Después se hacen cero el 40 y el 20 que quedan abajo del "1" , buscando una fórmula para tal efecto y modificando todo el renglón. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 40 & 60 & 80 \\ 20 & 25 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 12600 \\ 5950 \end{bmatrix} \dfrac{R_2 - 40R_1}{R_3 - 20R_1}$ la siguiente matriz queda.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 40 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 4600 \\ 1950 \end{bmatrix}$ Ahora tenemos quehacer "1" el 20 del segundo renglón, dividiendo todo el renglón entre 20, y se modifica todo el renglón

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 20 & 40 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 4600 \\ 1950 \end{bmatrix} \dfrac{1}{20} R_2$ se modifica el segundo renglón $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 230 \\ 1950 \end{bmatrix}$

Ahora se hacen cero los que quedó arriba y abajo del "1"

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 230 \\ 1950 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} R_1 - R_2 \\ \\ R_3 - 5R_2 \end{matrix} \right.$ se modifican los renglones 1 y 3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 230 \\ 800 \end{bmatrix}$

ahora se convierte el 10 de la diagonal del tercer renglón en "1", dividiendo todo el renglón entre "10" $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 230 \\ 800 \end{bmatrix} \Bigg| \dfrac{1}{10} R_3$ y se modifica todo el renglón $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 230 \\ 80 \end{bmatrix}$ ahora se hacen cero lo que quedó arriba del 1:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -30 \\ 230 \\ 80 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} R_1 + R_3 \\ R_2 - 2R_3 \\ \\ \end{matrix} \right.$ nos queda la matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 80 \end{bmatrix}$

$x = 50$

$y = 70$

$z = 80$

El agricultor debe plantar 50 metros cuadrados de A, 70 metros del cultivo B y 80 metros del cultivo C.

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el metro de Gass-Jordán.

$$\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ x-2y+3z=-3 \\ 3x+2y-4z=12 \end{cases}$$

Como hay un uno en segundo renglón se pueden intercambiar los renglones

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

se resuelve siguiendo los pasos del primer problema.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 8 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix} R_2:7 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 8 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ \frac{12}{5} \\ 21 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-8R_2]{R_1+2R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{51}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{12}{7} \\ \frac{51}{7} \end{bmatrix} R_3:(-\tfrac{7}{51}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{12}{7} \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1-\frac{11}{7}R_3 \\ R_2+\frac{5}{7}R_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Res}: \left| \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{matrix} \right.$$

UNIDAD II. **MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL**

Objetivos generales de la asignatura:
En esta unidad el estudiante aprenderá de manera general a resolver problemas que impliquen la programación lineal, que es optimizar recursos o minimizarlos de una empresa con el fin de obtener mayor rendimiento o menor costo. Conocerá y aplicará los diferentes métodos de la Programación lineal: Gráfico o de las esquinas, Simplex en su forma primal para maximizar y dual para minimizar, el de transporte y el de asignación.

La programación lineal (PL) es una herramienta matemática que permite asignar una cantidad fija de recursos a la satisfacción de varias demandas en tal forma que mientras se optimiza un objetivo se satisfacen otras condiciones definidas.

La PL es una técnica determinista, no incluye probabilidades y utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo **lineal** significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. Y, en este caso, la palabra **programación** no se refiere a programación en computadoras; en esencia es un sinónimo de planeación. Por consiguiente la PL trata la planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo) entre todas las opciones de solución. Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, la PL tiene muchas mas aplicaciones. De hecho, cualquier problema cuyo modelo matemático se ajuste al formato general del modelo de PL será un problema de PL.

En todos los problemas de PL, el objetivo es la maximización (utilidades) o minimización (costos) de alguna cantidad.

La metodología de PL requiere que todas las variables sean positivas o cero, es decir, no negativas. Para la mayoría de los problemas esto es real, no se desea una solución que diga: prodúzcanse menos dos cajas o contrátese menos cuatro personas.

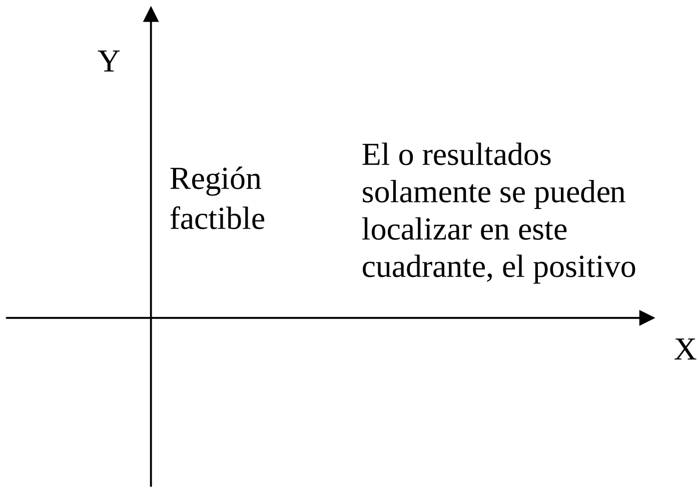
Mientras que no existe un límite en el número de restricciones que puede tener un problema de PL, sólo puede haber un objetivo. La forma matemática del objetivo se llama FUNCIÓN OBJETIVO. Debe llevar consigo el maximizar o minimizar alguna medida numérica. Podría ser maximizar el rendimiento, la ganancia, la contribución marginal o los contactos con los clientes. Se puede minimizar el costo, el número de empleados o el material de desperdicio. Con frecuencia el objetivo es evidente al observar el problema.

El valor de la función objetivo no se conocer hasta que se resuelve el problema en cuestión se usa una variable para representarla: $\max imizar: \quad z = 4x + 2y \qquad \min imizar: C = 3x + 5y + 3z$

2.2. METODOS DE SOLUCIÓN DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL.

2.2.1. Método gráfico de modelos lineales con dos variables.

Para la solución grafica de programas lineales con dos variables, se traza un eje de coordenadas cartesianas, para graficar las desigualdades (se convierten en igualdades) dadas por el problema. Se encuentra el área de soluciones factibles y proceder a graficar la función objetivo para conocer el valor óptimo (maximizar o minimizar).



1. El gerente de Dominos Pizza, asigna $9000 al mes para su publicidad en dos periódicos. El Universal y el Reforma. El Universal cobra $300 por cierto aviso, mientras que el Reforma cobra $100 por un aviso del mismo tipo. El gerente ha decidido que el anuncio debe aparecer en 15 ediciones del Reforma mes como mínimo y como máximo 30. El Universal tiene una circulación diaria de 50000 y el Reforma tiene una circulación de 20000. En estas condiciones determina cuantos anuncios deberá solicitar el gerente en cada periódico para llegar al máximo número de lectores. Encuentra la solución por el método gráfico. Señala la región factible el punto óptimo y la máxima utilidad.

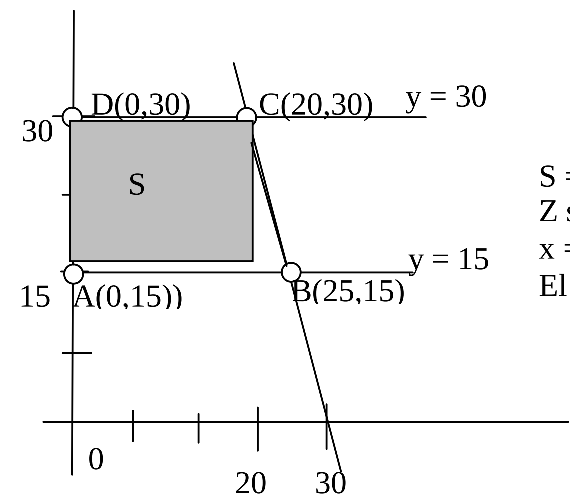
Solución

Solución: Si x = Universal; y *y* = Reforma entonces:

Las restricciones están dadas por: $300x + 100y \leq 9000$

$15 \leq y \leq 30$; $0 \leq x$; $0 \leq y$

La función objetivo esta dada por: maximizar $Z = 50000x + 20000y$



S = Región factible
Z se maximiza cuando
x =20 y y = 30
El punto C es el óptimo

2.2. METODO SIMPLEX

El método simplex es el procedimiento general para resolver problemas de programación lineal, en realidad es un algoritmo, de los cuales ustedes ya habrán observado en cursos anteriores aún cuando es posible que no hayan escuchado jamás ese nombre, sin duda se han encontrado muchos algoritmos con anterioridad. Por ejemplo, el conocido procedimiento para la división larga es un algoritmo. También lo es el procedimiento para obtener raíces cuadradas. De hecho cualquier *procedimiento iterativo de solución* es un algoritmo. Por consiguiente, un algoritmo es sencillamente un proceso en el que se repite (se itera) un procedimiento sistemático una y otra vez hasta que se obtiene el resultado que se desea, como consecuencia, un algoritmo reemplaza un problema difícil por una serie de problemas más simples.

Además de las iteraciones, los algoritmos también incluyen un procedimiento para arrancar y un criterio para determinar el momento de detenerse.

El método simplex es un procedimiento iterativo que permite tender progresivamente hacia la solución óptima. Es un procedimiento sistemático y eficiente para encontrar y probar soluciones situadas para encontrar la optimalidad.

El método requiere que las restricciones sean ecuaciones en lugar de inecuaciones, lo cual se logra añadiendo variables de holgura a cada inecuación del modelo, variables que nunca pueden ser negativas y tienen coeficiente 0 en la función objetivo. Para el modelo formulado anteriormente tenemos:

Para la construcción del modelo

1. Definir las variables de decisión.
2. Definir el objetivo o meta en términos de las variables de decisión.
3. Definir las restricciones.
4. Restringir todas las variables para que sean no negativas.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Para lograr los objetivos el alumno:

1. Deberá investigar el método simplex, para que es, como se maneja y significa iterar.
2. Investigará que es la función objetivo que significa maximizar y minimizar.
3. Investigará que es el método simplex: primal y dual
4. Deberá resolver para encontrar la mejor, solución problemas relacionados con el tema en la bibliografía sugerida.

5. Resolverá los problemas propuestos por la asesora en esta guía.

Ejemplo 1: Taller de mantenimiento.

Un taller de mantenimiento fabrica dos tipos de piezas para la reparación de equipos fundamentales del proceso productivo. Estas piezas requieren un cierto tiempo de trabajo en cada una de las tres máquinas que las procesan. Este tiempo, así como la capacidad disponible (h) y la ganancia por cada pieza se muestran en el cuadro siguiente:

Máquina	Tiempo por Pieza		Fondo de Tiempo(h)
	A	B	
I	2	2	160
II	1	2	120
III	4	2	280
Ganancia ($/Pieza)	6	4	

Se logra vender todo lo producido y se desea determinar la cantidad de piezas a fabricar que optimice la ganancia.

Formulando el modelo

X_1 : Número de piezas del tipo A.

X_2 : Número de piezas del tipo B.

Optimizando la ganancia (Z).

Max $Z = 6X_1 + 4X_2$

Sujeto a las restricciones:

$2X_1 + 2X_2 \leq 160$ Fondo de tiempo de la máquina 1.

$X_1 + 2X_2 \leq 120$ Fondo de tiempo de la máquina 2.

$4X_1 + 2X_2 \leq 280$ Fondo de tiempo de la máquina 3.

Como ninguna variable implicada puede ser negativa entonces:

$X_1 \geq 0$; $X_2 \geq 0$

Ya definido el modelo formulado anteriormente ahora:

Igualamos la función objetivo a cero: $Z – 6X1 – 4X2 = 0$

Agregamos una variable de holgura a cada inecuación para hacerla igualdad (s)

$2X1 + 2X2 + s1 = 160$

$X1 + 2X2 + s2 = 120$

$4X1 + 2X2 + s3 = 280$

Todas las variables son no negativas.

La solución básica inicial se obtiene seleccionando las variables de holgura como variables básicas, resultando conveniente disponer los valores como se muestran en la tabla o matriz siguiente:

I	VB	Z	X1	X2	S1	S2	S3	Cte.
1	Z	1	- 6	-4	0	0	0	0
2	S1	0	2	2	1	0	0	160

3	S2	0	1	2	0	1	0	120
4	S3	0	4	2	0	0	1	280

Cada ecuación debe tener una única variable básica (VB), con el coeficiente unidad en la fila correspondiente.

Esta solución básica debe ser examinada para observar si puede ser mejorada. La presencia de coeficientes negativos en la FO indica que la solución básica puede ser mejorada, pues el valor de Z se incrementará.

Cuando no hay coeficientes negativos, significa que la solución es óptima.

Para encontrar una solución mejorada es necesario:

- Elegir la variable que entra como la de mayor coeficiente negativo (X1)
- Elegir la variable que sale como aquella que al ser removida permita que la variable que entra a la base pueda tener un valor tan grande como sea posible, sin violar alguna de las restricciones en el modelo. En este caso la variable S3 deja la base y a su vez X1 se introduce como la nueva variable básica.
- El elemento pivote es el coeficiente que está en la intersección de la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale.
- Los valores correspondientes a la nueva fila pivote se obtienen dividiendo los coeficientes de la fila pivote en la tabla inicial por el elemento pivote.
- Las otras filas de la solución mejorada se calculan por la expresión:

Nueva fila = Fila anterior – elemento de la columna pivote (nueva fila pivote)

Así, se obtiene la siguiente matriz:

i	VB	Z	X1	X2	S1	S2	S3	Cte.
0	Z	1	0	- 1	0	0	1.5	420
1	S1	0	0	1	1	0	-0.5	20
2	S2	0	0	1.5	0	1	- 0.25	50
3	X1	0	1	0.5	0	0	0.25	70

Como se puede apreciar esta no es aún la solución óptima ¿Por qué?

PORQUE TENEMOS UN VALOR NEGATIVO EN EL RENGLÓN DE Z, recordemos que cada que tengamos un valor negativo en el valor de la función objetivo debemos iterar hasta ya no tenerlo.

Iterando nuevamente se obtiene la tabla correspondiente que se muestra a continuación:

i	VB	Z	X1	X1	S1	S2	S3	Cte.
0	Z	1	0	0	1	0	1	440
1	X2	0	0	1	1	0	-0.5	20
2	S2	0	0	0	-1.5	1	0.5	20
3	X1	0	1	0	-0.5	0	0.5	60

¿Es esta la solución óptima? Si lo es, determina entonces los valores de las variables para el óptimo.

Los valores para el la mejor solución óptima son: fabricar y vender 20 unidades de X_2 y 60 unidades de X_1, la máxima utilidad es de 440

Como podemos observar los valores para las variables las encontramos a la derecha donde haya un "1"

Se ha aplicado el algoritmo para el caso del modelo estándar, cuando se presentan problemas con restricciones y el criterio de optimización es mínimo, entonces hay que introducir variables artificiales y se sugiere convertir el problema en un problema de maximizar.

Aspectos Fundamentales Del Método Simplex

1. Encuentra una solución óptima
2. Es un método de cambio de bases
3. Requiere que la función objetivo sea expresada de tal forma que cada variable básica tenga como coeficiente 0

Requiere que cada variable básica aparezca en una y solamente una ecuación de restricción

Ejemplo 2: En una zona de 150 ha y con una disponibilidad de agua de 400 m^3/ha se debe sembrar azúcar y maíz. Maximizar las cantidades a sembrar. Utiliza el m simplex.

Datos:	Azúcar	Maíz	
Agua	0.4 m^3/ton	1.6 m^3/ton	a
Precio/ton	15	45	c
Costo/ton	5	15	c
Recíproco productividad	0.2 ha/ton	0.4 ha/ton	a

Solución. Se encuentra la función objetivo, las restricciones y se agrega la variable de holgura.

MAX 10A + 30M   0.2 A + 0.4 M + X1 = 150

0.4 A + 1.6 M + X2 = 400

Se utiliza el pivoteo.

	A	M	X1	X2	V	
X1	0.2	0.4	1	0	150	
X2	0.4	1.6	0	1	400	
	10	30	0	0		

	A	M	X1	X2	V	
X1	**0.2**	**0.4**	**1**	**0**	**150**	**/ 0.2**
X2	0.4	1.6	0	1	400	
	10	30	0	0		

	A	M	X1	X2	V	
X1	1	2	5	0	750	**X 0.4**
X2	**0.4**	**1.6**	**0**	**1**	**400**	**Resta**
	10	30	0	0		

	A	M	X1	X2	V	
X1	1	2	5	0	750	**X 10**
X2	0	0.8	-2	1	100	
	10	**30**	**0**	**0**		**Resta**

	A	M	X1	X2	V	
X1	1	2	5	0	750	
X2	**0**	**0.8**	**-2**	**1**	**100**	**/ 0.8**
	0	10	-50	0	-7500	

	A	M	X1	X2	V	
X1	**1**	**2**	**5**	**0**	**750**	**Resta**
X2	**0**	**1**	**-2.5**	**1.25**	**125**	**X 2**
	0	10	-50	0	-7500	

	A	M	X1	X2	V	
X1	**1**	**0**	**10**	**-2.5**	**500**	
X2	0	1	-2.5	1.25	125	**X 10**
	0	**10**	**-50**	**0**	**-7500**	**Resta**

	A	M	X1	X2	**V**	
X1	1	0	10	-2.5	**500**	
X2	0	1	-2.5	1.25	**125**	
	0	0	-35	-12.5	**-8750**	

Solución: A = 500 ton/año; M = 125 ton/año; Ganancia máx: 8750.00/año.

Dualidad

Asociado a cada problema de Programación Lineal existe un llamado dual, de hecho al de Programación Lineal se le llama primal. La forma general del problema dual es la siguiente:

Para facilitar la comprensión de lo anterior considérese el diagrama siguiente:

Primal	**Dual**
$C_1 \ldots\ldots C_n$ (1) a_{11} b_1 (2) (3) a_{m1} b_m	$b_1 \ldots\ldots b_m$ (3) (2) $a_{11} \ldots\ldots a_{m1}$ C_1 (1) C_2
Variables $X_1 \ldots\ldots X_n$	**Variables** $Y_1 \ldots\ldots Y_m$

El problema dual tiene las siguientes características:

- El objetivo de la optimización es contrario al del primal.
- Las inecuaciones de restricción son inversas.
- La solución del dual es la misma que la del primal.

Desde el punto de vista económico, el significado de las variables duales es de gran interés para los gerentes, ya que representan el valor por unidad de recurso adicional, lo cuál permite tomar decisiones sobre donde invertir para incrementar las utilidades.

AHMSA fabrica dos modelos de chimenea de hierro forjado, el Modelo A y el Modelo B. La producción de una chimenea del modelo A requiere 20 K de hierro forjado y 20 minutos de trabajo, el modelo B requiere 30 k de hierro forjado y 15 minutos de trabajo. La ganancia por una chimenea del modelo A es d \$6 y la ganancia por una chimenea del modelo B es de \$8. Cada semana se dispone de 7200 k de hierro y 100 horas de trabajo. Debido a un exceso de mercancía de la semana pasada, el dueño ha decidido que no debe fabricar mas de 150 unidades del modelo A esta semana. Por el método simplex determina cuántas chimeneas de cada modelo debe fabricar para maximizar sus ganancias.

Chimenea modelo A = x
Chimenea modelo B = y
La función objetivo a maximizar es: $Z = 6x + 8y$

Las limitaciones sobre la disponibilidad del material y de la mano de obra se expresan: $\begin{matrix} 20x+30y \le 7200 & o & 2x+3y \le 720 \\ 20x+15y \le 6000 & o & 4x+3y \le 1200 \end{matrix}$ y $x \le 150 \quad x \ge 0; \; y \ge 0$

se hacen las iteraciones respectivas y la conclusión es que se deben fabricar 150 unidades del modelo A, y 140 unidades del modelo B.

2.3. El Modelo de Transporte.

El Transporte desempeña un papel importante en la economía y en las decisiones administrativas. Con frecuencia la disponibilidad de transporte económico es crítica para la sobrevivencia de una empresa.

Un problema común se refiere a calcular el número de unidades que deberían enviarse a cada punto destino al destino. Con ello se pretende minimizar los costos totales de transporte o la entrega.

El modelo tiene que ver con la determinación de un plan de costo mínimo para transportar una mercancía desde varias fuentes (fabricas) a varios destinos (almacenes, bodegas). Se puede, incluso, extender de manera directa para abarcar situaciones prácticas de las áreas de control del inventario, programación de empleos así como asignación de personal.

El modelo de transporte es un modelo de la programación lineal que se puede resolver a través del método simplex. Su estructura especial hace posible el desarrollo de un procedimiento de solución conocido como técnica de transporte, pero sigue los pasos exactos de método simplex.

El modelo clásico de transporte incluye el embarque de un producto homogéneo (no existen notables diferencias en la calidad del producto proporcionado por las fuentes de suministro) de un conjunto de orígenes (fabricas) a un conjunto de destinos, (bodegas, almacenes). Cada origen representa una fuente de abastecimiento para el producto y cada destino un punto de demanda del mismo.

El modelo clásico de transporte tiene por objeto asignar la oferta disponible en cada origen, de modo que se satisfaga la demanda en los destinos. Puede recurrirse a diversos criterios para medir la eficacia de la asignación. Los objetivos comunes son minimizados los costos totales del transporte o bien maximizar el margen total de utilidad proveniente de la asignación.

Cada origen puede abastecer a cualquiera de los destinos y la demanda un destino puede ser satisfecha conjuntamente por una combinación de orígenes o en forma total por uno. Cada origen tiene determinada capacidad que representa el número máximo de unidades que puede suministrar. Los destinos presenta una demanda específica, la cual consituye el número de unidades que necesita.

La estructura de un Modelo de Transporte es:

Restricciones de Oferta: $X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq O_1$
$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq O_2$
$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq O_3$

Restricciones de Demanda: $X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq D_1$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq D_2$
$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq D_3$

Función Objetivo:

$Z(Min) = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33}$

Para resolver Modelos de Transporte existen diversos métodos que generan soluciones factibles como:

A. Esquina Noroeste.
B. Cruce del Arroyo.
C. Piedra que Rueda.
D. Aproximación Vogel.
E. Aproximación Russel.
F. Costo Mínimo.
G. Tanteos.

Método de Esquina Noroeste.

Los pasos del Método de Esquina Noroeste son:

1. Se da la máxima asignación posible a la celda superior izquierda.
2. Si aún existe oferta se asigna a la celda inmediata horizontal.
3. Si la oferta no ha sido satisfecha se continúa asignando en la celda inmediata inferior. Se repite el procedimiento hasta la última celda.

Ejemplo: Resuelve el siguiente Modelo de Transporte, por el método Esquina Noroeste, forma la matriz con la siguiente información:

ORIGEN	OFERTA	DESTINO	DEMAN-DA
A	55	V	70

B	80	W	100
C	75	X	40
TOTAL	210	TOTAL	210

A	V	W	X
DE			
A	5	10	10
B	20	30	20
C	10	20	30

Determina la solución óptima.

D / *O*	*V*	*W*	*X*	*O*
A	-1 5 55	+1 10	10	55
B	+1 20 15	- 1 30 65	20	80
C	10	20 35	30 40	75
D	70	100	40	210

Minimice el Costo**.**

$$m = columnas \quad n = celdas$$

Celdas de asignación que ocupa en la matriz los datos

$$m + n = celdas \quad de \quad asignación = 3 + 3 - 1 = 5$$

El costo total es:

C_T = 55 x 5 = 275
20 x 15 = 300
65 x 30 = 1,950
35 x 20 = 700
40 x 30 = 1,200
$4,425.00

Partiendo de la solución factible generada por el Método de Esquina Noroeste, se emplea el Algoritmo del Cruce del Arroyo, para encontrar una mejor solución o más económica.

Pasos para el Cruce de Arroyo:

a). Determina el índice de mejoramiento para cada celda (variable).

b). Si existe una mejor solución, determina qué celda (variable) debe entrar a la base. Al efectuar un análisis de los índices de mejoramiento, este indica que con la introducción de tres de cuatro variables no básicas, se lograría una reducción de los costos totales. Así la celda que produzca el mayor rendimiento marginal de la función objetivo se escoge como la variable de entrada.

d). Encuentra la variable de salida (celda) y el número de unidades para asignar a la variable de entrada. La variable de salida se identifica como la variable básica más pequeña en una posición de menos en la trayectoria cerrada de la variable de entrada y el número de unidades es igual al tamaño de la variable de salida (el valor más pequeño en una posición de menos).

c). Obtenga la nueva solución y regrese al paso a.

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(A, W)	+ 1	+ $10
(B, W)	- 1	- $30
(B, V)	+ 1	+ $20
(A, V)	- 1	- $ 5
Cambio Neto		- $5 índice de mejoramiento

D / *O*	*V*	*W*	*X*	*O*
A	-1 5 55	10	+1 10	55
B	+1 20 15	-1 30 65	20	80
C	10	+1 20 35	-1 30 40	75

D	70	100	40	210

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(A, X)	+ 1	+ $10
(C, X)	- 1	- $30
(C, W)	+ 1	+ $20
(B, W)	- 1	- $30
(B, V)	+ 1	+ $20
(A, V)	- 1	- $ 5
Cambio Neto		- $15 índice de mejoramiento

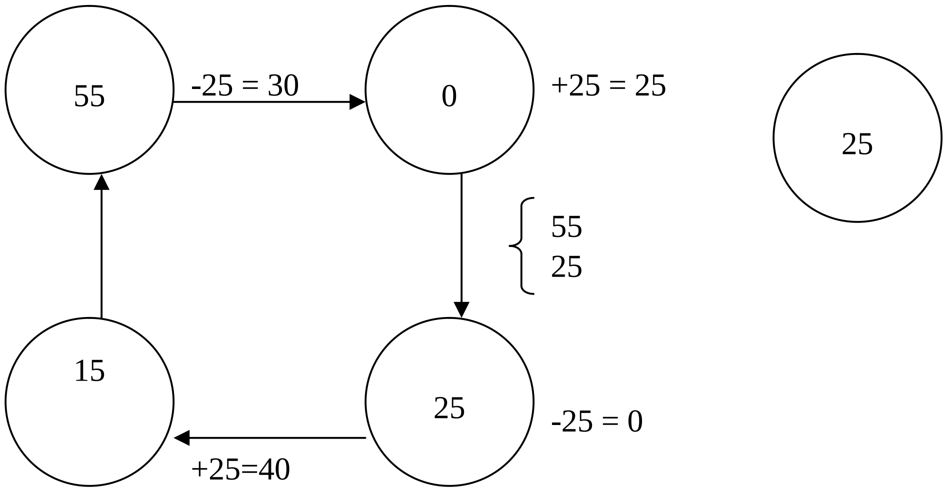
D / *O*	*V*	*W*	*X*	*O*
A	5 55	10	10	55
B	20 15	-1 30 65	+1 20	80
C	10	+1 20 35	-1 30 40	75
D	70	100	40	210

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(C,X)	+ 1	+ $30
(C,W)	- 1	- $20
(B,W)	+ 1	+ $30
(B,X)	- 1	- $20
Cambio Neto		$20 índice de mejoramiento

Trayectorias Cerradas e Índices de Mejoramiento para la 1er Iteración.

CASILLA NO BÁSICA	TRAYECTORIA CERRADA	ÍNDICE DE MEJORA MIENTO

(A, W)	*(A, W) → (B, W) → (B, V) → (A, V) → (A, W)*	- $ 5 *
(A, X)	*(A, X) → (B, X) → (B,V) → (A,V) → (A,X)*	+ $ 5
(C,V)	*(C,V) → (B,V) → (B, W) → (C, W) → (C,V)*	$ 0
(C, X)	*(C, V) → (C,W) → (B, W) → (B,X) → (C,X)*	+ $20



D / *O*	*V*	*W*	*X*	*O*
A	-1 5 30	10 25	+1 10	55
B	+1 20 40	30	-1 20 40	80
C	10	20 75	30	75
D	70	100	40	210

2da. iteración.

$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

Costo mínimo ajustado:
CT = 30 X 5 = 150
25 X 10 = 250

40 X 20 =   800
75 X 20 =1,500
$3,500.00

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(A, X)	+ 1	+ $10
(B, X)	- 1	- $20
(B,V)	+ 1	+ $20
(A,V)	- 1	- $ 5
Cambio Neto		+ $5 índice de mejoramiento

D \ O	*V*	*W*	*X*	*O*
A	+1 5 30	-1 10 25	10	55
B	-1 20 40	+1 30	20 40	80
C	10	20 75	30	75
D	70	100	40	210

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(B,W)	+ 1	+ $ 30
(B,V)	- 1	- $ 20
(A,V)	+ 1	+ $ 5
(A,W)	- 1	- $ 10
Cambio neto		+ $5 índice de mejoramiento

D / O	V	W	X	O
A	-1 5 30	+1 10 25	10	55
B	20 40	30	20 40	80
C	+1 10	-1 20 75	30	75
D	70	100	40	210

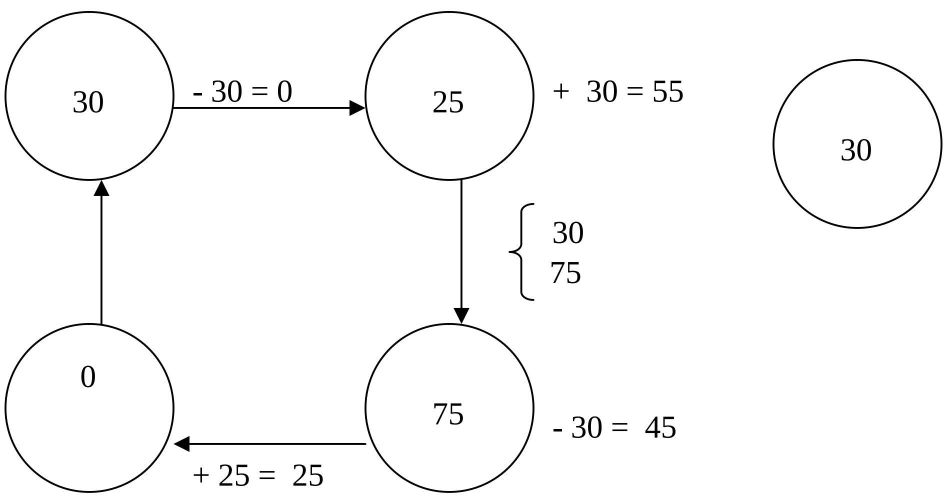
CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(C,V)	+ 1	+ $10
(A,V)	- 1	- $ 5
(A,W)	+ 1	+ $10
(C,W)	- 1	- $20
Cambio Neto		- $ 5 índice de mejoramiento

D / O	V	W	X	O
A	-1 5 30	+1 10 25	10	55
B	+1 20 40	30	-1 20 40	80
C	10	-1 20 75	+1 30	75
D	70	100	40	210

CASILLA AJUSTADA	AJUSTE	CAMBIO DEL COSTO
(C,X)	+ 1	+ $ 30
(C,W)	- 1	- $ 20
(A,W)	+ 1	+ $ 10
(A,V)	- 1	- $ 5
(B,V)	+ 1	+ $20
(B,X)	- 1	- $ 20
Cambio Neto		+ $15 índice de mejoramiento

Trayectorias Cerradas e índices de Mejoramiento para la 2ª Iteración.

CASILLA NO BÁSICA	TRAYECTORIA CERRADA	ÍNDICE DE MEJORAMIENTO
(A, X)	*(A, X) → (B,X) → (B, V) → (A, V) → (A, X)*	- $ 5
(B, W)	*(B,W) → (B, V) → (A,V) → (A,W) → (B,W)*	+ $ 5 *
(C, V)	*(C,V) → (A,V) → (A,W) → (C, W) → (C,V)*	- $ 5
(C, X)	*(C,X) → (C,W) → (A,W) → (A, V) → (B, V) → (B, X) → (C, X)*	+ $15



D / O	*V*	*W*	*X*	*O*
	+1 5	-1 10	10	

A		55		55
B	20 40	30	20 40	80
C	-1 10 30	+1 20 45	30	75
D	70	100	40	210

3era. ITERACION.

Costo mínimo obtenido

Ct = 55 x 10 = 550
40 x 20 = 800
40 x 20 = 800
30 x 10 = 300
45 x 20 = 900

$3,350.00

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(A,V)	+ 1	+ $ 5
(A,W)	- 1	- $ 10
(C,W)	+ 1	+ $ 20
(C,V)	- 1	- $ 10
Cambio Neto		+ $ 5 índice de mejoramiento

D / *O*	*V*	*W*	*X*	*O*
	5	-1 10	+1 10	

A		55		55
B	+1 20 40	30	-1 20 40	80
C	-1 10 30	+1 20 45	30	75
D	70	100	40	210

.

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(A,X)	+ 1	+ $ 10
(B,X)	- 1	- $ 20
(B,V)	+ 1	+ $ 20
(C,V)	- 1	- $ 10
(C,*W*)	+ 1	+ $ 20
(A,W)	- 1	- $ 10
Cambio Neto		+ $10 índice de mejoramiento

D / *O*	*V*	*W*	*X*	*O*
A	5	10 55	10	55
B	-1 20 40	+1 30	20 40	80
C	+1 10 30	-1 20 45	30	75

.

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(B, W)	+ 1	+ $ 30
(C, W)	- 1	- $ 20

(C ,V)	+ 1	+ $ 10
(B ,V)	- 1	- $ 20
Cambio Neto		$0 índice de mejoramiento

D / *O*	*V*	*W*	*X*	*O*
A	5	10 55	10	55
B	+1 20 40	30	-1 20 40	80
C	-1 10 30	20 45	+1 30	**75**
D	70	100	40	**210**

CASILLA AJUSTADA	*AJUSTE*	*CAMBIO DEL COSTO*
(C, X)	+ 1	+ $ 30
(B, X)	- 1	- $ 20
(B, V)	+ 1	+ $ 20
(C, V)	- 1	- $ 10
Cambio Neto		+ $20 índice de mejoramiento

Trayectorias Cerradas e Indices de Mejoramiento para la 3er Iteración.

CASILLA NO BÁSICA	TRAYECTORIA CERRADA	ÍNDICE DE MEJORAMIENTO
(A, V)	*(A, V) → (A, W) → (C, W) → (C, V) → (A, V)*	- $ 5
(A, X)	*(A, X) → (B, X) → (B,V) → (C,V) → (C,W) → (A, W) → (A, X)*	+ $10
(B, W)	*(B, W) → (C, W) → (C, V) → (B, V) → (B, W)*	$ 0
(C, X)	*(C,X) → (B, X) → (B, V) → (C, V) → (C, X)*	+ $20

2.4. Modelo de Asignación.

Para quedar clasificado como un problema de asignación, la capacidad en cada origen y la demanda en cada destino debe ser igual (la matriz debe ser cuadrada). Como su nombre lo dice, el problema trata de decidir que origen asignar a cada destino.

Desarrollo de la matriz de costos de oportunidad:

Minimización

1. Reducción por renglón (se resta el valor menor de cada una de las columnas).
2. Reducción por columna (se resta el valor menor de cada uno de los renglones)
3. Tachar el mayor número de ceros con el mínimo de líneas rectas (no se aceptan diagonales)
4. Si el menor número de líneas que tacharon ceros es igual a renglones y columnas el resultado es óptimo
5. Si no es el resultado, se aplica el siguiente paso.
6. Seleccionar el menor costo de entre las celdas que no están tachadas por líneas.
    a) Este costo se resta a todas las celdas sin tachar
    b) y se suma a cada celda tachada por una intersección.
7. Se repiten los pasos 3 y 4 hasta que se encuentre la solución óptima.

Ejemplos:

Se tiene que asignar un trabajo: W,X,Y y Z a cada una de las personas: A,B,C y D. El costo por hora (por 10) es el siguiente. Por el Método de Asignación ¿Cómo se deberá asignar cada trabajo para que el costo sea menor?:

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	15	18	16	10
B	14	17	17	8
C	17	19	23	17
D	19	14	16	17

¿Cuál es el costo total de la solución óptima?

NOTA: El procedimiento anterior es para resolver Problemas de Minimización.

5	8	6	0	
6	9	9	0	
0	2	6	0	
5	0	2	3	

5	6	2	0
6	9	7	0
0	2	4	0
5	0	0	5

5	6	2	0
6	7	5	0
0	0	2	0
7	0	0	5

3	4	0	0
4	5	3	0
0	0	2	2
7	0	0	7

Distribución Óptima:

$A \to Y$ 16

$B \to Z$ 8

$C \to W$ 17

$D \to X$ $\underline{14}$

Total 55

Maximización:

1. Consiste en escoger el mayor elemento de toda la tabla.
2. Éste valor se resta a cada uno de los demás elementos de la matriz.
3. A la nueva matriz se aplica el método usado para la minimización.

Ejemplo:

Una fábrica tiene cuatro máquinas para la producción de 4 de sus productos por el Método de Asignación como puede asignar cada máquina para obtener la máxima utilidad. Los costos se dan en la siguiente tabla ¿Cuál es la Máxima Utilidad?

	W	***X***	***Y***	***Z***
A	**15**	**18**	**16**	**10**
B	**14**	**17**	**17**	**8**
C	**17**	**19**	**23**	**17**
D	**19**	**14**	**16**	**17**

8	5	7	13
9	6	6	15
6	4	0	6
4	9	7	6

3	0	2	6
3	0	0	4
6	4	0	4
0	5	5	0

0	0	2	3
0	0	0	1
3	4	0	1
0	8	8	0

Distribución Óptima:

$A \rightarrow W$ 15

$B \rightarrow X$ 17

$C \rightarrow Y$ 23

$D \rightarrow Z$ $\underline{17}$

Total 72

Unidad 111. Planeación y control de proyectos con PERT/CPM

Objetivos Particulares de la unidad

Antecedentes

Dos son los orígenes del método del camino crítico: el método PERT (Program Evaluation and Review Technique) desarrollo por la Armada de los Estados Unidos de América, en 1957, para controlar los tiempos de ejecución de las diversas actividades integrantes de los proyectos espaciales, por la necesidad de terminar cada una de ellas dentro de los intervalos de tiempo disponibles. Fue utilizado originalmente por el control de tiempos del proyecto Polaris y actualmente en
todo el programa espacial.

El método CPM (Crítical Path Method), el segundo origen del método actual, fue desarrollado también en 1957 en los Estados Unidos de América, por un centro de investigación de operaciones para la firma Dupont y Remington Rand, buscando el control y la optimización de los costos de operación mediante la planeación adecuada de las actividades componentes del proyecto.

Ambos métodos aportaron los elementos administrativos necesarios para formar el método del camino crítico actual, utilizando el control de los tiempos de ejecución y los costos de operación, para buscar que el proyecto total sea ejecutado en el menor tiempo y al menor costo posible.

Aplicaciones
El campo de acción de este método es muy amplio, dada su gran flexibilidad y adaptabilidad a cualquier proyecto grande o pequeño. Para obtener los mejores resultados debe aplicarse a los proyectos que posean las siguientes características:

a. Que el proyecto sea único, no repetitivo, en algunas partes o en su totalidad.
b. Que se deba ejecutar todo el proyecto o parte de el, en un tiempo mínimo, sin variaciones, es decir, en tiempo crítico.
c. Que se desee el costo de operación más bajo posible dentro de un tiempo disponible.

Dentro del ámbito aplicación, el método se ha estado usando para la planeación y control de diversas actividades, tales como construcción de presas, apertura de caminos, pavimentación, construcción de casas y edificios, reparación de barcos, investigación de mercados, movimientos de colonización, estudios económicos regionales, auditorias, planeación de carreras universitarias, distribución de tiempos de salas de operaciones, ampliaciones de fábrica, planeación de itinerarios para cobranzas, planes de venta, censos de población, etc.

Planeación y control de proyectos con PERT/CPM

La buena administración de proyectos a gran escala requiere planeación, programación y coordinación cuidadosa de muchas actividades interrelacionadas. Al principiar la década de

1950 se desarrollaron procedimientos formales basados en uso de redes y de las técnicas de redes para ayudar en estas tareas. Entre los procedimientos mas sobresalientes se encuentran el PERT (técnica de evaluación y revisión de programas) y el CPM (método de la ruta critica).Aunque originalmente los sistemas tipo PERT se aplicaron para evaluar la programación de un proyecto de investigación y desarrollo, también se usan para controlar el avance de otros tipos de proyecto especiales. Como ejemplos se pueden citar programas de construcción, la programación de computadoras, la preparación de propuestas y presupuestos, la planeación de l mantenimiento y la instalación de sistemas de cómputo, este tipo de técnica se ha venido aplicando aun a la producción de películas, a las compañas políticas así como en operaciones quirúrgicas complejas.

El objetivo de los sistemas tipo PERT consiste en ayudar en la planeación y el control, por lo que no implica mucha optimización directa. Algunas veces el objetivo primario es determinar la probabilidad de cumplir con fechas de entrega específicas. También identifica aquellas actividades que son más probables que se conviertan en cuellos de botella y señala, por e4nde, en que puntos debe hacerse el mayor esfuerzo para no tener retrasos. Un tercer objetivo es evaluar el efecto de los cambios del programa. Por ejemplo, se puede valorar el efecto de un posible cambio en la asignación de recursos de las actividades menos críticas a aquellas que se identificaron con cuellos de botella.

Todos los sistemas tipo PERT emplean una red de proyecto para visualizar gráficamente la interrelación entre sus elementos. Esta representación del plan de un proyecto muestra todas las relaciones de procedencia, respecto al orden en que se deben realizar las actividades. En la Fig. 1 sé muestran estas características para la red de proyecto inicial para la construcción de una casa. Esta red indica que la excavación debe hacerse antes de poner los cimientos y después los cimientos deben completarse antes de colocar las paredes. Una vez que se levantan las paredes se pueden realizar tres actividades en paralelo. Al seguirla red hacia delante se ve el orden de las tareas subsecuentes.

En la terminología de PERT, cada arco de la red representa una actividad, es decir, una de las tareas que requiere el proyecto, cada nodo representa un evento que por lo general se define con el momento ñeque se terminan todas las actividades que llegan a ese nodo, Las puntas de flecha indican la secuencia en la que3 debe ocurrir cada uno de esos eventos. Lo que es mas, un evento debe preceder a la iniciación de las actividades que llegan a ese nodo. Las puntas de flecha indican la secuencia en la que debe ocurrir cada uno de esos eventos. Lo que es mas, un evento debe preceder a la iniciación de las actividades que salen de ese nodo. (En la realidad, con frecuencia se pueden traslapar etapas sucesivas de un proyecto, por lo que la red puede representar una aproximación idealizada del plan de un proyecto.)

El nodo hacia el que todas las actividades se dirigen es el evento que corresponde a la terminación desde su concepción, o bien, si el proyecto ya comenzó, el plan para su terminación. En él ultimo caso, cada nodo de la red sin arcos que llegan representa el evento de continuar una actividad en marcha o el evento de iniciar una nueva actividad que puede comenzar en cualquier momento.

Cada arco juega un doble papel, el de representar una actividad y el de ayudar a representar las relaciones de procedencia entre las distintas actividades. En ocasiones, se necesita un arco para definir las relaciones de procedencia aun cuando no haya una actividad real que representar. En este caso, se introduce una actividad ficticia que requiere un tiempo cero, en donde el arco que representa esta actividad ficticia se muestra como una flecha punteada.

Una regla común para construir este tipo de redes es que dos nodos no pueden estar conectados directamente por mas de un arco. Las actividades ficticias también se pueden usar para evitar violar esta regla cuando se tienen dos o más actividades concurrentes.

Una vez desarrollada la red la red de un proyecto, el siguiente paso es estimar el tiempo que se requiere para cada actividad. Estos tiempos se usan para calcular dos cantidades básicas para cada evento, a saber, su tiempo más próximo y su tiempo más lejano.

El tiempo más próximo para un evento es el tiempo (estimado) en el que ocurrirá el evento si las actividades que lo proceden comienzan lomas pronto posible.

Los tiempos más próximos se obtienen al efectuar una pasada hacia delante a través de la red, comenzando con los eventos iniciales y trabajando hacia delante en el tiempo, hasta los eventos finales, para cada evento se hace un calculo del tiempo en el que ocurrirá cada uno, si cada evento procedente inmediato ocurre en su tiempo más próximo y cada actividad que interviene consume exactamente su tiempo estimado. La iniciación del proyecto se debe etiquetar con el tiempo 0.

El tiempo más lejano para un evento es el último momento (estimado) en el que puede ocurrir sin retrasar la terminación del proyecto mas allá de su tiempo más próximo.

Tabla 1. Calculo de los tiempos más próximos para el ejemplo de la construcción de una casa.

Evento	Evento inmediato Anterior	Tiempo Tiempo mas + de la próximo actividad	Tiempo = máximo más próximo
1	___	___	0
2	1	0 + 2	2
3	2	2 + 4	6
4	3	6 + 10	16
5	4	16 + 4	20
6	4	16 + 6	22
7	4	16+7	25

	5	20+5	
8	5	20+0	29
	6	22+7	
9	7	25+8	33
10	8	29+9	38
11	9	33+4	37
12	9	33+5	38
	11	37+0	
13	10	38+2	44

En este caso los tiempos más lejanos se obtienen sucesivamente para los eventos al efectuar una pasada hacia atrás a través de la red, comenzando con los eventos finales y trabajando hacia atrás en el tiempo hasta los iniciales. Para cada evento él calculo del tiempo final en el que puede ocurrir un evento de manera que los que le siguen ocurran en su tempo mas lejano, si cada actividad involucrada consume exactamente su tiempo estimado. Este proceso se ilustra en la tabla 2, en donde 44 días es el tiempo más próximo y el tiempo más lejano para la terminación del proyecto de construcción de la casa. Los tiempos más lejanos para la terminación del proyecto de construcción de la casa.

Sea la actividad (i, j) la actividad que va del evento i al evento j en la red del proyecto. La holgura para un evento es la diferencia entre su tiempo más lejano y su tiempo más próximo.
La holgura para una actividad (i , j) es la diferencia entre [el tiempo mas lejano del evento] y [el tiempo mas próximo del evento i mas el tiempo estimado para la actividad].

Así, si se supone que todo lo demás marcha a tiempo, la holgura para un evento indica cuanto retraso se puede tolerar para llegar a ese evento sin retrasar la terminación del proyecto, y la holgura para una actividad indica lo mismo respecto a un retraso en la terminación de esa actividad. En a tabla 3 se ilustran los cálculo de estas holguras para el proyecto de la construcción de una casa.

Una **ruta critica** de un proyecto es una ruta cuyas actividades tienen la holgura cero. (Todas las actividades y eventos que tienen holgura cero deben estar sobre una ruta crítica, pero no otras.)

Tabla 2. Calculo de los tiempos más lejanos para el ejemplo de la construcción de una casa

Evento	Evento inmediato Anterior	Tiempo mas - de la lejano actividad	Tiempo = mínimo más próximo

13	__	___	44
12	13	44-6	38
11	12	38-0	38
10	13	44-2	42
9	12	38-5	33
	11	38-4	
8	10	42-9	33
7	9	33-8	25
6	8	33-7	26
5	8	33-0	20
	7	25-5	
4	7	25-7	16
	6	26-6	
	5	20-4	
3	4	16-10	6
2	3	6-4	2
1	2	2-2	0

Tabla 3. Calculo de las holguras para el ejemplo de la construcción de una casa.

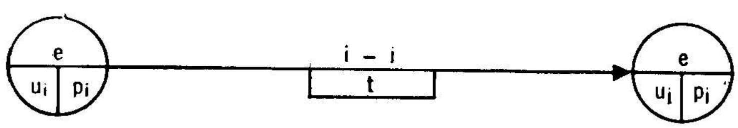
Evento		Holgura		Actividad		Holgura
1		0 – 0 = 0		(1,2)		2 - (0+2) = 0
2		2 - 2 = 0		(2,3)		6 - (2+4) = 0
3		6 – 6 = 0		(3,4)		16 - (6+10) = 0
4		16 - 16 = 0		(4,5)		20 - (16+4) = 0
5		20 – 20 = 0		(4,6)		26 - (16+6) = 4
6		26 - 22 = 4		(4,7)		25 - (16+7) = 2
7		25 – 25 = 0		(5,7)		25 - (20+5) = 0
8		33 - 29 = 4		(6,8)		33 - (22+7) = 4
9		33 – 33 = 0		(7,9)		33 - (25+8) = 0
10		42 - 38 = 4		(8,10)		42 - (29+9) = 4
11		38 – 37 = 1		(9,11)		38 - (33+4) = 1
12		38 - 38 = 0		(9,12)		38 - (33+5) = 0
13		44 – 44 = 0		(10,13)		44 - (38+2) = 4
				(12,13)		44 - (38+6) = 0

Si se verifica en la tabla 3 las actividades que tienen holgura cero, se observa que el ejemplo de la construcción de una casa tiene una ruta critica, 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 9 → 12 → 13, Esta secuencia de actividades criticas debe mantenerse estrictamente a tiempo, si se quiere evitar retrasos en la terminación del proyecto. Otros proyectos pueden tener mas de una ruta critica; por ejemplo nótese lo que pasaría en la figura 2 si el tiempo estimado de la actividad (4,6) se cambiara de 6 a 19.
Resulta interesante observar en la tabla 3 que mientras que todos los eventos sobre la ruta critica (inclusive el 4 y el 7) necesariamente tienen holgura cero, no es así para la actividad (4 , 7), ya que su tiempo estimado es menor que la suma de los tiempos estimados para las actividades (4 , 5) y (5 , 7). En consecuencia, estas ultimas actividades están en la ruta crítica, pero la actividad (4, 7) no lo está.

Esta información sobre los tiempos más cercanos y más lejanos, las holguras y la ruta crítica, es invaluable para el administrador del proyecto. Entre otras cosas, le permite investigar el efecto de posibles mejoras en la planeación para determinar en donde debe hacerse un esfuerzo especial para mantenerse y evaluar el impacto de los retrasos.

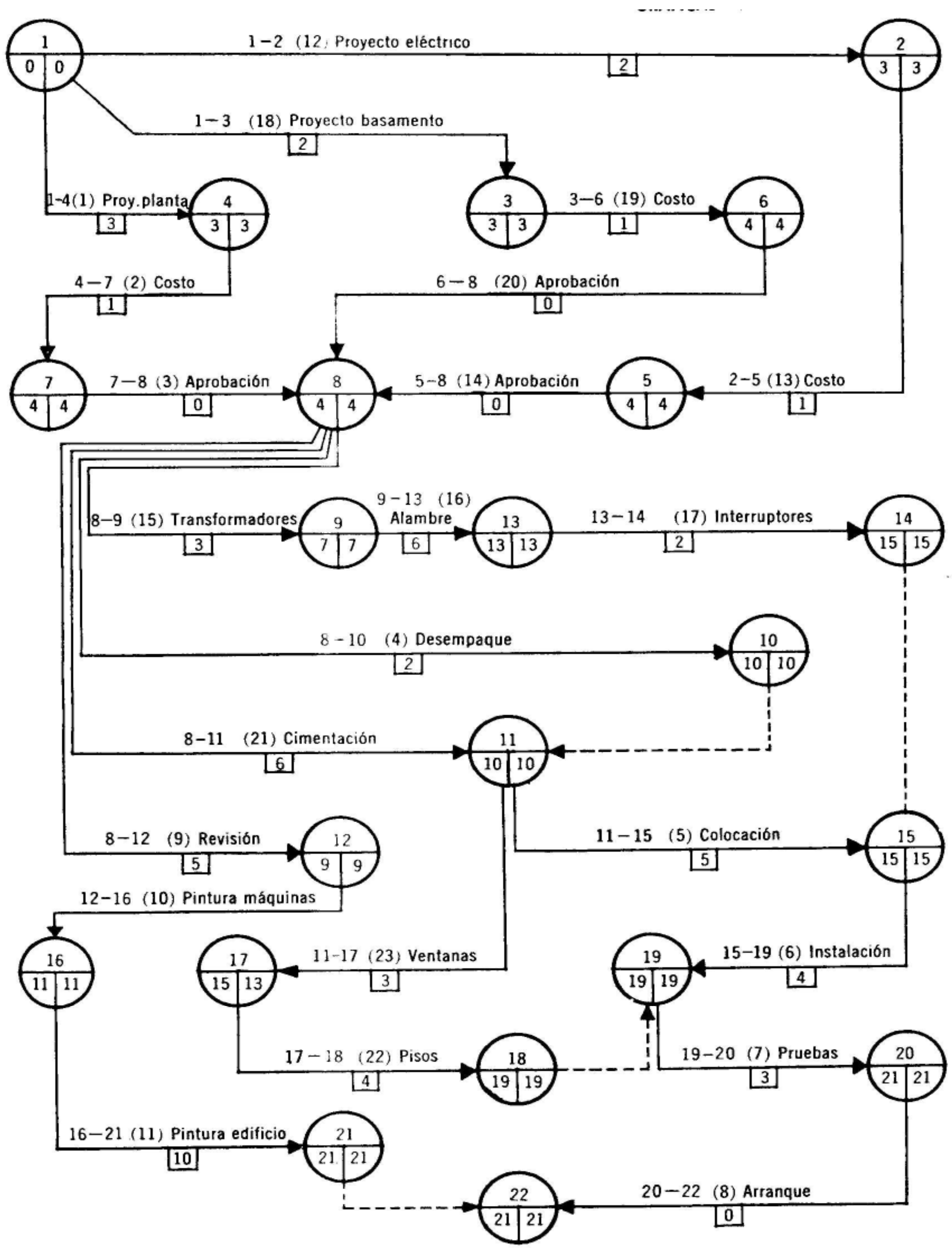
Graficas PERT

La gráfica PERT es una gráfica original de redes no medidas que contiene los datos de las actividades representadas por flechas que parten de un evento i y terminan en un evento j.



En la parte superior de la flecha se indica el número de identificación, generalmente los números de los eventos (i-j). En la parte inferior aparece dentro de un rectángulo la duración estándar (t) de la actividad. En la mitad superior del evento se anota el número progresivo, en el cuarto inferior izquierdo la última lectura del proyecto y en el cuarto inferior derecho la primera lectura del proyecto.

Esta gráfica tiene como ventaja la de informar las fechas más tempranas **y** más tardías de iniciación y terminación de cada actividad, sin tener que recurrir a la matriz de holguras.



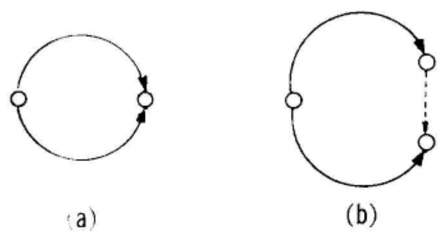
Veamos cómo se presenta la ampliación de la fábrica por medio de una gráfica PERT.

Red de Actividades

Se llama red la representación gráfica de las actividades que muestran sus eventos, secuencias, interrelaciones y el camino critico. No solamente se llama camino critico al método sino también a la serie de actividades contadas desde la iniciación del proyecto hasta su terminación, que no tienen flexibilidad en su tiempo de ejecución, por lo que cualquier retraso que sufriera alguna de las actividades de la serie provocaría un retraso en todo el

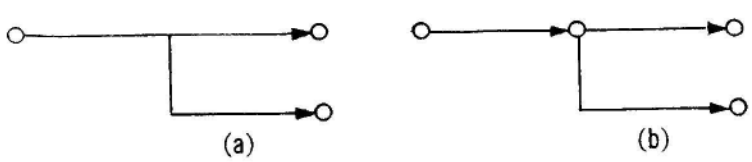
proyecto.
Desde otro punto de vista, camino critico es la serie de actividades que indica la duración total del proyecto. Cada una de las actividades se representa por una flecha que empieza en un evento y termina en otro.
Se llama evento al momento de iniciación o terminación de una actividad. Se determina en un tiempo variable entre el más temprano y el más tardío posible, de iniciación o de terminación.
A los eventos se les conoce también con los nombres de nodos.
Evento

Evento **I j**
El evento inicial se llama i y el evento final se denomina j. El evento final de una actividad será el evento inicial de la actividad siguiente.
Las flechas no son vectores, escalares ni representan medida alguna. No interesa la forma de las flechas, ya que se dibujarán dé acuerdo con las necesidades y comodidad de presentación de la red. Pueden ser horizontales, verticales, ascendentes, descendentes curvas, rectas, quebradas, etc.
En los casos en que haya necesidad de indicar que una actividad tiene una interrelación o continuación con otra se dibujará entre ambas una línea punteada, llamada liga, que tiene una duración de cero.
La liga puede representar en algunas ocasiones un tiempo de espera para poder iniciar la actividad siguiente
Varias actividades pueden terminar en un evento o partir de un mismo evento.

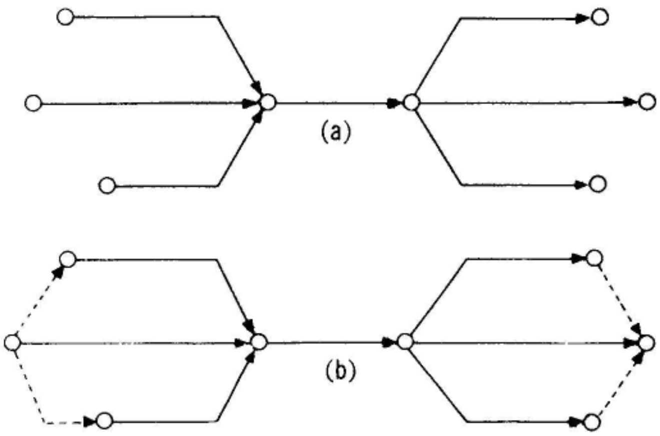


(a) Incorrecto, (b) Correcto.
Al construir la red, debe evitarse lo siguiente:

1. Dos actividades que parten de un mismo evento y llegan a un mismo evento. Esto produce confusión de tiempo y de continuidad. Debe abrirse el evento inicial o el evento final en dos eventos y unirlos con una liga.



2. Partir una actividad de una parte intermedia de otra actividad. Toda actividad debe empezar invariablemente en un evento y terminar en otro. Cuando se presenta este caso, a la actividad base o inicial se le divide en eventos basándose en porcentajes y se derivan de ellos las actividades secundadas.
   (a) Incorrecto; (b) Correcto.



3. Dejar eventos sueltos al terminar la red. Todos ellos deben relacionarse con el evento inicial o con el evento final.

(a) Incorrecto; (b) Correcto

Enfoque de tres estimaciones de PERT.

Hasta ahora se ha supuesto implícitamente que se puede obtener estimaciones con una exactitud razonable del tiempo requerido para cada actividad del proyecto. En la realidad, con frecuencia existe bastante incertidumbre sobré cuales serán estos tiempo; de hecho se trata de una variable aleatoria que tiene cierta distribución de probabilidad. La versión original de PERT toma en cuenta esta incertidumbre usando tres tipos diferentes de estimaciones par los tiempos de las actividades, con el fin de obtener información basica sobre su distribución de probabilidad. Esta información para todos los tiempos de las actividades se utiliza para estimas la probabilidad de terminar el proyecto en la fecha programada.
Las tres estimaciones empleadas por PERT para cada actividad son una estimación más probable, una estimación optimista y una estimación pesimista. La estimación mas probable (denotada por m) intenta ser la estimación mas realista del tiempo que puede consumir una actividad. En términos estadísticos, es una estimación de la moda (el punto mas alto) de la distribución de probabilidad para el tiempo de la actividad. La estimación optimista (denotada por a) procura ser el tiempo poco probable pero posible si todo sale bien; es en esencia una estimación de la cota inferior de la distribución de la probabilidad. Por ultimo, se intenta que la estimación pesimista (denotada por b) sea el tiempo poco probable pero posible si todo sale mal. En términos estadísticos, se trata en esencia de una estimación de la cota superior de la distribución de probabilidad.

Tiempo transcurrido
Modelo de distribución de probabilidad para loas tiempos de las actividades en el enfoque de tres estimaciones de PERT: m = estimación probable, a = estimación optimista y b = estimación pesimista.
Se hacen dos suposiciones para convertir m, a y b en estimaciones del valor esperado (t_e) y la variancia (σ^2) del tiempo que requiere la actividad. Una suposición es que σ , la

desviación estándar (raíz cuadrada de la variancia), es igual a un sexto del intervalo de los requerimientos de tiempo razonablemente posibles; esto es,

$$\sigma^2 = [\frac{1}{6}(b-a)]^2$$

es la estimación deseada de la variancia. El razonamiento para hacer esta suposición es que se considera que las colas de muchas distribuciones de probabilidad (como en la distribución normal) están mas o menos a tres desviaciones estándar de la media, de manera que existe una dispersión de alrededor de seis desviaciones estándar entre las colas, por ejemplo, las cartas de control que se usan normalmente para el control estadístico de la calidad están construidas de manera que la dispersión entre los limites de control se estima en seis desviaciones estándar.

Para obtener la estimación del valor esperado (t_e), también es necesaria una suposición sobre la forma de la distribución de probabilidad, se supone que la distribución es (al menos aproximadamente) una distribución beta. Que es razonable para este propósito. Si se usa el modelo ilustrado en la figura 3 el valor esperado del tiempo de una actividad es aproximadamente $t_e = \frac{1}{3}[2m + \frac{1}{2}(a+b)].$

Nótese que el medio del intervalo (a + b)/ 2 se encuentra entre a y b de manera que t_e es la media aritmética ponderada de la moda y la mitad del intervalo, con un peso de dos tercios para la moda. Aunque la suposición de una distribución beta es arbitraria, sirve para el propósito de localizar el valor esperado a m, a y b de una manera que parece ser razonable. Después de calcular el valor esperado y la variancia estimados para cada una de las actividades, se necesitan tres suposiciones adicionales (o aproximaciones) para poder calcular la probabilidad de terminar el proyecto a tiempo. Una es que los tiempos de las actividades son estadísticamente independientes. Una segunda es que la ruta crítica (en términos de los tiempos esperados) siempre requiere un tiempo total mayor que cualquier otra ruta. Esto implica que el valor esperado y la variancia, es sencillo encontrar la probabilidad de que esta variable aleatoria normal (tiempo del proyecto) sea menor que el tiempo de terminación programado.

Método CPM para trueques entre tiempo y costo

Las versiones originales de CPM y PERT difieren en dos aspectos importantes. Primero, el CPM supone que los tiempos de las actividades son determinísticos (es decir, se pueden predecir de manera confiable sin incertidumbre significativa), por lo que no necesita las tres estimaciones que se acaban de describir. Segundo, en lugar de dar una importancia primordial al tiempo (explícitamente), el CPM asigna la misma importancia al tiempo y al costo y pon esto de relieve al construir un a curva de tiempo-costo para cada actividad. Esta curva representa la relación entre el costo directo presupuestado para la actividad y su tiempo de duración resultante.

Curva tiempo-costo para la actividad (i,j).

Por lo general la grafica se basa en dos puntos: el normal y el intensivo o de quiebre. El punto normal da el costo y el tiempo necesario cuando la actividad se realiza en la forma normal, sin incurrir en costos adicionales (horas extras de mano de obra, equipo o materiales especiales para ahorrar tiempo, etc.), Para acelerar la actividad. Por el contrario, el punto de quiebre proporciona el tiempo y el costo necesario cuando se realiza la actividad en forma intensiva o de quiebre, esto es se acelera completamente sin reparar en costos, con el fin de reducir su tiempo de duración lo mas que se pueda. Como una aproximación, se supone entonces que todos los trueques intermedios entre tiempo y costos son posibles y que se encuentran sobre el segmento de línea que une a estos dos puntos.

El objetivo fundamental del CPM es determinar el trueque entre tiempo y costo que debe emplearse en cada actividad para cumplir con el tiempo de terminación del proyecto que se programo a un costo mínimo. Una forma de determinar la combinación optima del tiempo y costo es aplicar programación lineal. para descubrir esto, es necesario introducir notación nueva, parte de la cual se resume en la figura 4. Sea

D_{ij} = tiempo normal para la actividad (i , j)

CD_{ij} = costo (directo) normal para la actividad (i , j)

d_{ij} = tiempo de quiebre para la actividad (i , j)

Cd_{ij} = costo (directo) de quiebre para la actividad (i , j)

Las variables de decisión para el problema son x_{ij} donde

x_{ij} = tiempo de duración de la actividad (i , j)

Entonces existe una varible de decisión x_{ij} para cada actividad, pero no lo hay par alos valores de i y j que no tienen una actividad correspondiente.

Para expresar el costo directo de la actividad (i, j) como una función (lineal) de X_{jj} denótese la pendiente de la línea que pasa por los puntos normal y de quiebre para la actividad (i , j) por

$$S_{ij} = \frac{C_{Dij} - C_{dij}}{D_{ij} - d_{ij}}.$$

K_{ij} como la intersección con el eje del costo directo de esta línea, como se muestra en la fig. 4, por tanto,

costo directo de la actividad (i , j) = K_{ij} + S_{ij} x_{ij},

en consecuencia,

costo directo total del proyecto = $\sum_{(i,j)} (K_{ij} + S_{ij}\, x_{ij}),$

en donde la sumatoria se extiende sobre todas las actividades (i , j). Ahora se puede establecer y formular matemáticamente el problema.

El problema: dado un tiempo T (máximo) de terminación del proyecto, selecciónese la x_{jj} que minimice el costo directo total del proyecto.

Formulación De Programación Lineal. Para tomar en cuenta el tiempo de terminación del proyecto en la formulación de programación lineal del problema, se necesita una variable más para cada evento. Esta variable adicional es

yk = tiempo más próximo (desconocido) para el evento k, el cual es una función determinística de X_{ij}.

Cada yk es una variable auxiliar, es decir, una variable que se introduce al modelo por ser conveniente en la formulación y que no representa una decisión. El método simplex trata a las variables auxiliares igual que a las variables de decisión (x_{ij}) normales.

Para ver cómo se introducen las yk a la formulación, considérese el evento 7 de la figura 1
Por definición, su tiempo más próximo es:
$y_7 = \text{máx} \{y_4 + x_{47}, y_5 + x_{57}\}$,
En otras palabras y_7 es la cantidad más pequeña tal que las dos restricciones siguientes se cumplen:

$y_4 + x_{47} < y_7$

$y_5 + x_{45} < y_7$,

por lo que estas dos restricciones se pueden incorporar directamente a la formulación de programación lineal (después de pasar y_7 al lado izquierdo para obtener la forma apropiada). Aún más, adelante se verá por qué la solución óptima que se obtiene con el método simples para el modelo completo hará de manera automática que el valor de y_7 sea la cantidad más pequeña que, satisface estas restricciones, por lo que no se necesitan más restricciones para incorporar la definición de y_7 al modelo.
Dentro del proceso e incorporación de estas restricciones para todos los eventos, se tiene que cada variable x_{ij} aparecerá en exactamente una restricción de este tipo,

$y_i + x_{ij} \leq y_j$,

que se puede expresar en la forma apropiada como

$y_i + x_{ij} - y_i \leq 0$

Para continuar con los preparativos para escribir el modelo completo de programación lineal, se etiquetan
Evento 1 = inicio del proyecto
Evento n = terminación del proyecto,
con lo que

$y_i = 0$

y_n = tiempo de terminación. .

Nótese también que $\sum K_{ij}$ es una constante fija que puede eliminarse de la función objetivo, de manera que minimizar el costo directo total para el proyecto es equivalente a maximizar $\sum(-S_{ij})x_{ij}$ Por tanto, el problema de programación lineal es encontrar las x_{ij} (y las y_k correspondientes) tales que

Maximizar $Z = \sum_{i,j}(-S_{ij})x_{ij}$,

Sujeta a:

$x_{ij} \geq d_{ij}$

$x_{ij} \leq D_{ij}$ Para todas las actividades (i , j)

$y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$

$y_n \leq T$.

Desde un punto de vista computacional, este modelo se puede mejorar algo al sustituir todas las x_{ij} por

$x_{ij} = d_{ij} + x'_{ij}$

en todo el modelo, para que el primer conjunto de restricciones funcionales ($x_{ij} \geq d_{ij}$) se sustituya por las restricciones de no negatividad

$x_{ij} \geq 0.$

Es conveniente también introducir restricciones de no negatividad para el resto de las variables:

$y_k \geq 0,$

aunque estas variables ya estaban forzadas a ser no negativas al establecer $y_1 = 0$, debido a las restricciones $x_{ij} \geq 0$ y $y_i \geq y_i + d_{ij} + x_{ij}$.

Una propiedad interesante de una solución óptima para este modelo es que (en circunstancias normales) toda trayectoria de la red será una ruta crítica que requiere un tiempo T, La razón es que una solución de este tipo satisface las restricciones $y_n \leq T,$ mientras que evita los costos adicionales en que se incurre por acortar el tiempo de cualquier trayectoria.

La clave de esta formulación es la manera en que se introducen las y_k al modelo mediante las restricciones $y_i + x_{ij} - y_j \leq 0$, con el fin de proporcionar los tiempos más próximos para los respectivos eventos (dados los valores de las x_{ij} en la solución básica factible actual). Como los tiempos más próximos se tienen que obtener en orden, todas estas y_k son necesarias nada más para obtener finalmente el valor correcto de y_n (para los valores actuales de las x_{ij}), reforzando así la restricción $y \leq T$. Sin embargo, obtener el valor correcto requiere que el valor de cada y_j (incluso el de y_n) sea la cantidad más pequeña que satisface todas las restricciones $y_i + x_{ij} \leq y_j$. Ahora se hará una descripción breve de por qué (en circunstancias normales) esta propiedad se cumple para una solución óptima.

Considérese una solución para las variables x_{ij} tal que toda trayectoria de la red es crítica y requiere un tiempo T. Si los valores de las y_k satisfacen la propiedad anterior, entonces las x_{ij} son los verdaderos tiempos más pr6ximos con $y_n = T$ exactamente y la solución completa para las x_{ij} y y_k satisface todas las restricciones. Sin embargo, si alguna y_i se hace un poco más grande, esto crearía una reacción en cadena en la que alguna y_j se tendría que hacer un poco más grande para satisfacer todavía las restricciones $y_i + x_{ij} \leq y_j$ etc., hasta que en última instancia, y_n deba hacerse un poco más grande y se viole la restricción $y_n \leq T$. La única manera de evitar esto con una y_i un poco más grande, es hacer que los tiempos de duración de algunas actividades (posteriores al evento i) sean un poco más pequeñas, aumentando con esto el costo. Por lo tanto, una solución óptima evitará que las y_k sean más grandes de lo necesario para satisfacer las restricciones $y_i + x_{ij} \leq y_j$.

El problema, como se estableció aquí, supone que se ha fijado una fecha de entrega específica T (tal vez por contrato) para la terminación del proyecto. En realidad, algunos proyectos no tienen una fecha de entrega, en cuyo caso no está claro el valor que debe asignarse a T en la formulación de programación lineal. En este tipo de situaciones, la decisión sobre T (que resulta ser la duración del proyecto en la solución óptima), de hecho depende de cuál es el mejor trueque entre el costo total y el tiempo total del proyecto. La información básica que se necesita para tomar esta decisión es cómo cambia el costo directo total mínimo al cambiar el valor de T en la formulación anterior, como se muestra en la figura 5. Esta información se puede obtener cuando se usa progranlflci6n lineal parametrica para obtener la solución óptima como una funci6n de T en todo el intervalo. Existen procedimientos aún más eficientes, para obtener esta información, que explotan la estructura especial del problema.

Elección entre PERT y CPM

La elección entre el enfoque de las tres estimaciones de PERTy el método de trueques entre el tiempo y el costo del CPM depende fundamentalmente del tipo de proyecto y de los objetivos gerenciales. El PERT es en particular apropiado cuando se maneja mucha incertidumbre al predecir los tiempos de las actividades y cuando es importante controlar de una manera efectiva la programación del proyecto; por ejemplo, la mayor parte de los proyectos de investigación y desarrollo caen dentro de esta categoría. Por otro lado, el CPM resulta muy apropiado cuando se pueden predecir bien los tiempos de las actividades (quizá con base en la experiencia) y cuando estos tiempos se pueden ajustar con facilidad (por ejemplo, si se cambian tamaños de brigadas), al igual que cuando es importante planear una combinación apropiada entre el tiempo y el costo del proyecto. Este último tipo lo representan muchos proyectos de construcción y mantenimiento.

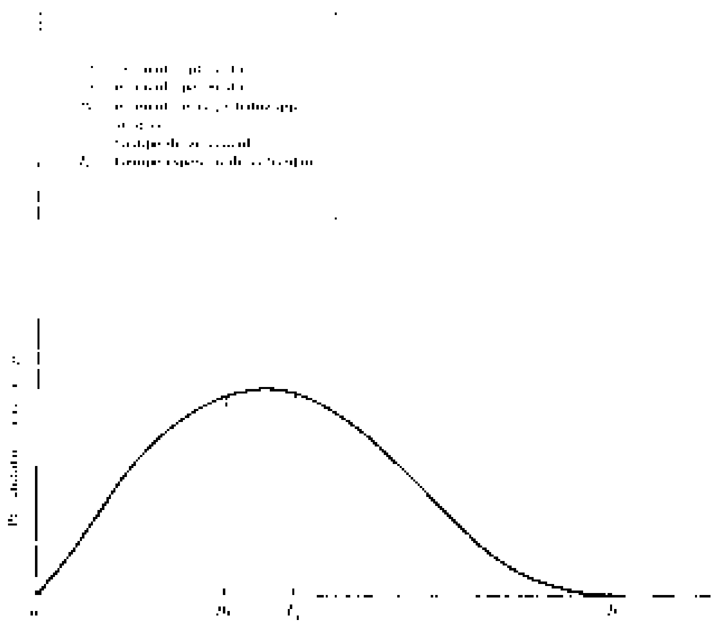
En la actualidad, las diferencias entre las versiones actuales de PERT y CPM no son tan marcadas como se han descrito. Muchas versiones de PERT permiten emplear una sola estimación (la más probable) para cada actividad y omiten así la investigación probabilística. Una versión llamada PERT/Costo considera también combinaciones de tiempo y costo en forma parecida al CPM.

Diferencias Entre PERT y CPM

La diferencia entre PERT y CPM es la manera en que se realizan los estimados de tiempo. E1 PERT supone que el tiempo para realizar cada una de las actividades es una variable aleatoria descrita por una distribución de probabilidad. E1 CPM por otra parte, infiere que los tiempos de las actividades se conocen en forma determinísticas y se puede variar cambiando el nivel de recursos utilizados.
La distribución de tiempo que supone el PERT para una actividad es una distribución beta. La distribución para cualquier actividad se define por tres estimados:

1. el estimado de tiempo más probable, m;
2. el estimado de tiempo más optimista, a; y
3. el estimado de tiempo más pesimista, b.

La forma de la distribución se muestra en la siguiente Figura. E1 tiempo más probable es el tiempo requerido para completar la actividad bajo condiciones normales. Los tiempos optimistas y pesimistas proporcionan una medida de la incertidumbre inherente en la actividad, incluyendo desperfectos en el equipo, disponibilidad de mano de obra, retardo en los materiales y otros factores.



Con la distribución definida, la media (esperada) y la desviación estándar, respectivamente, del tiempo de la actividad para la actividad Z puede calcularse por medio de las fórmulas de aproximación.

$$T_e(Z) = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\sigma(Z) = \frac{b - a}{6}$$

El tiempo esperado de finalización de un proyecto es la suma de todos los tiempos esperados de las actividades sobre la ruta crítica. De modo similar, suponiendo que las distribuciones de los tiempos de las actividades son independientes (realísticamente, una suposición fuertemente cuestionable), la varianza del proyecto es la suma de las varianzas de las actividades en la ruta crítica. Estas propiedades se demostrarán posteriormente. En CPM solamente se requiere un estimado de tiempo. Todos los cálculos se hacen con la suposición de que los tiempos de actividad se conocen. A medida que el proyecto avanza, estos estimados se utilizan para controlar y monitorear el progreso. Si ocurre algún retardo en el proyecto, se hacen esfuerzos por lograr que el proyecto quede de nuevo en programa cambiando la asignación de recursos.

Formulación de Redes para emplear Costos.

Ejemplo. Con los siguientes datos:

ACTIVI-	ACTIVIDAD	TIEMPO	TIEMPO	COSTO

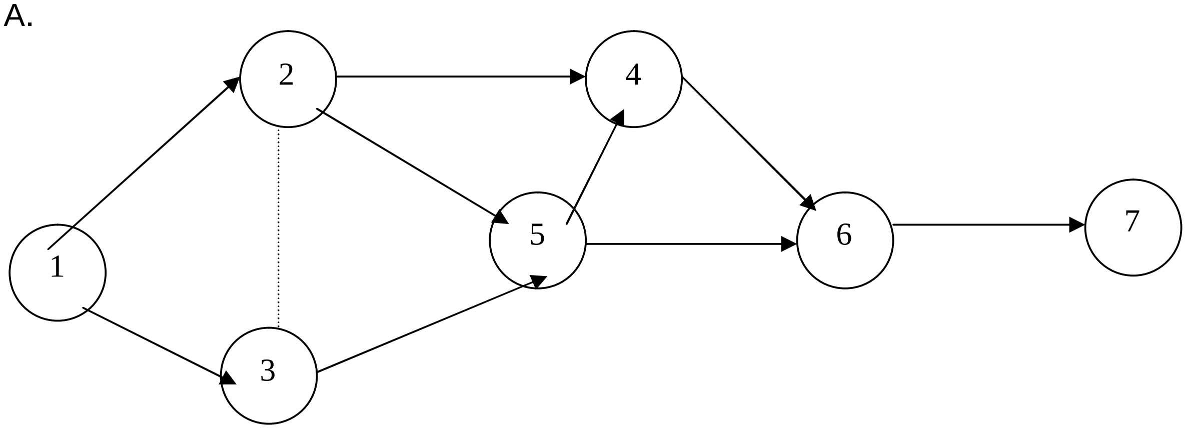
DAD	PRECEDENTE	NORMAL (DIAS)	CRASH (DIAS)	CRASH ($)
A		10	7	4
B		5	4	2
C	A,B	3	2	2
D	A,B	4	3	3
E	B	5	3	3
F	D,E	6	3	3
G	C,F	5	2	5
H	D,E	6	4	1
I	G,H	6	4	4

Costo por día normal $5.00.

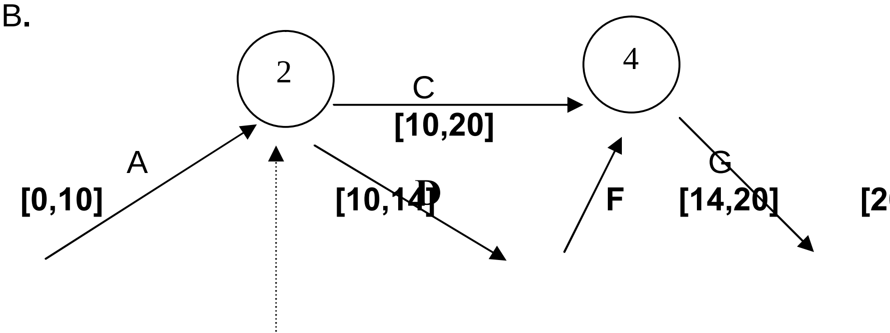
Se pide:

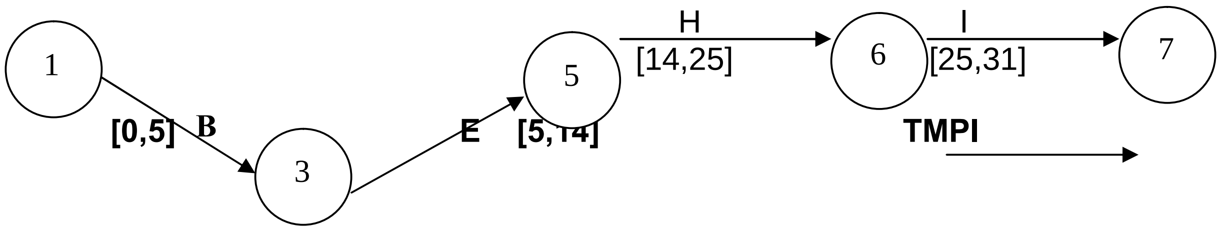
A. Trace la red.
B. Encuentre la Duración, el Costo del Proyecto con Tiempo Normal y la Ruta Crítica.
C. Encuentre la Ruta Crítica en Forma Tabular.
D. Encuentre la Duración del Proyecto con Tiempo Crash.
E. Formule el Modelo de Programación Lineal de la Red.

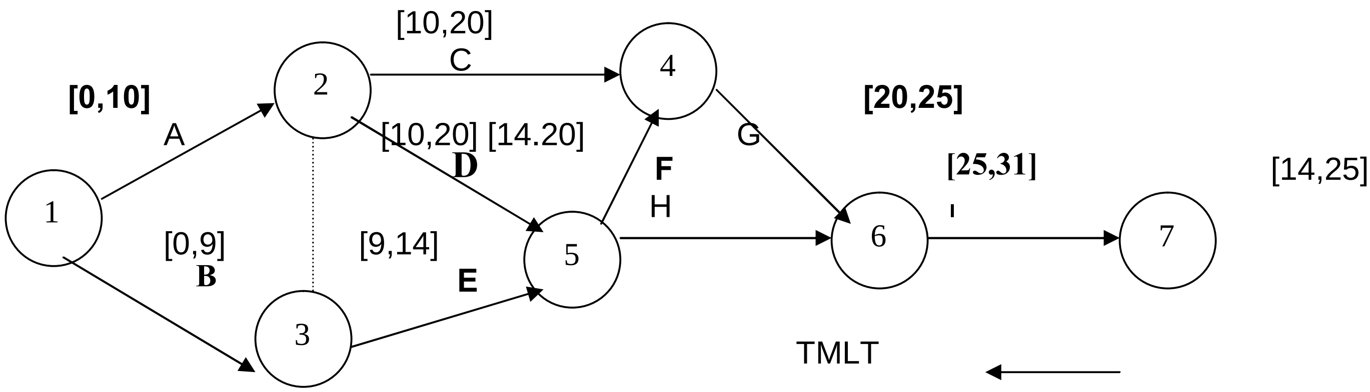
A.



B.







TIEMPO NORMAL:
A,C,G,I
10 + 3 + 5 + 6 = 24 DIAS

A,D,F,G,I
10 + 4 + 6 + 5 + 5 = 31 DIAS

A,D,H,I
10 + 4 + 6 + 6 = 26 DIAS

B,E,H,I
5 + 5 + 6 + 6 = 22 DIAS

RUTA CRITICA: <u>31 DIAS</u>

DURACION DEL PROYECTO CON TIEMPO NORMAL = <u>31 DIAS</u>
COSTO DEL PROYECTO CON TIEMPO NORMAL= 31(5)
COSTO DEL PROYECTO CON TIEMPO NORMAL= <u>$155.00</u>

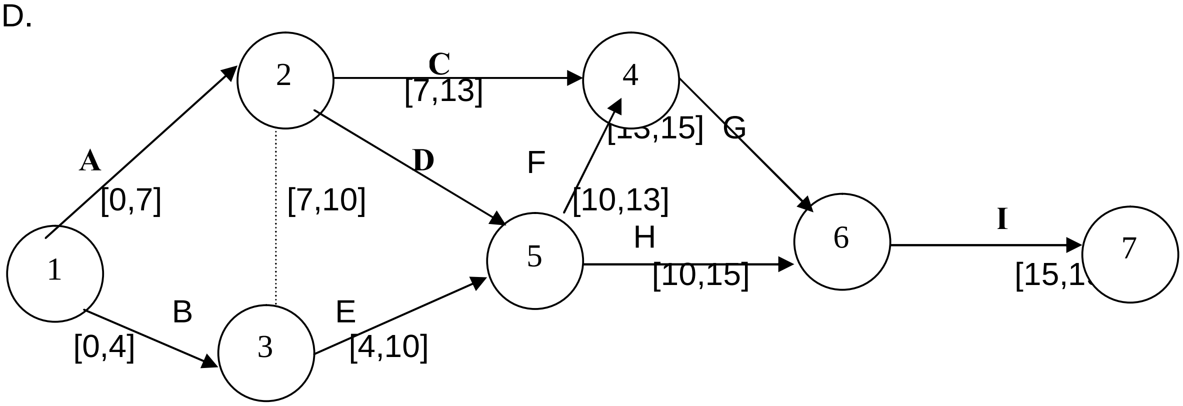
C.

ACTIVI-DAD	ACTIVIDAD PRECEDEN TE	TIEMPO NORMAL (DIAS)	TIEMPO DISPONI-BLE (DIAS)
A		10	3

B		5	1
C	A,B	3	1
D	A,B	4	1
E	B	5	2
F	D,E	6	3
G	C,F	5	3
H	D,E	6	2
I	G,H	6	2

ACTIVIDAD	EVENTO		TMPI		TMLT		HT	HL	RC
	i	f	i	f	i	f			
A	1	2	0	10	0	10	0	0	RC
B	1	3	0	5	0	9	4	0	
C	2	4	10	20	10	20	7	7	
D	2	4	10	14	10	14	0	0	RC
E	3	5	5	14	9	14	4	4	
F	5	4	14	20	14	20	0	0	RC
G	4	6	20	25	20	25	0	0	RC
H	5	6	14	25	14	25	5	5	
I	6	7	25	31	25	31	0	0	RC

D.



7 + 3 + 3 + 2 + 4 = 19 DIAS

B,E,F,G,I
4 + 3 + 3 + 2 + 4 = 16 DIAS

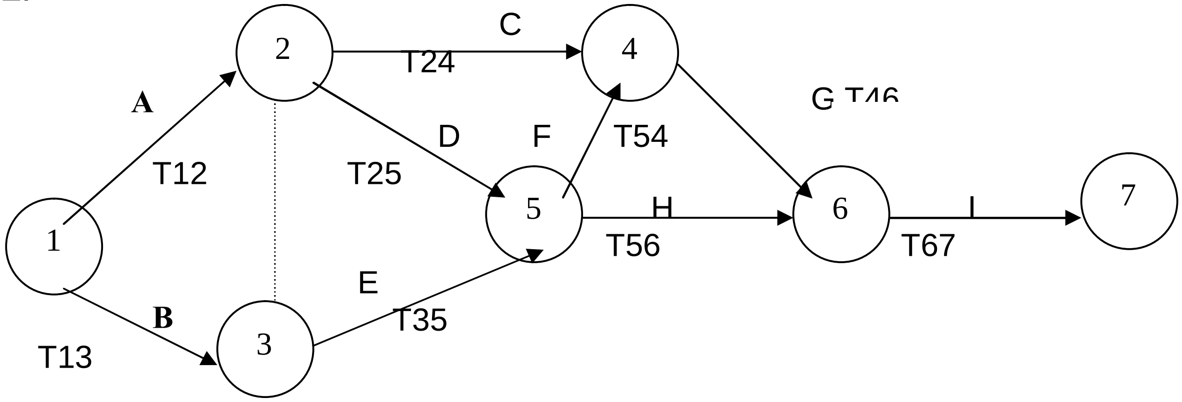
B,E,H,I
4 + 3 + 4 + 4 = 15 DIAS

RUTA CRITICA = <u>19 DIAS</u>

DURACION DEL PROYECTO = 19 DIAS

COSTO DEL PROYECTO CON TIEMPO = $152.00

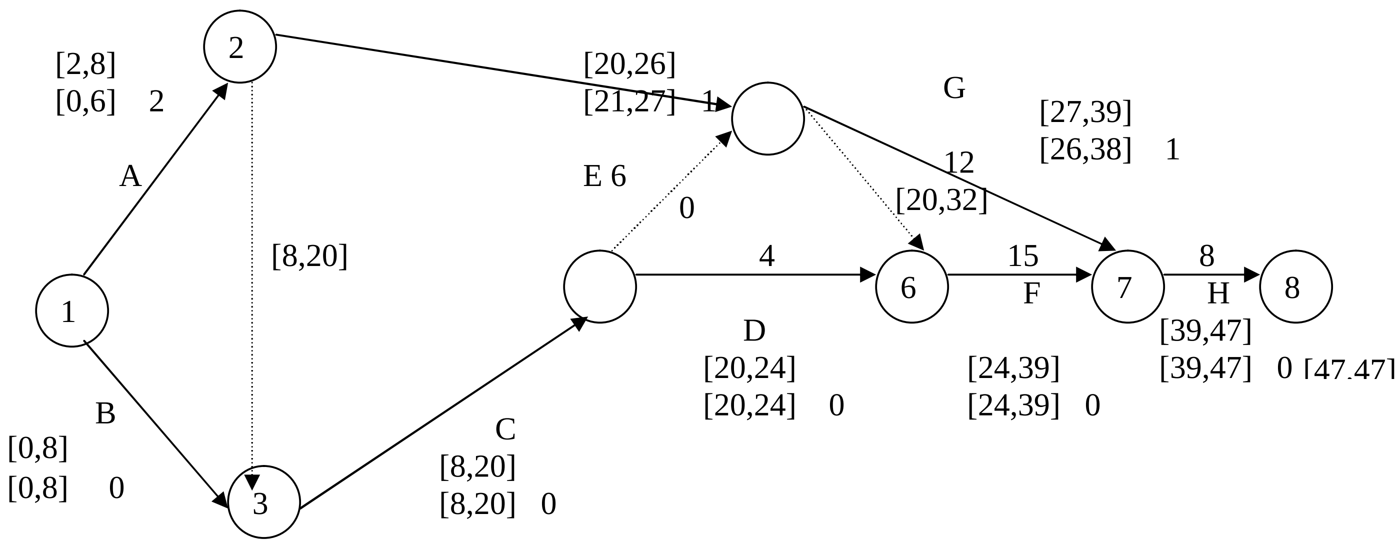
E.



Formulación de Redes para emplear Tiempo.

Una Universidad está evaluando la posible construción de un complejo edificacional para atletismo de propósitos múltiples para ampliar sus instalaciones. El complejo ofrecería un gimnasio nuevo para juegos intercolegiales de basquetbol, un mayor espacio de oficinas, salones e instalaciones intra-muros. Las actividades que habría que emprender antes de comenzar la construcción son las que semuestran enseguida, están dadas en semanas.

ACTIVI-DAD	DESCRIPCIÓN	ANTERIOR INMEDIATA	TIEMPO (SEMANAS)
A	Levantamiento topográfico del sitio de construcción.		6
B	Ejecución del diseño inicial.		8
C	Obtención de la aprobación del consejo.	A,B	12
D	Elección del arquitecto.	C	4
E	Fijación del presupuesto.	C	6
F	Finalización del diseño.	D,E	15
G	Obtención del financiamiento.	E	12
H	Contratación del constructor.	F,G	8



8 + 12 + 4 + 15 + 8= 47

Formulación de Redes .

1. Proyecto de Ampliación de un Centro Comercial.

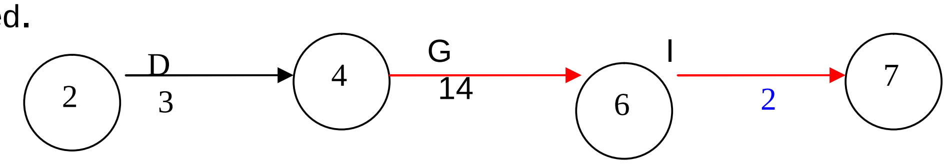
Perisur desea ampliar sus instalaciones y para ello a decidido contratar a la constructora ICA la cual rinde el informe de actividades en el sigienbte cuadro para determinar el tiempo que tardará en realizar el proyecto. Se pide:

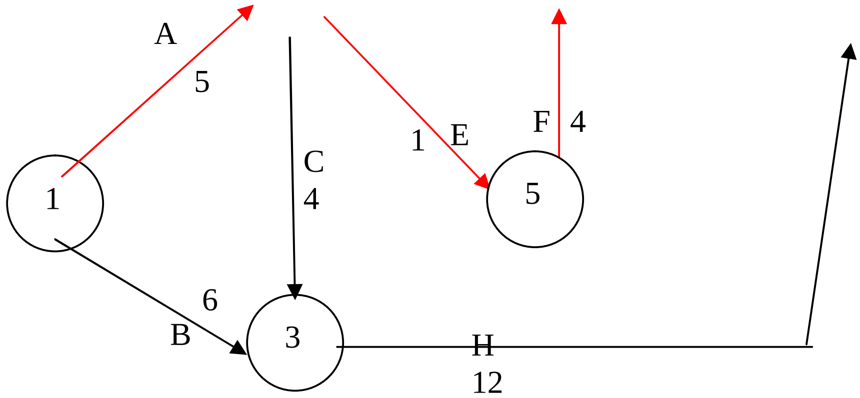
A. Trazar la Red.
B. Encontrar la Duración del Proyecto y la Ruta Crítica.
C. Encontrar la Ruta Crítica en Forma Tabular.

Con los siguientes datos

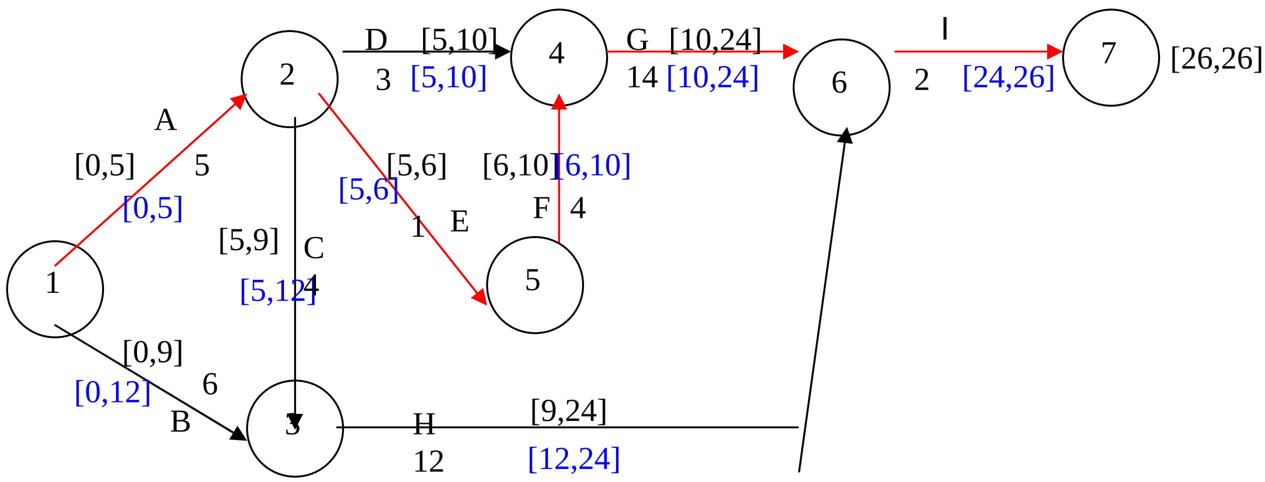
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	ANTECEDENTE	TIEMPO(SEM.)
A	Preparar dibujos		5
B	Identificar nuevos inquilinos		6
C	Desarrollar proyectos	A	4
D	Elegir contratistas	A	3
E	Preparar permisos	A	1
F	Obtener permisos	E	4
G	Construcción	D,F	14
H	Finiquitar contratos	B,C	12
I	Mudanza	G,H	2

A. Trazar la Red**.**





B. Encontrar la Duración del Proyecto y la Ruta Crítica**.**



→ Tiempo más tardado para iniciar la siguiente actividad.

← Tiempo más rápido de término de la siguiente actividad.

Ruta Crítica:

$\mathbf{1} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{2} \xrightarrow{\mathbf{E}} \mathbf{5} \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbf{4} \xrightarrow{\mathbf{G}} \mathbf{6} \xrightarrow{\mathbf{F}} \mathbf{7}$

A= 5
E= 1
F= 4
G= 14
J= 2
26 SEMANAS

INVENTARIOS

Objetivos particulares de la unidad.

Al terminar el aprendizaje de la unidad el estudiante conocerá y aplicará diversos modelos de inventarios en una empresa de compras o en producción.

Introducción

El control de inventarios es una parte importante en cualesquier empresa ya que se tenga un producto terminado o no, ocupa espacio, iluminación, aire acondicionado, un seguro y todo ello implica dinero, razones por lo que se requiere un buen manejo de inventarios.

En la mayoría de los negocios, los inventarios representan una inversión relativamente alta y producen efectos importantes sobre todas las funciones principales de la empresa. Cada función tiende a generar demandas de inventario diferentes. En:

Ventas: se necesitan inventarios elevados para hacer frente con rapidez a las exigencias del mercado.

Producción: Se necesitan elevados inventarios de materias primaras para garantizar la disponibilidad en las actividades de fabricación; y un “colchon” permisiblemente grande de inventarios de productos terminados facilitará niveles de producción estables.

Compras: Las compras elevadas minimizan los costos por unidad y los gastos de compras en general.

Financiación: los inventarios reducidos minimizan las necesidades de inversión (corriente de efectivo) y disminuyen los costos de mantener inventarios (almacenamiento, que se hagan viejos, riesgos, etc.).

Los Inventarios deben:

1. Planificar el nivel óptimo de inversión
2. A través del control, mantener los niveles óptimos tan cerca como sea posible de lo planificado.
3. Los niveles de inventarios tienen que mantenerse entre dos extremos: un nivel excesivo que causa costos de operación, riesgos e inversión insostenibles y un nivel inadecuado que tiene como resultado la imposibilidad de hacer frente rápidamente a las demandas de ventas y producción.
4. El profesional en ocasiones se enfrenta a la necesidad de tener que tomar decisiones con respecto a los inventarios y preguntarse ¿Cuánto debe tener y gastar en los inventarios? Y buscar la decisión adecuada.

Los inventarios son aquellos artículos a la mano que un cliente usará o comprará.

Definición dada por Eppen, en Investigación de Operaciones, Cap. 8: Los inventarios son los bienes ociosos almacenados en espera de ser utilizados

Los inventarios son las cantidades o los recursos utilizables que se encuentran almacenados en espera de ser utilizados en algún punto determinado del tiempo.

Existen muchos tipos de inventarios: de materia prima, de materiales en proceso, de productos terminados, de efectivo y hasta de individuos. Se pueden mantener inventarios por muchas razones. Algunos distribuidores tienen inventarios para poder atender de inmediato los pedidos de sus clientes. Ya que en muchas condiciones, el cliente preferirá hacer el pedido a quien tenga lo que necesita en el momento que el lo pide, más no es la única razón.

MODELOS DE INVENTARIOS

DETERMINISTICOS. En este tipo de modelo toda la información es conocida (tiempo, costo, cantidad, etc.), son aquellos en los cuales la demanda del artículo se conoce de antemano y la entrega se hace de inmediato.

PROBABILÍSTICOS. Parte de la información necesaria no se conoce con certeza. Se dice que se podrá necesitar, que podrá costar, etc.

MODELOS PARA LA TOMA DE DECISIONES.
Existen diferentes esquemas en la creación de modelos para la toma de decisiones. Una puede ser en pedir grandes cantidades a fin de disminuir los costos de los pedidos y la otra que consiste en pedir pequeñas cantidades para reducir costos cargados a los inventarios. Llevada al extremo cualquiera de esas rutas se tendrá un efecto desfavorable a las ganancias y la mejor solución en términos de utilidades e ingresos sobre los activos totales en un equilibrio.

COSTOS son los gastos ocasionados por el inventario.

1. Costos de hacer un pedido, una compra o de fabricar o producir. Son los costos fijos (administración: sueldos y salarios, papelería, transporte, etc.) en los que se incurre al colocar un pedido. Puede ser directamente proporcional a la cantidad pedida o producida= C_2
2. Costos de almacenamiento, mantener o conservación. Son los asociados con la conservación de un nivel determinado de inventarios durante un periodo específico, hasta que se venda o se use. Puede incluir el costo del capital paralizado, del espacio, de seguro, de la protección y los impuestos atribuidos al almacenamiento. C_3
3. Costos de falta de existencia o déficit. Son aquellos en los que se incurre al no poder satisfacer una demanda. La magnitud del costo depende de si se permiten los pedidos retroactivos. Si éstos no se permiten, entonces un agotamiento de inventario dará como resultado la pérdida permanente de ventas para los artículos que se demandaban y que no estaban disponibles. $=C_4$
4. Costo Por unidad. En la producción, el costo de una unidad está integrada por elementos tales como la mano de obra directa e indirecta, materiales directos e indirectos y gastos generales. Cuando se copra el componente del costo es el precio de compra de una unidad. C_1
5. Costo total del ingreso puede incluirse o no en el modelo. Si se supone que tanto el precio como la demanda del producto no están bajo el control de la compañía, el ingreso por las ventas es independiente de la política de inventarios de la empresa y puede depreciarse. Sin embargo, si se desprecia el ingreso en el modelo, entonces debe incluirse la perdida de ingreso en el costo de penalización por demanda no satisfecha, siempre que la firma no pueda satisfacer la demanda y pierda la venta C_T
6. Valor de salvamento de un artículo es el valor de un artículo rezagado a la terminación del período de inventario. Si se desarrolla la política de inventario para un número indefinido de periodos y no existe obsolescencia, no tienen artículos rezados. Lo que queda al final de un período es la cantidad disponible al principio del periodo siguiente.

7. Tasa de descuento. Toma en consideración el valor de dinero con el tiempo. Cuando una firma paraliza el capital en el inventario, no puede utilizar este dinero para otros fines, mas sin embargo descontándolo podrán invertidlo y asi obtener beneficios.

MODELO DETERMINÍSTICO. MODELO DEL LOTE ECONOMICO DE PEDIDO O LA CANTIDAD ECONOMICA DE PEDIDO.
El objetivo de este modelo es determinar la cantidad óptima de pedido “Q” y el punto de reorden de manera que se minimicen los costos totales de los inventarios.

Conceptos del modelo básico de inventarios CEP.
1. Se conoce la demanda con certidumbre y es constante en el tiempo
2. El tiempo de adelanto o espera es cero; es decir, un pedido se recibe en el momento en que se ordena.
3. Se emplea un sistema de punto de orden y los inventarios se revisan en forma continua
4. El inventario ser reabastece cuando ha llegado exactamente al nivel de cero. No se utiliza existencia de seguridad y no se permiten agotamientos (carencia de existencias)
5. El reabastecimiento de los inventarios es instantáneo, el pedido se recibe en un solo lote
6. La cantidad de pedido es constante para cada orden
7. El problema implica un sistema de etapa única
8. Se considera un horizonte de tiempo infinito y continuo
9. Se considera que todos los costos son constantes en el horizonte e infinito en el tiempo.

MODELO DE COMPRA SIN DEFICIT
1. $Q = \sqrt{\dfrac{2C_2D}{C_3}} = \mathrm{Im} = inventario\ \ máximo = unidades$ Cantidad óptima o económica de pedido
2. $C_{1p} = C_1Q \cos to\ \ por\ \ unidad\ \ \ por\ \ periodo$
3. Costo total anual $C_T = C_1D + C_2\dfrac{D}{Q} + C_3\dfrac{Q}{2}$
4. Costo total por periodo $C_p = C_1Q + C_2\dfrac{D}{Q} + C_3\dfrac{Q}{2}$
5. Demanda de un artículo en unidades por año $D = \dfrac{Q}{t}$
6. Tiempo $t = \dfrac{Q}{D}$
7. Número de pedidos por año $N = \dfrac{D}{Q}$

Resuelve los siguientes Problemas.

1. Zara, tienda departamental dice que la demanda de una prenda infantil es de 36000 unidades al año. El costo de almacenamiento por unidad es de $2.4 por año y el costo de ordenar un pedido es de $800. No se permite déficit y la tasa de reemplazo es instantánea. Da:
   a) La cantidad óptima de pedido:
   $Q = \sqrt{\dfrac{2C_2D}{C_3}} = \sqrt{\dfrac{2(800)(36000)}{2.4}} = 4898.97 \cong 4899 unidades$ recuerda que no se pueden producir o comprar partes de una unidad por lo que se debe redondear. Puede ser al inmediato superior o inferior.
   b) El costo total por año si el costo de una unidad es de $2.0
   $$C_T = C_1D + C_2\frac{D}{Q} + C_3\frac{Q}{2} = (2)(36000) + (800)(\frac{36000}{4899}) + (2.4)(\frac{4899}{2}) = \$83757.58$$
   c) El número de pedido por año $N = \dfrac{D}{Q} = \dfrac{36000}{4899} = 7.34$ pedidos por año.
   d) El tiempo entre pedidos, en días. $t = \dfrac{Q}{D} = \dfrac{4899}{36000} = 0.136 años$ cada 49 ó 50 días.

MODELO DE PRODUCCIÓN SIN DEFICIT

a) $C_p = C_1Q + C_2 + C_3\dfrac{Q^2}{2D}(1-\dfrac{D}{R})$ Costo por periodo

b) $C_T = C_1D + C_2\dfrac{D}{Q} + C_3\dfrac{Q}{2}(1-\dfrac{D}{R})$ Costo total

c) $\dfrac{\mathrm{Im}}{2} =$ inventario promedio por periodo

d) $\mathrm{Im} = t_1(R-D) = \dfrac{Q}{R}(R-D) = Q(1-\dfrac{D}{R})$

e) R = tasa de manufacturación o producción mensual

f) $t_1 + t_2 = \dfrac{Q}{D}$ Tiempo entre corridas $t_1 = \dfrac{Q}{R}$

g) Cantidad óptima de pedido $Q = \sqrt{\dfrac{2C_2D}{C_3(1-\dfrac{D}{R})}}$

2. La demanda de un artículo en una determina empresa es de 36000 unidades al año, y la empresa puede producir ese artículo a una tasa de 6000 unidades por mes. El costo de organizar una corrida de producción es de $1000 y el costo de almacenamiento de una unidad al mes es de $0.3. Determina la cantidad óptima que debe producirse y el costo total por año, considerando que el costo de una unidad es de $4.0

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3(1-\dfrac{D}{R})}} = \sqrt{\frac{2(1000)(36000)}{(0.3)(12)(\ 1-\dfrac{36000}{(6000)(12)}\ )}} = 6325 unidades$$

$$C_T = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}(1 - \frac{D}{R}) = 4(36000) + 1000\left(\frac{36000}{6325}\right) + (0.3)(12)\left(\frac{6325}{2}\right)\left(1 - \frac{36000}{6000(12)}\right)$$
$$= \$155384.19$$

MODELO DE COMPRA CON DEFICIT

$C_4 =$ costo de déficit de una unidad al año. S = número de unidades agotadas

$\mathrm{Im} = Q - S$ Inventario máximo

$\frac{S}{2} =$ número promedio de unidades agotadas por periodo

tiempo $t_1 = \frac{t(Q-S)}{Q} = \frac{Q-SQ}{QD}$ $t_2 = \frac{tS}{Q} = \frac{SQ}{QD}$

Unidades agotadas $S = Q\left(\frac{C_3}{C_3 + C_4}\right)$

$$C_T = C_1 Q + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \left(\frac{Q-S}{2Q}\right)^2 + C_4 \left(\frac{S^2}{2Q}\right)$$ Costo parcial

$$C_T = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \left(\frac{Q-S}{2Q}\right)^2 + C_4 \left(\frac{S^2}{2Q}\right)$$ COSTO TOTAL

Cantidad óptima de compra $Q = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_3}} \sqrt{\frac{C_3 + C_4}{C_4}}$

Unidades agotadas ó déficit $S = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_4}} \sqrt{\frac{C_3}{C_3 + C_4}}$

3. Zara, tienda departamental dice que la demanda de una prenda infantil es de 36000 unidades al año. El costo de almacenamiento por unidad es de \$2.4 por año y el costo de ordenar un pedido es de \$800. El costo por déficit es de \$10 por unidad por año.
   a) Calcula la cantidad óptima de compra
   $$Q = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_3}} \sqrt{\frac{C_3 + C_4}{C_4}} = \sqrt{\frac{2(800)(36000)}{2.4}} \sqrt{\frac{2.4 + 10}{10}} = 5455.27 unidades \cong 5456 unidades$$

   b) Número de unidades agotadas
   $$S = Q\left(\frac{C_3}{C_3 + C_4}\right) = 5456\left(\frac{2.4}{2 - 4 + 10}\right) = 1056 unidades$$
   c) Inventario máximo: $\mathrm{Im} = Q - S = 5456 - 1056 = 4400u$

MODELO DE MANUFACTURACIÓN CON DEFICIT

$$C_P = C_1 Q + C_2 + C_3 (t_1 + t_2)\frac{\mathrm{Im}}{2} + C_4 (t_3 + t_4)\frac{S}{2}$$ costo parcial

$$C_T = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + \frac{C_3}{2Q}\left[Q\left(1-\frac{D}{R}\right) - S\right]\left(\frac{R}{R-D}\right) + \left(\frac{C_4 S^2}{2Q}\right)\left(\frac{R}{R-D}\right)$$ costo total anual

$\mathrm{Im} = t_1 (R-D)$ inventario máximo $\mathrm{Im} = t_2 D$

tiempo entre producción $t_1 + t_4 = \dfrac{Q}{R}$ $t_1 + t_4 = S\left(\dfrac{1}{R-D} + \dfrac{1}{D}\right)$

$$t_1 + t_2 = \frac{\mathrm{Im}}{R-D} + \frac{\mathrm{Im}}{D} = \left[Q\left(\frac{R-D}{R}\right) - S\right]\left(\frac{1}{R-D} + \frac{1}{D}\right)$$

Número de unidades agotadas $S = \sqrt{\dfrac{2C_2 D}{C_4}}\sqrt{\dfrac{R-D}{R}}\sqrt{\dfrac{C_3}{C_3 + C_4}}$

Cantidad óptima de manufactura $Q = \sqrt{\dfrac{2C_2 D}{C_3\left(1-\frac{D}{R}\right)}}\sqrt{\dfrac{C_3 + C_4}{C_4}}$

4. Suponer que la empresa "La gran G"del puede manufacturar uno de sus productos a una tasa de 6000 unidades por mes. La demanda de ese producto es de 36000 unidades al año Si todos los costos de una corrida de producción son de \$1000; el costo de almacenamiento de una unidad al mes es de \$0.3, el costo de una unidad es de \$4 y el costo de una unidad agotada es de \$40. Calcula:
   a) La cantidad óptima que debe manufacturarse

   $$Q = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_3\left(1-\frac{D}{R}\right)}}\sqrt{\frac{C_3 + C_4}{C_4}} = \sqrt{\frac{2(1000)(36000)}{(0.3)(12)\left(1-\frac{36000}{(6000)(12)}\right)}}\sqrt{\frac{(0.3)(12)+40}{40}} = 6602.83 \cong 6603u$$

   b) El costo total óptimo. Para calcular el costo total se deben calcular primeramente el número de unidades agotadas:

   $$S = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_4}}\sqrt{\frac{R-D}{R}}\sqrt{\frac{C_3}{C_3 + C_4}} = \sqrt{\frac{2(2000)(36000)}{40}}\sqrt{\frac{72000 - 36000}{72000}}\sqrt{\frac{3.6}{3.6 + 40}}$$
   $$\cong 273u$$

   c) El inventario máximo $\mathrm{Im} = Q - S = 6603 - 273 = 6330u$
   d) El tiempo (en días) entre corridas de producción

   $$t_1 + t_4 = \frac{Q}{R} = \frac{6603}{(12)(6000)} = 0.0917\,años$$
   $$(0.0917\,años)(365\,días) \cong 33\,días$$

   e) El tiempo (en días) entre órdenes de manufacturación

   $$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{Q}{D} = \frac{6603}{36000} = 0.1834\,años.$$
   $$(0.1834\,años)(365\,dias) \cong 67\,días$$

UNIDAD V. **ÁRBOLES DE DECISIÓN**.

Objetivos particulares de la unidad

Al finalizar la unidad el estudiante podrá tomar una decisión por medio de esta herramienta. Aprenderá a construir un árbol de decisiones así como formular una matriz de pagos.

5.1. Matriz de Pago

5.2 Árbol de decisiones: estructura componentes y esquema

Introducción:

Todos los días la mayoría de las personas tienen que tomar decisiones. La mayoría de estas pueden no tener importancia y son habituales. En ocasiones, se toman decisiones importantes que pueden tener efectos inmediatos o a largo plazo sobre nuestras vidas. Como la unión (matrimonio o no) de una pareja, a que escuela inscribirse, si estudiar o trabajar, que oferta de trabajo aceptar, si se debe rentar o comprar una casa, o si su compañía debe aceptar una proposición de fusión, éstas si son decisiones importantes para las cuales es necesario tomar la respuesta correcta. Pero frecuentemente, estas decisiones se hacen en base a emociones o intuición. Lo que puede darnos una resultado erróneo.

Existen varias técnicas o herramientas que pueden ayudarnos con las respuestas adecuadas. Una de ellas es el Árbol de decisiones o Análisis de Decisiones o Teoría de Decisiones para determinar estrategias óptimas cuando existen diversas alternativas para tomar una decisión. Por ejemplo cuando se desea lanzar al mercado un nuevo producto derivado de la leche, se tiene que tomar decisiones como y en que condiciones para que pueda ser aceptado en el mercado como consecuencia, la demanda del producto deberán ser evaluados.

Un árbol de decisión es un método gráfico que expresa, en orden cronológico, las acciones alternativas viables para el tomador de decisiones y las opciones que la suerte o el azar determina. Los árboles de decisión consisten en nodos y ramas.

Un árbol de decisión proporciona una forma para desplegar visualmente el problema y después organizar el trabajo de cálculo. Son especialmente útiles cuando debe tomarse una serie de dos decisiones. Se representan gráficamente de la lógica de las probabilidades aplicadas a las alternativas de decisión.

Se llama árbol de decisión, porque se ve como un árbol, aunque se representa horizontalmente por conveniencia. El tronco del árbol es el punto de partida de la decisión. Las ramas de éste comienzan con la probabilidad del primer evento. La probabilidad de cada evento produce dos o más efectos posibles, algunos de los cuales conducen a otros eventos de probabilidad y a puntos de decisión subsecuentes.

Matriz de Pagos.

Es un conjunto bidimensional de cifras ordenadas en renglones y columnas, en la que cada renglón representa una estrategia disponible y cada columna representa el estado de la naturaleza. La anotación que se encuentra en la intersección de cada renglón y cada columna es pago, o la medida de la utilidad del resultado específico que se obtiene para cada estrategia y para cada estado de la naturaleza. Esencialmente la matriz de pagos contiene todos los resultados posibles de un problema de negocios. El problema consiste en determinar cual estrategia es mejor en vista de los estados de la naturaleza existente o posible.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. Un procesador de alimentos que cultiva sus propias cosechas, basada en la experiencia pasada de la empresa con siembra de tres tipos de cosecha en cierta zona del país, se ha obtenido la siguiente matriz de pagos en los últimos años para los tres estados de la naturaleza: N_1 = buen tiempo; N_2 = tiempo variable y N_3 = mal tiempo.

		ESTADOS DE LA NATURALEZA		
		N_1	N_2	N_3
PROBABILIDAD		0.25	0.5	0.25
	S_1	\$40,000	\$60,000	\$10,000
ESTRATEGIAS	S_2	\$50,000	\$40,000	\$15,000
	S_3	\$60,000	\$20,000	\$12,000

¿Cuál estrategia es la mejor?

ES_1 = 40,000(.25) + 60,000(.50) + 10,000(.25)
ES_1 = 10,000 + 30,000 + 2,500
<u>ES_1 = \$42,500.00</u>

ES_2 = 50,000(.25) + 40,000(.50) + 15,000(.25)
ES_2 = 12,500 + 20,000 + 3,750
<u>ES_2 = \$36,250.00</u>

ES_3 = 60,000(.25) + 20,000(.50) + 12,000(.25)
ES_3 = 15,000 + 10,000 + 3,000

ES3 = $28,000.00

Respuesta: La primera estrategia es la mejor porque es la que nos da el valor esperado mayor.

2. La panadería PANMEX prepara todos los días su famoso pan. Este se vende a un peso la pieza cuando esta recién hecho y cuesta $0.50 prepararlo. El pan que no se vende se lleva a la mesa de descuento en donde se vende a $0.50 la pieza. Aún a ese precio, la mitad del pan de la mesa de descuento no se vende y hay que retirarlo.

El problema de la panadería es decidir cuántas piezas de pan en un día típico hay que preparar. La historia dice que la cantidad de pan ha sido la que se muestra en la siguiente tabla:

DEMANDA EN DOCENAS DE PAN	PROBABILIDAD
3	0.1
4	0.4
5	0.4
6	0.1
TOTAL	1.00

Los problemas de PANMEX se pueden analizar mediante la matriz de pagos que se muestra a continuación:

			E V E N T O S			
			DEMANDA DE PAN			
			3 DOCENAS 0.1	4 DOCENAS 0.4	5 DOCENAS 0.4	6 DOCENAS 0.1
ALTERNA-		3 DOCENAS	18	18	18	18
TIVAS DE		4 DOCENAS	15	24	24	24
DECISION	PREPA-RAR	5 DOCENAS	12	21	30	30
		6 DOCENAS	9	18	27	26

Las alternativas de decisión son las diferentes cantidades de docenas en piezas de pan que pueden prepararse. Los eventos y sus probabilidades se pueden basar en los datos históricos. La decisión óptima se puede identificar usando el concepto de valor esperado.

E(Preparar 3 docenas) = 18(0.1) + 18(0.4) + 18(0.4) + 18(0.1)
E(Preparar 3 docenas) = 1.80 + 7.20 + 7.20 +1.80
E(Preparar 3 docenas) = $18.00
E(Preparar 4 docenas) = 15(0.1) + 24(0.4) + 24(0.4) + 24(0.1)
E(Preparar 4 docenas) = 1.50 + 9.60 + 9.60 + 2.40
E(Preparar 4 docenas) = $23.10

E(Preparar 5 docenas) = 12(0.1) + 21(0.4) + 30(0.4) + 30(0.1)
E(Preparar 5 docenas) = 1.20 + 8.40 + 12.00 + 3.00
E(Preparar 5 docenas) = $24.60

E(Preparar 6 docenas) = 9(0.1) + 18(0.4) + 27(0.4) + 26(0.1)
E(Preparar 6 docenas) = 0.90 + 7.20 + 10.80 + 3.60
E(Preparar 6 docenas) = $22.50

Respuesta. De este análisis se puede observar que a la panadería PANMEX le conviene preparar 5 docenas de pan al día porque es cuando el valor esperado es mayor.

En tanto, a ingresos y costos, si de las 5 docenas de piezas de pan preparados al día, tan sólo se venden 4 docenas y entonces sus ingresos serían:

I = (1)(4)(12) + (0.50)(1/2)(12)
I = (1)(48) +(0.50)(0.5)(12)
I = 48 + (0.50)(6)
I = 48 + 3
I = $51.00

En cuanto a los costos las 5 docenas cuestan $0.50 por pieza, se tiene:

C = (5)(12)(0.50)
C = (5)(6)
C = $30.00

De esta manera, las ganancias de PANMEX son:

G = 51 – 30
G = $21.00

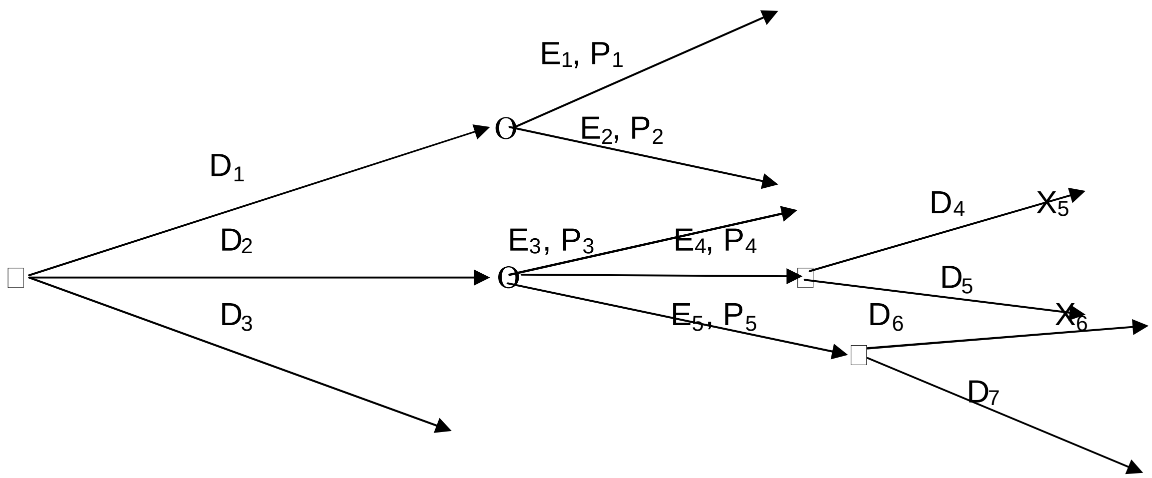
5.5. **Árbol de Decisiones**.

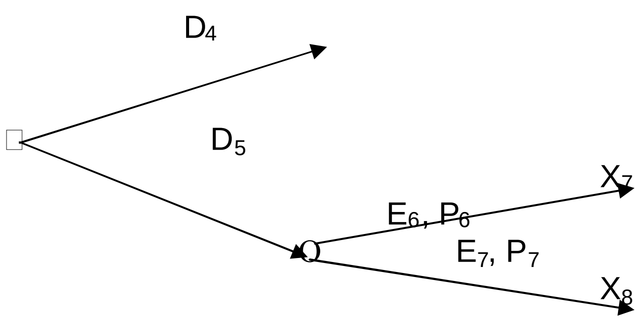
Ya se mencionó que es un recurso gráfico para analizar decisiones bajo riesgo, problemas en los que se han especificado las probabilidades de los estados de la naturaleza. Una forma clara y sencilla de estructurar el proceso de toma de decisiones es por medio de un árbol de decisión.

Esquema de un Árbol de Decisiones.

Segundo Punto de Decisión.

Primer Punto de Decisión.





Donde:

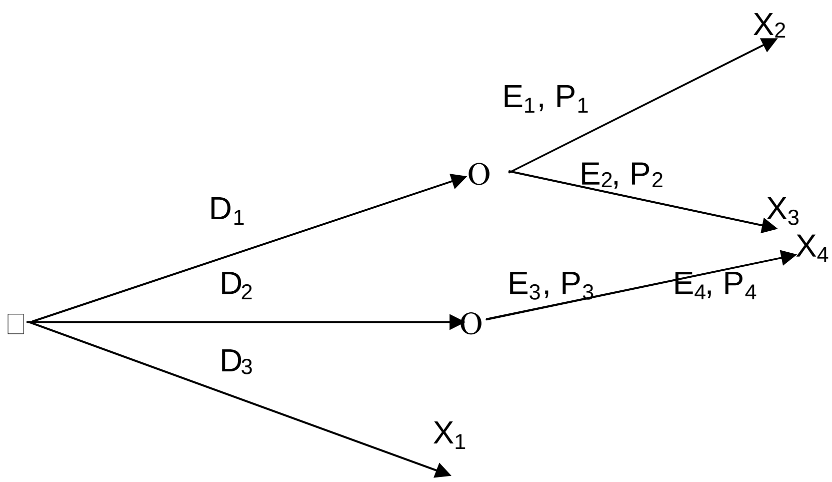
D_1, D_2, D_3, D_4 .- Representan el primer punto de decisión (debe hacerse una decisión entre tales alternativas).

□.- Representa todos los puntos de decisión.

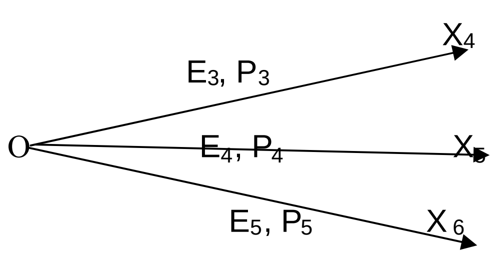
E_1, E_2, E_3, E_4, E_5.- Representan los eventos que pueden ocurrir como resultado del primer conjunto de decisiones.

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.- Representan las respectivas probabilidades.

O.- Representa las probabilidades e indica aquellas partes del proceso de toma de decisiones en las que ocurre algún estado de la naturaleza.



Obsérvese, que si ocurren los eventos E_1, E_2 y E_3, los resultados se conocen con certidumbre y no se requiere ninguna decisión. Estos resultados están dados por X_2, X_3 y X_4, respectivamente.

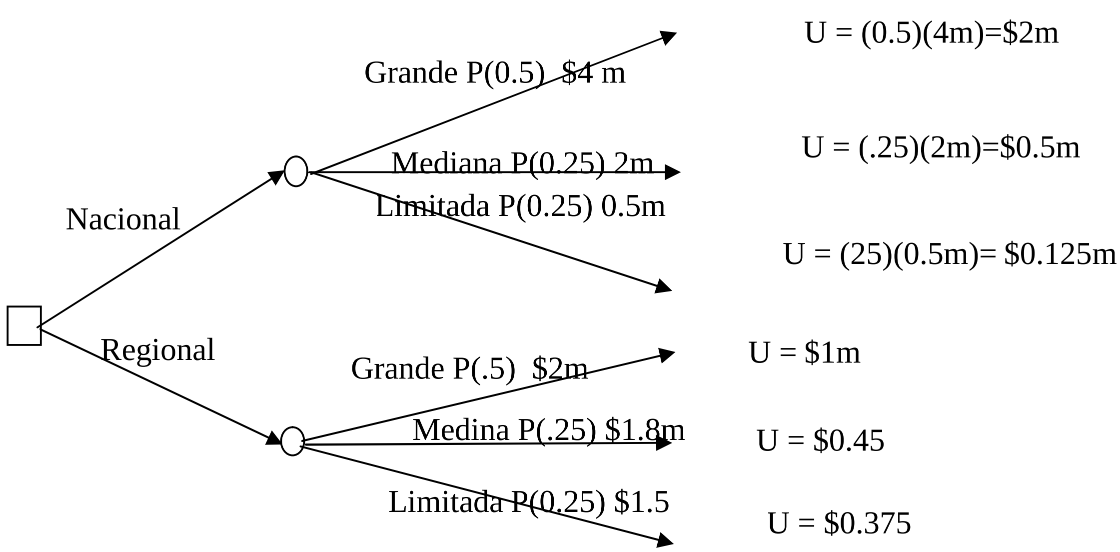


ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

1. “Pert” desea decidir si continuará con la distribución regional de un producto o si se lanzará a la distribución nacional. Esto representa un punto de decisión para la Compañía. Los eventos de probabilidad que afectan a la decisión de distribución nacional son si habrá una demanda nacional grande para el producto, una de manda media o una demanda nacional limitada. Si hay una demanda grande, se puede espera una ganancia de $4 millones, mientras que pueden esperarse $2 millones y $0.5 millos de utilidades para las demandas media y limitada, respectivamente. Los factores de probabilidad son 0.5, 0.25 y 0.25 respectivamente. Si la firma continúa con la distribución regional pueden predecirse tres pagos mas. Si la demanda regional es grande, la empresa puede lograr una utilidad de $2 millones. Por otra lado, si la demanda regional es median y si es limitada puede obtener $1.8 y 1.5 respectivamente. Que decisión debe tomar Pert.

Solución

Acción Evento Utilidad



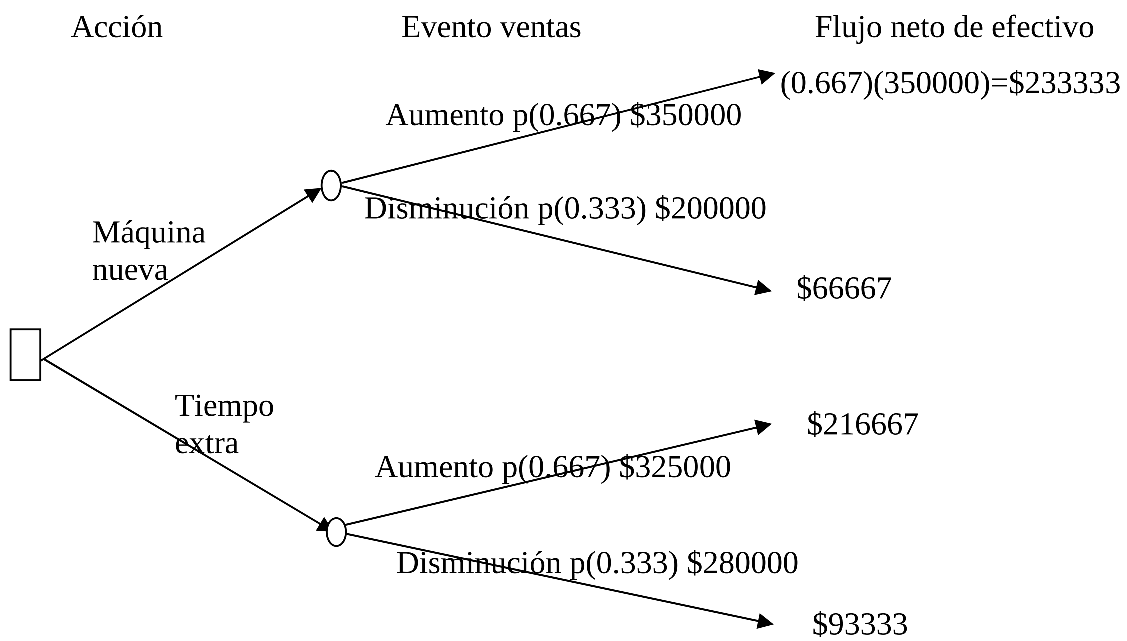
Observamos en el diagrama que le conviene la distribución a nivel nacional porque con una demanda obtiene mayor utilidad.

2. Una empresa manufactura partes componentes para una industria creciente. Actualmente hay cinco máquinas automáticas que funcionan a toda capacidad para la fabricación de uno de sus productos. La demanda de las ventas ha estado aumentando para ese producto. El administrador quiere tomar una decisión si habrá que instalar una máquina automática o pagar tiempo extra a sus empleados. Después un cuidadoso análisis de las condiciones del mercado, se llegó ala cuerdo de que hay una probabilidad de 0.667 de que aumenten el 25% la ventas de ese producto dentro de un año, y que hay una probabilidad de 0.333 de que las ventas disminuya hasta un 5%.

Actualmente y debido a su crecimiento, la empresa ha forzado su capacidad de trabajo, lo que ha dado por resultado una difícil situación de efectivo. Se decidió expresar todas las cifras en términos del flujo neto de efectivo para la empresa. Un cuidadoso análisis de los datos demostró que un 25% de aumento de las ventas daría por resultado un flujo de efectivo de $350000 para el nuevo equipo comparado con un flujo de efectivo de $325000 para tiempo extra. Un análisis semejante mostró que sus disminución de 5% en las ventas causaría un flujo neto de efectivo de $200000 para nuevo equipo comparado con $280000 la alternativa del tiempo extra.

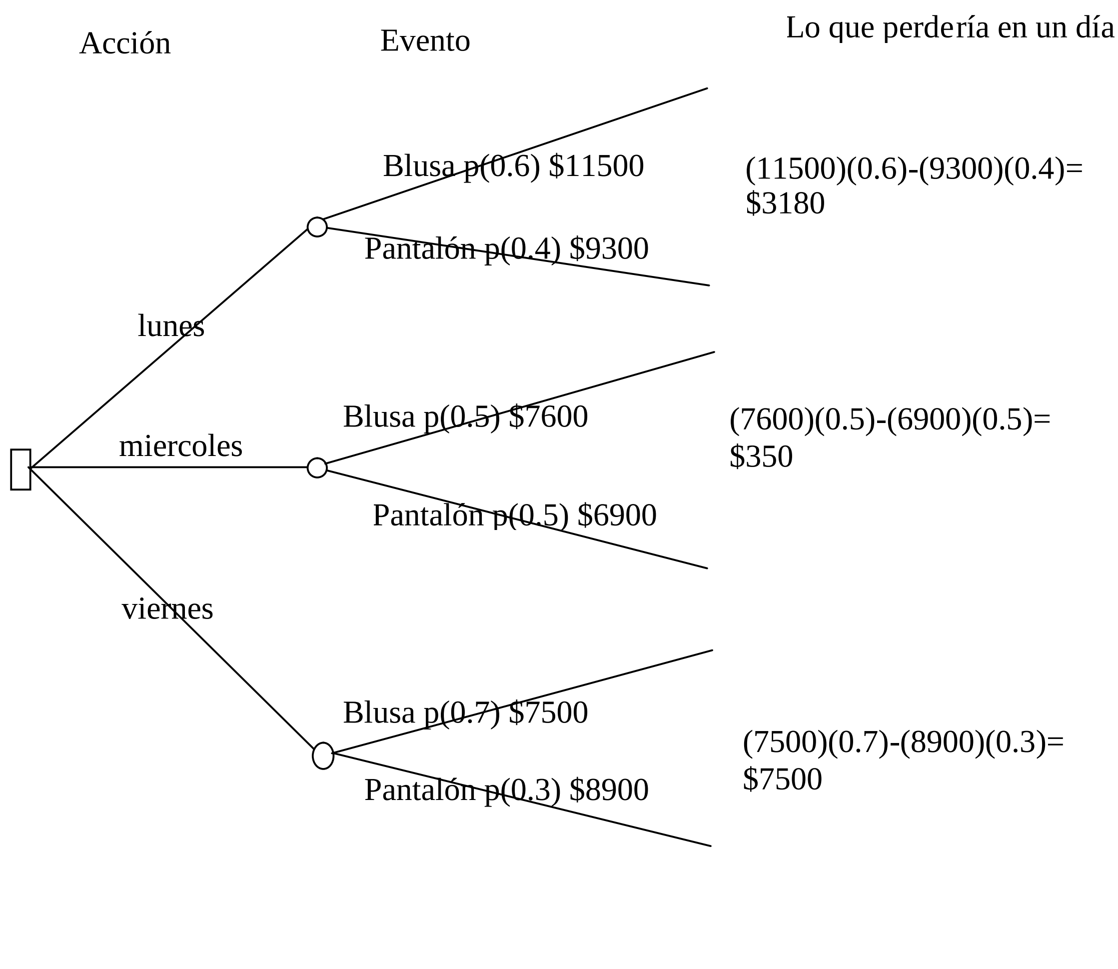
Cual es la mejor alternativa ¿comprar la máquina nuevo o el tiempo extra?

Respuesta: De acuerdo al árbol de decisiones le conviene más el tiempo extra porque el flujo de efectivo es menor.



3. Un almacén de ropa que vende pantalones y blusas marca “L” debe suspender labores un día a la semana, le han indicado que debe ser lunes miércoles o viernes. Debe decir que día cerrará sin que le afecte demasiado. El lunes tiene la probabilidad de vender 60% de de blusas y utilidades $11500 y un 40% de pantalones que le producirán $9300 de ganancias. El miércoles la probabilidad de vender blusas es del 50% con utilidades de $7600% y 50% de pantalones que le producirían utilidades del $6900, y el viernes puede tiene una probabilidad de vender blusas del 70% y una utilidad de $7500, y la utilidad de los pantalones es de $8900 con una probabilidad del 30%. ¿Qué día le conviene cerrar al almacén?

Respuesta. El almacén deberá cerrar los días miércoles, que es el día que tiene menos pérdidas.



UNIDAD VI. **CADENAS DE MARKOV**

Objetivo particular de la unidad

El estudiante conocerá y aplicará una herramienta más para la toma de decisiones, con baja incertidumbre. Por medio de matrices de transición podrá hacer predicciones a corto plazo, para tal fin resolverá problemas afines.

Introducción

En muchos problemas del mundo real es conveniente clasificar a individuos o cosas en categorías distintas o estados. Así se pueden analizar las transiciones de estos individuos o cosas de un estado a otro a través del tiempo. Por ejemplo, si se están analizando las inscripciones en una universidad se pueden utilizar las clasificaciones del estudiante de primer año, de segundo, etc. Después se investiga la probabilidad de que un estudiante de primer año se convierta en estudiante de segundos, etc. Si se está interesado en analizar estrategias alternativas de mercado se puede utilizar la clasificación de comprar una marca determinada contra otras, así como los “estados” de cada una. Se puede estudiar si es conveniente continuar con la fabricación o venta de un producto de acuerdo con los estados de hoy, etc.

Generalmente se habla en términos de la probabilidad de que una persona o un artículo se mueva de un estado a otro durante el periodo “n”. Supóngase que la probabilidad de que una persona remueva de un estado a otro estado durante u periodo “n2” depende solamente del estado previo y es independiente del período “n”, el proceso se podrá analizar utilizando las Cadenas de Markov.

Según el autor: Thierauf, Robert en Introducción a la Investigación de Opeaciones. “Son una forma de analizar el movimiento actual de alguna variable en un esfuerzo por predecir o pronosticar el movimiento futuro de la misma.”

Una cadena de Markov es una serie de eventos en la cual la probabilidad de que ocurra un evento depende del evento inmediato anterior.

Las cadenas de Markov tienen la propiedad particular de que las probabilidades que describen la forma en que el proceso evolucionará en el futuro dependen sólo del estado actual en que se encuentra el proceso, por lo tanto son independientes de los eventos ocurridos en el pasado.

Las cadenas de este tipo tienen memoria. “Recuerdan” el último evento y esto condiciona las posibilidades de los eventos futuros. Esta dependencia del evento anterior distingue a las cadenas de Markov de las series de eventos independientes, como tirar una moneda al aire o un dado.

Aplicaciones

- **En los negocios**, las cadenas de Markov nos permiten tener un mejor panorama de la empresa en un futuro cercano o lejano y así tomar las decisiones más convenientes.
- Se han utilizado para **analizar los patrones de compra de los deudores morosos**, determina los márgenes para cuentas dudosas en el departamento de contabilidad.
- Determinación de necesidades de mano de obra.
- para planear las necesidades de personal,
- para analizar el reemplazo de equipo,
- determinación de estrategias de mercado apropiado,
- evaluación de participaciones del mercado,
- para ventas,
- para comparar programas de publicidad. Etc.

Las condiciones iniciales y finales de un proceso de Markov se denominan **estados**. Las ocurrencias repetidas del evento que se estudia se llaman **ensayos** y la probabilidad de pasar de un estado actual al siguiente se conoce como **probabilidad de transición**

La tarea más difícil es reconocer cuándo puede aplicarse. El análisis de Markov puede aplicarse si se cumplen las condiciones:

1. Que exista un número finito de estados
2. Las probabilidades de cambio entre estado deben ser constantes.
3. Debe de ocurrir en períodos de tiempo iguales.
4. Los estado futuros del sistema son independientes de los estados pasados, con la excepción del inmediatamente precedente.

Pasos para el análisis de Markov:

1. Primero se desarrolla una matriz de probabilidades de transición, en donde se determina la "la componente permanente" o retenciones (grupos que no cambian) y la "componente reintercambio" o pérdidas y ganancias (grupos que si cambian), en una matriz de transición de probabilidades, las retenciones aparecen como valores en a diagonal, en tanto que las ganancias se convierten en valores de renglones y las perdidas de columna.
2. Por otra parte se hace el cálculo de las participaciones probables de mercado futuras, estas se calculan al multiplicar la matriz de probabilidades de transición original por la participación de mercado original. Las participaciones probables de mercado futuras restantes, se calculan de la misma manera.
3. Otra alternativa, sería elevar la matriz de probabilidades de transición ala potencia elegida y multiplicarla por los resultados de participación de mercado.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

I. Supóngase que existen tres fabricantes de automóviles que dominan el mercado. La participación en el mercado había sido de: 14.3% para Ford; 28.6 para Nissan y 57.1% para WV. Durante el año anterior el fabricante de Ford vendió un total de 120000 automóviles, la Nissan vendió un total de 203000 y la WV vendió 377000. Pero los totales de ventas no reflejan la historia completa de las preferencias de los consumidores.

Los consumidores no siempre copra un automóvil nuevo del mismo fabricante que manufacturó su automóvil anterior, este fenómeno llamado cambio de marcas, tiene implicaciones importante en el análisis de mercados y para la planeación de estrategias de publicidad. Con el fin de analizar este fenómeno, se necesitan datos del fabricante del coche que antes poseyó cada uno de estos compradores.

La tabla 6.1 nos muestra los datos

Tabla 6.1

Automóvil	Ford (Miles)	Nissan (Miles)	WV (Miles)	Total (Miles)	Participación de mercado previa	Part. Actual del mercado
Ford	85	8	7	100	0.143	0.171
Nissan	20	160	20	200	0.286	0.29
WV	15	35	250	400	0.571	0.539
Total	120	203	377	700		

De acuerdo con la tabla anterior se observa que la participación en el mercado de WV se reducido de $\frac{400}{700} = 0571$ a $\frac{377}{700} = 0539$. La mayor parte de la ganancia se fue al fabricante Ford. De los 120000 automóviles nuevos comprados de Ford 85000 clientes poseían ante un automóvil de esa marca; 20000 tenían un automóvil fabricado por Nissan y 15000 uno de WV.

De los 100000 propietarios previos de automóviles manufacturados por Ford, 8000 compraron un automóvil nuevo de Nissan, y 7000 de WV. Estos datos muestran no solamente las ventas totales y las participaciones de mercado, sino que también indican la relación entre los fabricantes en términos de lealtad a la marca y el cambio de marcas por parte de los consumidores.

Con respecto a los datos anteriores contesta:

a) Debe la campaña de publicidad del WV tener el objeto de atraer compradores previos de automóviles fabricados por Ford o Nissan, o se debe concentrar en retener una mayor proporción de los compradores previos de automóviles fabricados por ellos.

b) El comprador de un automóvil nuevo conserva el coche durante un promedio de tres años. Si continúa esta tendencia en el cambio de marca, ¿cuáles serán las participaciones de mercado de las tres compañía en tres años?

c) Si continúa esta tendencia en el cambio de marcas, ¿seguirán fluctuando las participaciones de mercado o se llegará finalmente a un equilibrio?

Con los datos de la tabla 6.1 se calculan las probabilidades de transición.

Se forma la: tabla 6.2

	Ford	Nissan	WV
Ford	85/100=0.85	8/100=0.08	7/100=0.07
Nissan	20/200=0.10	160/200=0.80	20/200=0.1
WV	15/400=0.0375	35/400=0875	350/400=0.8785

a) Ford conserva el 85% de sus clientes, gana el 10% de los clientes de Nissan y el 3.75% de WV

b) Retiene el 80% de sus clientes, Nissan gana el 8% de los clientes de Ford y gana el 8.75% de WV.

c) Retiene el 87.5% de sus cliente, gana el 7% de los clientes de Ford, el 10% de Nissan.

III. La participación actual de mercado de cada uno de los fabricantes es de 0.171 para Ford, 0.290 para Nissan y 0.539 para WV. Estos se muestran en la tabla 6.1 y se obtuvieron dividiendo el número de automóviles vendidos por cada fabricante entre el total de automóviles vendidos por los tres fabricantes.

Ahora supongamos que el período promedio que un comprador de automóvil nuevo conserva el suyo es de tres años. Si la conducta de cambio demarca de los clientes continúa de la misma manera que se describió en la matriz de transición de la tabla 6.2, ¿Cuales serán las participaciones de mercado en tres años, cuando los consumidores compres nuevos automóviles otra vez? Las actuales participaciones se muestran en la tabla 6.3

Tabla 6.3

Ford	0.171
Nissan	0.290
WV	0.539

Donde los números representan la proporción del total de ventas de nuevos automóviles atribuibles a cada fabricante.

Utilizando el siguiente procedimiento se pueden estimar la participación de mercado de Ford en tres años. En la columna (1) de la tabla 6.2 se sabe que retiene el 85% de sus clientes, el 85% de sus participación de mercado. Así, se espera que Ford conserve (0.171)(0.85)=0.145 de su participación actual de mercado. Ford también gana el 10% de los clientes de Nissan, o, el 0.1 de la participación de mercado de nissan, (0.29)(0.1)=0.029. De la misma manera, Ford ganará el 0.0375 de WV o (0.539)(00375)=0.0202, se tiene que Ford obtendrá:

0.145+0.020+0.0202=1942

como la estimación de la participación de mercado de Ford en tres años. Esta estimación representa una ganancia neta de 0.194-0.171=0.023, o 2.3% del mercado.

Estos cálculos equivalen a multiplicar simplemente los números en la columna de participación de mercado que se mostró antes por los números correspondientes en la columna (1) de la matriz de transición (tabla 6.2) y a sumar los resultados en la tabla 6.4

Tabla 6.4

Columna de participación de mercado		Columna (1) matriz de transición	
0.171	Ford	0.850	0.1450
0.290	Ford	0.100	0.0290
0.539	Ford	0.375	0.0202
			0.2942

IV. Obtener la participación de mercado que se estima para Ford a tres años.

Para obtener la participación de mercado para Ford a tres años se multiplica la participación de mercado por los números correspondientes de la columna 2 de la matriz de transición como se muestra en la tabla 6.5:

Tabla 6.5

Columna de participación de mercado		Columna (1) matriz de transición	
0.171	Ford	0.0800	0.0140
0.029	Ford	0.800	0.0232
0.539	Ford	0.0875	0.0470
			0.0293

El incremento neto para la participación Ford en el mercado es de 2.93%

V. Estima para cada fabricante de automóviles la participación neta del mercado en tres años.

Se estima para cada fabricante de la misma manera que se estimo en la tabla 6.4. La columna de participación de mercado estimada en tres años para cada fabricante se da en la tabla 6.6.

Ford	0.194
Nissan	0.293
WX	0.513

a)La WV debe enfocar la campaña de publicidad para atraer compradores previos de automóviles fabricados por Ford o Nissan.

b)Las fluctuaciones siguen ya que difícilmente el comprador de un coche nuevo tiene lealtad a la marca ya que éste compra por economía, publicidad o necesidad.

2. Una muestra inicial de 1000 consumidores responden una encuesta de cuatro marcas A, B, C y D. Una suposición es que la muestra es representativa de todo el grupo, desde el punto de vista de la lealtad a la marca y de los patrones de cambio de una marca a otra. Los consumidores cambian de una maraca a otra debido a la publicidad, las promociones especiales, el precio, la insatisfacción y por causas similares. En la tabla siguiente se dan los datos:

Intercambio de clientes durante un mes.

		Cambios durante el periodo		
marca	Periodo uno No. de clientes	Ganancia	Pérdida	Periodo dos No. de clientes
A	220	50	45	225
B	300	60	70	290
C	230	25	25	230
D	250	40	35	255
Total	1000	175	175	1000

1. Se obtienen los clientes perdidos y ganados

marca	Periodo uno No.de clientes	Ganancia de A B C D	Pérdida de A B C D	Periodo dos No. de clientes
A	220	0 40 0 10	0 20 10 15	225
B	300	20 0 25 15	40 0 5 25	290
C	230	10 5 0 10	0 25 0 0	230
D	250	15 25 0 0	10 15 10 0	255
Total	1000		175	1000

2. Estos son los datos o matriz de probabilidades de transición

$$
\begin{array}{c}
marcas \\
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} 175 & 40 & 0 & 10 \\ 20 & 230 & 25 & 15 \\ 10 & 5 & 205 & 10 \\ 15 & 25 & 0 & 215 \end{array}\right]\begin{array}{c} 225 \\ 290 \\ 230 \\ 255 \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

3. Los cálculos para la matriz de transición son:

	A	B	C	D
A	$\frac{175}{220}=0.796$	$\frac{40}{300}=0.133$	$\frac{0}{230}=0.0$	$\frac{10}{250}=0.04$
B	$\frac{20}{220}=0.091$	$\frac{230}{300}=0.767$	$\frac{25}{230}=0.109$	$\frac{15}{250}=0.06$
C	$\frac{10}{220}=0.046$	$\frac{5}{300}=0.017$	$\frac{205}{230}=0.891$	$\frac{10}{250}=0.04$
D	$\frac{15}{220}=0.067$	$\frac{25}{300}=0.083$	$\frac{0}{230}=0.0$	$\frac{215}{250}=0.86$
Probabilidad	=1.000	=1.000	=1.000	=1.00

Matriz de transición
$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D \\ A & 0.796 & 0.133 & 0.0 & 0.04 \\ B & 0.091 & 0.767 & 0.109 & 0.06 \\ C & 0.046 & 0.017 & 0.891 & 0.04 \\ D & 0.067 & 0.083 & 0.0 & 0.86 \\ & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \end{pmatrix}$$

Los renglones de la matriz indican la retención y la ganancia de los clientes. Las columnas indican la retención de los clientes y la pérdida de los mismos.

2. Calcula las participaciones probables futuras del mercado.

a) con los totales del periodo uno obtenemos la prob. de las participaciones en el mercado y se multiplica por la matriz de transición

$$A=\frac{220}{1000}=0.22 \qquad B=\frac{300}{1000}=0.3 \qquad C=\frac{230}{1000}=0.23 \qquad D=\frac{250}{1000}=0.25$$

$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D \\ A & 0.796 & 0.133 & 0.0 & 0.04 \\ B & 0.091 & 0.767 & 0.109 & 0.06 \\ C & 0.046 & 0.017 & 0.891 & 0.04 \\ D & 0.067 & 0.083 & 0.0 & 0.86 \\ & 1.000 & 1.000 & 1.000 & 1.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ 0.22 \\ 0.30 \\ 0.23 \\ 0.25 \\ 1.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 0.225 \\ 0.290 \\ 0.230 \\ 0.255 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$ La participación en el mercado

para $A=22.5\%;$ $\quad B=29\%;$ $\quad C=23\%;$ $\quad D=25.5\%$