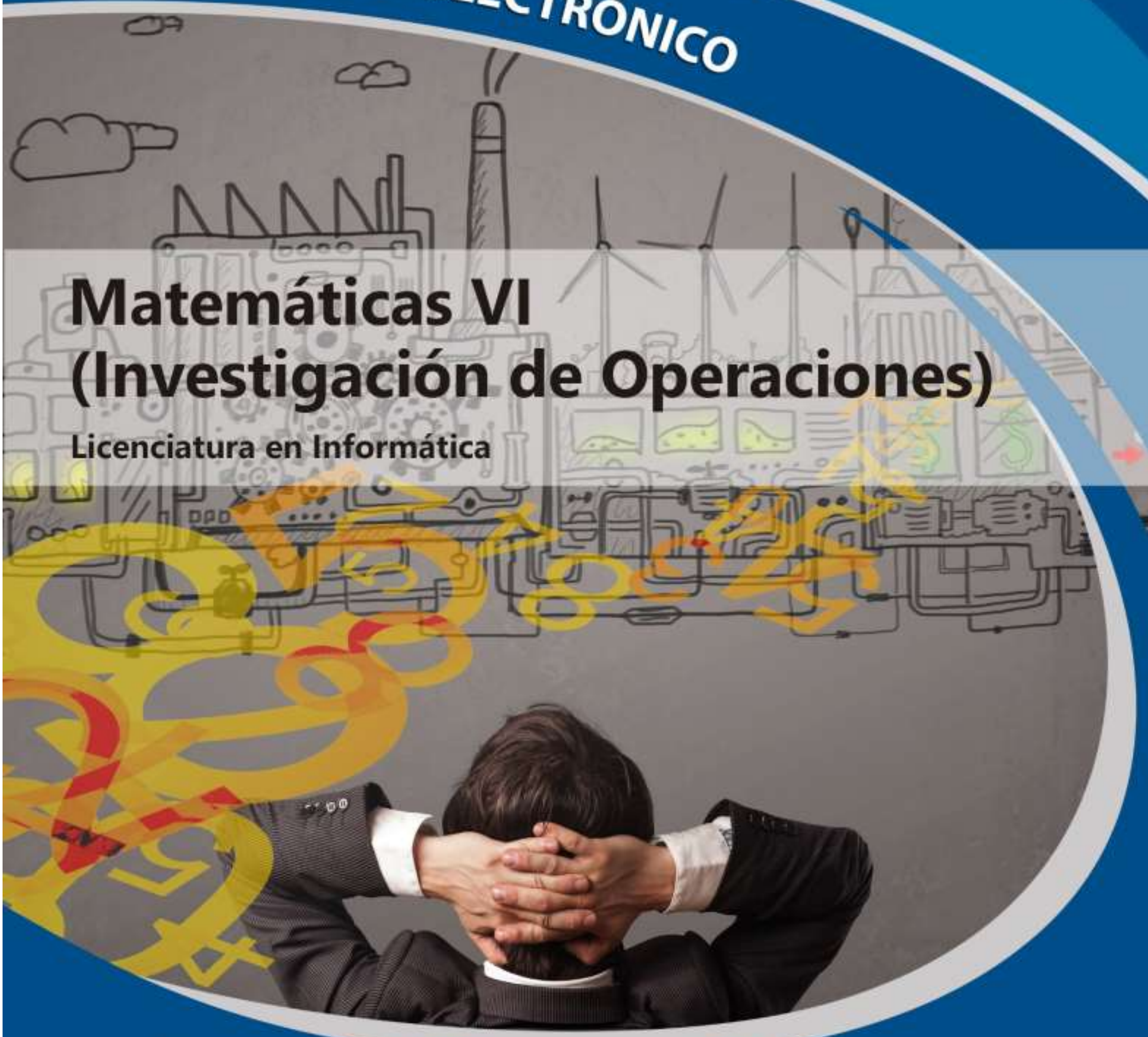
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN
DIVISIÓN SISTEMA UNIVERSIDAD ABIERTA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

APUNTE ELECTRÓNICO



# Matemáticas VI (Investigación de Operaciones)

## Licenciatura en Informática

SUAyED UNAM
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012 2016 actualizado

# COLABORADORES

**DIRECTOR DE LA FCA**
Dr. Juan Alberto Adam Siade

**SECRETARIO GENERAL**
Mtro. Tomás Humberto Rubio Pérez

– – – –

**COORDINACIÓN GENERAL**
Mtra. Gabriela Montero Montiel
Jefe de la División SUAyED-FCA-UNAM

**COORDINACIÓN ACADÉMICA**
Mtro. Francisco Hernández Mendoza
FCA-UNAM

– – – –

**AUTOR**
Mtro. Juan Carlos Luna Sánchez

**REVISIÓN PEDAGÓGICA**
Lorelei Lizbeth Mendoza Rodríguez

**CORRECCIÓN DE ESTILO**
Mtro Francisco Vladimir Aceves Gaytán

**DISEÑO DE PORTADAS**
L.CG. Ricardo Alberto Báez Caballero
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

**DISEÑO EDITORIAL**
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

---

## Matemáticas VI (Investigación de Operaciones)
## Cuaderno de actividades

Edición: enero 2018



Facultad de Contaduría y Administración
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria
Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, Ciudad de México.

ISBN: En trámite
Plan de estudios 2012, actualizado 2016.



Hecho en México

# OBJETIVO GENERAL

El alumno aplicará modelos matemáticos utilizados en la investigación de operaciones para la resolución de problemas y sustentar la toma de decisiones.

# TEMARIO DETALLADO

| | Horas |
|---|---|
| 1. Introducción a la investigación de operaciones | 4 |
| 2. Programación lineal | 16 |
| 3. Teoría de redes | 12 |
| 4. Modelo de inventarios | 12 |
| 5. Líneas de espera | 12 |
| 6. Teoría de juegos | 8 |
| **TOTAL** | **64** |

# INTRODUCCIÓN

En esta asignatura, el alumno estudiará, investigará y analizará lo referente a los distintos campos de aplicación que forman parte de la investigación de operaciones.

En la unidad 1, se describe lo referente al origen y naturaleza de la investigación de operaciones (I. de O.), así como sus generalidades, fundamentadas en ejemplos de aplicación en diversos aspectos de la administración. También se define el concepto de *optimización* y se presentan los principales modelos de investigación de operaciones y la metodología que generalmente aplica esta área para solucionar problemas que las empresas enfrentan en forma cotidiana para llevar a cabo una correcta toma de decisiones.

En la unidad 2, se revisa el concepto de *programación lineal* y los distintos métodos de solución más comunes en la práctica (gráfico y dual-simplex). Asimismo, se estudia lo referente a los modelos de transporte y de asignación. De igual manera, se mencionan algunos programas que pueden emplearse como complementos para comprobar que las soluciones analíticas utilizadas son correctas.

La unidad 3 se enfoca a las redes. En primer lugar, se presentan los términos básicos sobre el tema. Luego, se analizan distintos problemas de redes en el ámbito empresarial: peso mínimo, ruta más corta y flujo máximo. Por último, se estudian los modelos CPM, PERT/costo y PERT/tiempo.

En la unidad 4, se aborda lo referente a los inventarios. Se trata el problema general de un modelo de inventario y el modelo de lote económico clásico, sus propiedades y aplicaciones (caso por faltantes, por ventas pérdidas, con tasa de producción finita y por descuentos por cantidad).

La unidad 5 se encauza a las líneas de espera. Se inicia por comprender su terminología. Posteriormente, se estudia la estructura básica de una línea de espera. Luego, se procede a analizar los modelos de líneas de espera más utilizados en el campo profesional: de una cola con servidor, de una cola con servidores múltiples en paralelo, de una cola con servidores múltiples en paralelo y de una cola con servidores múltiples en serie. De igual manera, se expone el comportamiento prioritario de una línea de espera.

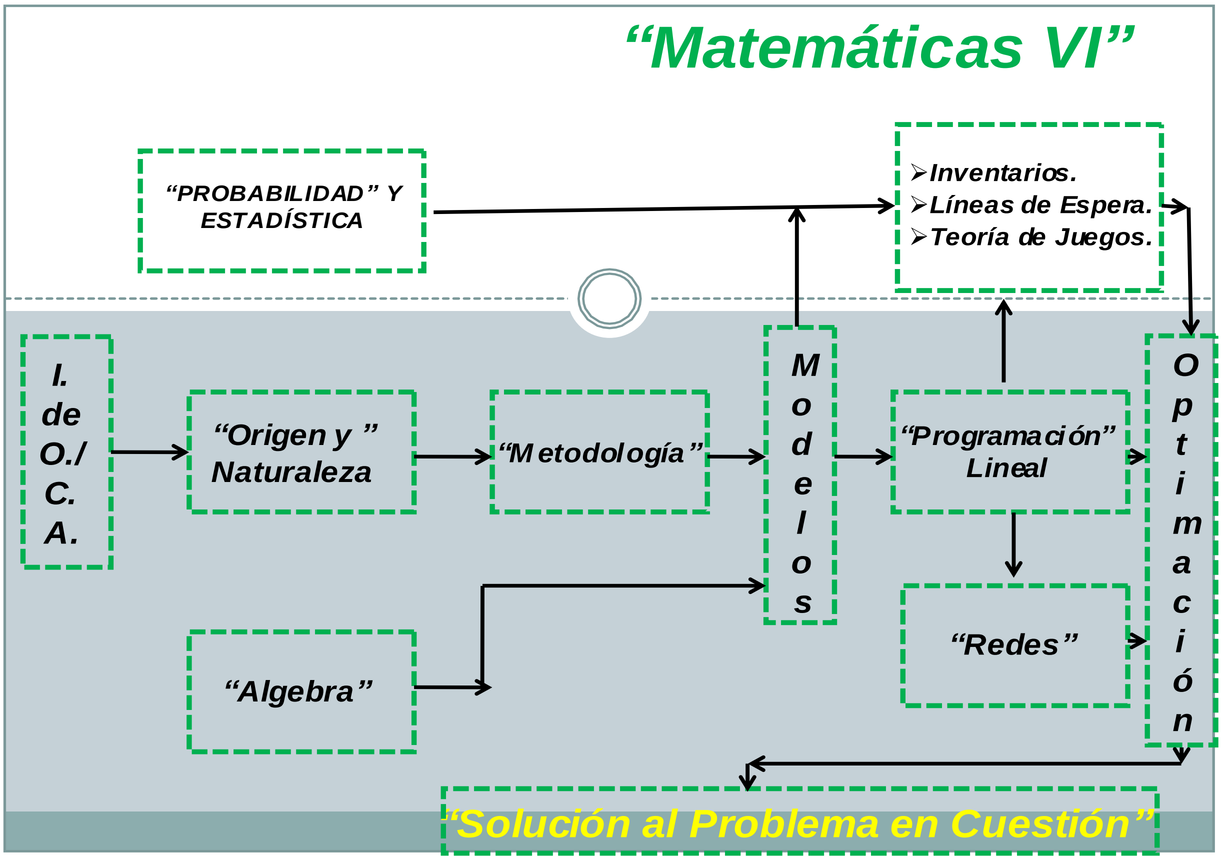
La unidad 6 se concentra en la teoría de juegos. Una vez definido el concepto de *juego*, se estudian las estrategias puras y mixtas. Luego, se muestra lo referente a la solución óptima de juegos bipersonales y de suma cero, en concreto la solución gráfica para juegos (2xN) o (Mx2). Finalmente, se estudia el teorema de minimax, donde se plantea la resolución por programación lineal.

El contenido temático de Matemáticas VI constituye un curso introductorio referente a la investigación de operaciones, y se tocan los elementos imprescindibles de esta rama de las matemáticas que facilitan la correcta toma de decisiones, tanto en entidades gubernamentales como privadas.

La asignatura ayudará a los estudiantes de las licenciaturas en Contaduría, Administración e Informática. En particular, en esta última se podrán aplicar distintos conceptos, definiciones y metodologías de la investigación de operaciones en áreas como producción, investigación de mercados, auditoría, finanzas, mercado bursátil y desarrollo de sistemas.

Finalmente, aunque la investigación de operaciones es una rama de las matemáticas, no implica que en este curso se deban realizar demostraciones rigurosas. El enfoque es pragmático: el requisito fundamental es contar con conocimientos básicos de álgebra, probabilidad y estadística.

# ESTRUCTURA CONCEPTUAL



# UNIDAD 1

# Introducción a la investigación de operaciones

# OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá el origen, la naturaleza y los conceptos básicos de la investigación de operaciones.

# TEMARIO DETALLADO

## (4 horas)

**1. Introducción**

1.1. Origen y naturaleza de la investigación de operaciones (I. O)

1.2. Concepto de optimización

1.3. Modelos de investigación de operaciones

1.4. Metodología de la investigación de operaciones

# INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los estudios y avances sobre administración e informática han impactado de manera notable en el desarrollo y práctica de la administración. Esto conlleva que el profesional en esta área tendrá que involucrarse de manera más profunda y responsable en el conocimiento universal de la teoría de la ciencia de la administración, así como en el ámbito de las tecnologías de la informática.

En la actualidad, las entidades han implementado sistemas de información que le permiten al administrador tomar decisiones más rápidas de acuerdo con las necesidades que cada una de ellas requiere. Estos sistemas son creados por empresas informáticas dedicadas al desarrollo e innovación de diversas tecnologías relacionadas con las distintas áreas funcionales que componen un negocio. Una de estas áreas es la investigación de operaciones, fundamental en la práctica de la administración y que debe conocer el profesional en informática, para que pueda aplicar las tecnologías que las organizaciones requieran para su funcionamiento y crecimiento, en un contexto marcado hoy día por la globalización.

Por consiguiente, en esta unidad, se presentan los elementos necesarios que constituyen la investigación de operaciones a través de los siguientes cuestionamientos: ¿cuál es el origen y naturaleza de la investigación de operaciones?, ¿qué es *optimización*?, ¿cuáles son los modelos de investigación de operaciones?, ¿cuál es la metodología que aplica la investigación de operaciones?

Respondidas estas preguntas, el profesional en Informática podrá crear *software* referido a la investigación de operaciones que las empresas requieran para su crecimiento y funcionamiento.

# 1.1. Origen y naturaleza de la investigación de operaciones (I.O)[1]

La investigación de operaciones es una técnica utilizada de forma cotidiana en la práctica de la administración por parte de las empresas para llevar a cabo una correcta toma de decisiones.

Entre las empresas que usan la investigación de operaciones, se pueden mencionar las siguientes:

- Las dedicadas a producir bienes o productos terminados que satisfagan distintas necesidades del mercado consumista, clasificadas en diversos sectores industriales, según el tipo de producto o bien del que se trate.
- Las enfocadas al servicio de toda clase de productos financieros, como aseguradoras, afianzadoras, banca múltiple, banca de desarrollo, organizaciones auxiliares de crédito, etcétera.

La investigación de operaciones tiene sus inicios en la Segunda Guerra Mundial, en octubre de 1954, con la publicación de la primera edición de la revista *Management Science*.

A lo largo de la primera parte del Siglo XX, las personas dedicadas a la investigación comenzaron a aplicar procedimientos científicos para investigar una serie de problemas que se encontraban fuera de las ciencias puras. Pero no fue sino hasta

[1] Davis Roscoe K. y Patrick McKeown G., *Modelos cuantitativos para administración,* Grupo Editorial Iberoamérica, México: 1986, pp. 2-4.

comienzos de la Segunda Guerra Mundial que estos esfuerzos se unificaron para alcanzar un objetivo general común.

En 1937, en la Gran Bretaña, se reunió un equipo de trabajo conformado por matemáticos ingenieros y científicos en áreas básicas para estudiar los problemas estratégicos y tácticos asociados a la defensa del país. El objetivo general de este grupo fue determinar la forma más efectiva de utilizar los recursos militares limitados. Así, como parte del personal operativo de la organización militar británica, llamaron a su trabajo “investigación de operaciones”, pues analizaban operaciones, en este caso, de carácter militar.

El éxito de estas actividades hizo que en Estados Unidos se emprendieran trabajos similares, como el estudio de problemas logísticos complejos, desarrollo de patrones de vuelo para aviones, planeación de maniobras navales y utilización efectiva de recursos militares.

Concluida la Segunda Guerra Mundial, muchos de quienes trabajaron en la investigación de operaciones durante el conflicto bélico concluyeron que varios métodos y técnicas aplicados para resolver los problemas militares también se podían utilizar en la solución de problemas industriales. Sin embargo, estos conceptos e ideas comenzaron a ponerse a disposición de las empresas de los distintos sectores industriales del país hasta la década de 1950, cuando se iniciaba el crecimiento y comercio de la computación.

Como en toda instancia nueva, al principio muchos de los problemas industriales que ahogaban a las empresas y que se estudiaron fueron el control de inventarios y los sistemas de transporte, muy semejantes a las cuestiones militares que inicialmente se habían estudiado y solucionado.

Hoy, es fácil encontrar numerosos casos en los que los conceptos de investigación de operaciones (o ciencia de la administración, como también se le conoce) se han aplicado a distintas áreas funcionales que componen una empresa: compras, mercadotecnia, contabilidad, planeación financiera, finanzas, entre otras.

Aunque la Gran Bretaña tiene el mérito de iniciar la investigación de operaciones como disciplina, los investigadores norteamericanos han hecho contribuciones más importantes a su evolución, como el método simplex de la programación lineal. Propuesto en 1947 por el investigador estadounidense George B. Dantzing, ha tenido amplias aplicaciones a muchos y diversos problemas operativos y es la base para otras técnicas matemáticas, como la programación de metas y la programación entera.

En la Gran Bretaña, se utilizaron los términos *investigación de operaciones* e *investigación operacional* para describir los desarrollos en esta área. Mientras que en Estados Unidos, se han emplean las acepciones *investigación de operaciones* (IO) y *ciencia de la administración* (CA).

Por otra parte, el concepto ciencia de la administración recibió un estímulo inicial con el establecimiento del The Institute of Management Sciences (TIMS) en 1953.

Aunque numerosas aplicaciones de la ciencia de la administración ocurrieron en la década de 1950, no fue sino hasta principios de la década de 1960 que se establecieron programas académicos que ponían énfasis en esta área; y a mediados de esos años comenzaron a egresar de las universidades los primeros profesionales en esa disciplina. Por tanto, los grupos formales de asesoría de investigación de operaciones/ciencia de la administración aparecen en las empresas industriales y de servicios y en las operaciones gubernamentales a finales de la década de 1960.

Sin embargo, el desarrollo de grupos formales de asesoría en ciencia de la administración/investigación de operaciones no condujo por sí mismo a una utilización exitosa de las técnicas. Al contrario, muchos especialistas en ciencia de la administración fueron acusados de estar más interesados en manipular problemas para que se ajustaran a las técnicas que en trabajar con los administradores para analizar problemas; es decir, no creaban métodos apropiados de solución ni implantaban sistemas funcionales para generar las soluciones finales definidas según cada caso.

Además, durante el crecimiento de los programas académicos en ciencia de la administración se concentró más la atención en el desarrollo de técnicas y herramientas, en vez de hacerlo en las aplicaciones y estrategias para implantarlas. Aunque los conocimientos avanzaron en áreas asociadas con estas técnicas y modelos matemáticos, la ciencia de la administración/investigación de operaciones experimentó un éxito muy restringido con la aplicación de las técnicas en sus años de formación. Hoy día, la ciencia de la administración ha madurado de manera vertiginosa y una gran cantidad de los problemas de implante que aparecieron en la década de 1960 y principios de la de 1970 se han superado gracias a los progresos de la tecnología de la computadora y a cambios en los currículos académicos.

Se puede afirmar, entonces, que hay un mayor énfasis en la implantación y aplicación de técnicas y modelos, además de la disponibilidad de las computadoras. Esto ha ampliado en gran medida el alcance y magnitud de los problemas que resulta posible analizar.

Así, los sistemas computarizados de tiempo compartido han ayudado al área de implante al permitir que quienes toman las decisiones interactúen en forma directa con los modelos de la ciencia de la administración. Como resultado, ha disminuido la necesidad de que un experto en ciencia de la administración actúe como intermediario entre el administrador y el modelo; y se posibilita que el administrador explore preguntas hipotéticas con el objeto de comprender y apreciar mejor el potencial del modelo.

A su vez, los sistemas de tiempo compartido también han puesto el poder de las computadoras a disposición de un gran número de empresas, ampliando así la aplicación potencial de las técnicas de investigación de operaciones.

El alcance y capacidad de la investigación de operaciones han sido mayúsculos, sin olvidar que ésta también presenta algunas limitaciones; ha experimentado al mismo tiempo aplicaciones exitosas y fallidas. Sin embargo, para valorar su dimensión, es necesario comprender primero los fundamentos de las técnicas y después determinar cómo aplicarlas en diversas circunstancias, o prescindir de ellas. En este orden, conviene comprender antes los conceptos generales de planteamiento y desarrollo de modelos, y la forma como se involucran con el área de la investigación de operaciones.

Luego de este repaso, se puede llegar al siguiente concepto.

La investigación de operaciones es el conjunto de técnicas de carácter cuantitativo estructuradas en forma adecuada, cuyo objetivo es buscar la forma idónea de llevar a cabo las operaciones y decisiones dentro del marco organizacional que constituye el funcionamiento y desarrollo de las empresas, en condiciones limitadas de recursos.

Este grupo de técnicas se han aplicado de manera exitosa a una diversidad cada vez mayor y compleja de problemas en las áreas de los negocios, gobiernos, economía, finanzas, salud, educación, etcétera.

# 1.2. Concepto de optimización[2]

Un punto central de la investigación de operaciones es la *optimización*. Conocida también como *modelo de optimización*, es un modelo normativo, prescriptivo, porque señala el curso de acción que debe seguir el administrador para alcanzar un objetivo previamente definido.

Un modelo de optimización puede contener una serie de sub-modelos descriptivos, pero en este modelo es factible determinar un curso de acción óptimo o mejor. A estos modelos se les incorpora un objetivo y se visualizan los efectos de los diferentes cursos de acción que se tienen sobre éste.

Debido a que muchos modelos de la investigación de operaciones se consideran como normativos o de optimización, es importante conocer ciertas cualidades o elementos clave que los distinguen:

| | |
|---|---|
| *Variables de decisión y parámetros.* | Se refiere a que las cantidades desconocidas a determinar en la solución del modelo de un problema en cuestión son las variables de decisión. |

Un ejemplo de esta variable es la cantidad de un determinado producto que debe elaborarse en una operación de producción en la que podrían fabricarse diversos productos a partir del mismo recurso básico.

En cuanto a los parámetros, son los valores que describen la relación entre las variables de decisión. Permanecen constantes para cada problema, pero

[2] *Ibíd.*, pp. 5-10.

cambian con problemas distintos. Por ejemplo, las horas de mano de obra requeridas para fabricar una unidad de un producto determinado.

| | |
|---|---|
| *Restricciones.* | Son limitaciones físicas que ocurren en el problema cuyo modelo se plantea (éste deberá incluir cualquier restricción que limite las variables o valores permisibles o factibles). |

Por lo general, las restricciones se representan como funciones matemáticas o sub-modelos descriptivos.

Como ejemplo de este elemento, considera que $x_1$ y $x_2$ son las variables de decisión y éstas representan el número de unidades de dos productos que se está considerando fabricar; y $a_1$ y $a_2$ son los parámetros que representan los respectivos requerimientos unitarios de materias primas para fabricar los productos. Si se indica que la cantidad total disponible de materia prima es *b*, entonces, la función correspondiente de restricción podría expresarse como se muestra en la Ec. 1.2.1, como sigue:

$$a_1x_1 + a_2x_2 <= b \qquad \text{Ec. 1.2.1}$$

| | |
|---|---|
| *Función objetivo.* | Este elemento define la efectividad del modelo como función de las variables de decisión. |

Por ejemplo: si el objetivo es maximizar las utilidades totales, la función objetivo deberá describirlas en términos de las variables de decisión. En forma matemática, la función objetivo se expresa como se muestra en la Ec. 1.2.2:

$$Z = 4x_1 + 5x_2 \qquad \text{Ec. 1.2.2}$$

La función objetivo de la Ec. 1.2.2 describe las utilidades en términos de las variables de decisión, suponiendo que se sabe que se obtiene una utilidad de \$4.00 por cada $x_1$, y de \$5.00 por cada $x_2$.

En forma general, de esta función se extrae la solución óptima del modelo cuando los valores de las variables de decisión arrojan el mejor valor de la función objetivo, al mismo tiempo que se satisfacen todas las restricciones.

Así, la optimización es clave en la aplicación de distintos modelos de investigación de operaciones/ciencia de la administración. Es una pieza angular en esta área de estudio hoy día: las empresas recurren en forma cotidiana a ella a fin de resolver problemas de asignación de recursos, económicos y financieros, vinculados entre sí, en el entorno tanto externo como interno de la empresa.

Cuando las entidades enfrentan los problemas a partir de la optimización, logran una evolución constante dentro de este mundo globalizante.

# 1.3. Modelo de investigación de operaciones[3]

**Construcción de modelos**

Independientemente del sector donde trabaje el administrador, privado o público, una de sus principales funciones es resolver problemas. En este orden, la construcción de modelos es un medio que le permite analizarlos para examinar diferentes alternativas y elegir la más viable.

[3] *Íd.*

La construcción de modelos no es una idea nueva. Es un proceso aplicado en forma cotidiana, con frecuencia de forma inconsciente, en distintas situaciones de problemas básicos. Supóngase los siguientes casos.

**Caso 1**

Una anfitriona desea redistribuir los muebles de la sala de su casa. El objetivo es tener una disposición adecuada que resulte atractiva y a la vez funcional para el grupo de bridge que se reunirá en la noche.

*Solución.* Visualizar diferentes disposiciones de los muebles y evaluar cada alternativa: la anfitriona puede utilizar un modelo mental del problema. Otro método es que ella pida a su esposo que mueva los muebles de la sala hasta encontrar una forma que le satisfaga.

Probablemente el segundo método sea el más apropiado para resolver este problema, pues el modelo mental no permite suficientes manipulaciones, hay demasiados elementos a considerar. O tal vez la anfitriona no sea capaz de visualizar la apariencia de cada una de las diferentes disposiciones.

Un tercer método consiste en hacer un enfoque de investigación de operaciones/ciencia de la administración al problema desarrollando un modelo a escala del cuarto y ahí examinar diferentes disposiciones. Este enfoque puede utilizarse sólo si la anfitriona acepta que el modelo a escala es una representación válida del problema.

**Caso 2**

Consideremos el problema que enfrenta un administrador a cargo del diseño de una planta en una empresa manufacturera importante. Así como en la disposición de los muebles, en este caso es difícil resolver mentalmente el problema de la disposición de planta, debido a que la imagen que el administrador tiene de ella es demasiado vaga: existen múltiples restricciones sobre dónde ubicar ciertos equipos, piezas, etcétera. Además, hay una gran diferencia entre los dos problemas, como se explica a continuación.

El gerente de la planta no puede resolver el problema haciendo que un grupo de empleados ensayen cuatro o cinco disposiciones diferentes, aplicando una corrida de producción en cada una de ellas y observando cómo funcionan. Sin embargo, el administrador podría basarse en un modelo escala, tal como se sugirió para el problema de la anfitriona (caso 1).

El administrador también tiene la opción de utilizar un modelo matemático –que emplea símbolos para representar los componentes del problema–, en particular si sabe que existe uno general de diseño de plantas, como el CRAFT (Computerized Relative Allocation of Facilities Technique**)** o técnica computadorizada de asignación relativa de instalaciones. En todo caso, es probable que un modelo matemático resulte más económico para evaluar diferentes alternativas.

Los modelos matemáticos son relativamente nuevos, en particular en relación con la toma de decisiones en el campo de la administración, por lo que los utiliza la mayoría de los análisis de investigación de operaciones/ciencia de la administración.

**Caso 3**

No todos los modelos matemáticos son complejos. Ahora consideremos un caso consistente en la elaboración de un modelo matemático que permita determinar cuál es el pago que recibe un vendedor por una comisión de $20.00 por cada venta. En concreto, supóngase que se tienen los datos que describen la relación entre la comisión del vendedor y el número de ventas, como se muestra en la siguiente tabla.

| Número de ventas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dólares de ingresos por comisión | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | … |

Tabla 1.3.1

En vez de utilizar la tabla 1.3.1 como un modelo descriptivo del problema, es posible elaborar un modelo matemático más simbólico al desarrollar una relación funcional entre el número de ventas y los ingresos por comisión.

Si se emplea la variable $x$ para representar el número de ventas, cualesquiera que sea, y $y$ para simbolizar la cantidad de ingresos en dólares, entonces la función matemática entre las ventas y los ingresos queda expresada en la Ec. 1.3.1 así:

$$y = 20x \qquad \text{Ec. 1.3.1}$$

La relación funcional mostrada en la Ec. 1.3.1 también puede visualizarse mentalmente pensando que representa una operación de procesamiento, de forma muy semejante a como veríamos una operación de procesamiento de datos. Además, los diversos valores de $x$ *(0, 1, 2, 3, 4, 5,…)* serían las entradas; y los de $y$ *(0, 20, 40, 60, 80, 100,…)*, salidas o resultados.

A las entradas y resultados se les denomina *variables*. Por tanto, una variable es sólo una representación de algo que puede asumir diversos valores numéricos.

Entonces, usando la terminología matemática convencional, a la variable de entrada se le denomina *variable independiente*; y a la de salida, *variable dependiente*. Por ello, en la Ec. 1.3.2, *x* es la variable independiente y *y* la dependiente. Y el valor numérico de 20 se conoce de distintas formas: *constante, coeficiente o parámetro.*

Si en la relación funcional se designara la cantidad que se paga por ventas como "a dólares por venta" en vez de $20.00 por venta, la función se expresaría como se muestra en la Ec 1.3.2:

$$y = ax \qquad \text{Ec. 1.3.2}$$

En donde *a* es el parámetro del modelo.

En el planteamiento de modelos matemáticos, en ocasiones resulta fácil expresar la relación funcional en términos generales. Así, en el modelo del caso 3, se dice que *y* es una función no especificada del número de ventas *x*. Y la representación simbólica quedaría como se muestra en la Ec. 1.3.3:

$$y = f(x) \qquad \text{Ec. 1.3.3}$$

La notación de la Ec. 1.3.3 no significa que *y* sea igual a *f* multiplicada por *x*. Más bien indica que la variable *y* tienen un valor numérico determinado por una función *f* y por el valor numérico de la variable *x.*

Es evidente que la elaboración de modelos en la investigación de operaciones/ciencia de la administración implica algo más que el desarrollo de relaciones abstractas o funcionales entre variables.

**Clasificación 1 de los modelos matemáticos: modelos normativos comparados con modelos descriptivos**

| *Modelos descriptivos.* |
| --- |
| • Representan una relación, pero no indican ningún curso de acción a seguir; sólo describen de manera muy global los elementos centrales del problema en cuestión. Son muy útiles porque suelen pronosticar la conducta de los sistemas, mas no pueden identificar el mejor curso de acción. |

Considerando como ejemplo el caso 3 –que relaciona la comisión de ventas con los ingresos–, podría tomarse como un modelo descriptivo porque describe o puede utilizarse para pronosticar la comisión por ventas si se específica el número de éstas.

Muchos modelos estadísticos son descriptivos. Por ejemplo, uno de regresión acentúa la relación entre una variable dependiente y una o más independientes.

Los modelos de líneas de espera también suelen clasificarse como descriptivos, en tanto permiten pronosticar diversas características de situaciones de líneas de espera si se tienen previamente ciertos datos sobre las variables independientes del problema.

| *Modelos normativos.* |
| --- |
| • También conocidos como *de optimización*, son modelos prescriptivos debido a que señalan el curso de acción que el administrador debe seguir para alcanzar un objetivo previamente definido. |

Este tipo de modelo fue analizado en el subtema 1.2, donde se menciona que puede contener una serie de sub modelos descriptivos, con la salvedad de que en este modelo es factible determinar un curso de acción óptimo. Lo que significa que se les incorpora un objetivo, y la posibilidad de apreciar los efectos de los diferentes cursos de acción en el mismo.

Estos modelos normativos están constituidos por ciertas cualidades o elementos clave: variables de decisión, parámetros, restricciones y función objetivo.

A partir del siguiente ejemplo, se explica a detalle la relación entre modelos descriptivos y normativos. Supóngase que se tiene un proceso de producción en el que pueden fabricarse tres productos diferentes. El único recurso limitante es la mano de obra: hay disponibles 400 horas-hombre de mano de obra por semana.

Con base en experiencias pasadas, se sabe que el producto A requiere 8 horas de mano de obra por unidad fabricada; el B, 4; y el C, 2. Además se supone por un momento que existe una cantidad ilimitada de mano de obra, utilizando $x_1$ para representar el número de unidades que se fabricarán del producto A; $x_2$ para el del B; y $x_3$ para el del C. Así, la expresión que se muestra a continuación en la Ec. 1.3.4 es un modelo descriptivo de los requerimientos totales de la mano de obra:

$$L = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad \text{Ec. 1.3.4}$$

Asimismo, se conoce que sólo hay disponibles 400 horas-hombre de mano de obra. Luego, la relación funcional real es la expresión mostrada en la Ec. 1.3.5:

$$8x_1 + 4x_2 + 2x_3 <= 400 \qquad \text{Ec. 1.3.5}$$

De esta manera, con cualquier modelo puede hacerse una afirmación acerca del problema; sin embargo, en este punto no hay manera de determinar el mejor curso de acción.

En el caso de la Ec. 1.3.5, si se consideran ciertos valores de $x_1$, $x_2$ y $x_3$, es posible pronosticar el total de la mano de obra requerida.

Con respecto al caso de la Ec. 1.3.4, es fácil determinar el número de unidades de cada producto que podrían fabricarse, cuya solución es (50, 100, 200), suponiendo que no se fabrica ninguna unidad de los otros dos productos.

Pensemos que además de los datos iniciales proporcionados, ahora se indica que el producto A contribuye con $12.00 por unidad a las utilidades; el B, con $10.00; y el C, con $8.00. A partir de estos referentes, es viable aplicar un modelo descriptivo para las utilidades totales de la función objetivo. Luego, la *Z* se muestra en la Ec. 1.3.6:

$$Z = 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \qquad \text{Ec. 1.3.6}$$

Como en el caso del subtema 1.2, puede emplearse este modelo para pronosticar las utilidades sólo si se proporcionan ciertos valores de $x_1$, $x_2$ y $x_3$. En cambio, si se combinan los modelos y además se supone que el objetivo es maximizar las utilidades, se tiene un modelo normativo, el cual quedaría expresado como lo indica el modelo 1.3.1 mostrado a continuación:

Minimizar: $Z = 12x_1 + 10x_2 + 8x_3$

Modelo 1.3.1

Sujeto a: $8x_1 + 4x_2 + 2x_3 <= 400$

Este modelo así expresado, pretende obtener los valores de $x_1$, $x_2$, y $x_3$ que den como resultado el mayor valor de $Z$.

**Clasificación 2 de los modelos matemáticos**

Esta segunda clasificación comprende cuatro sub-clasificaciones de modelos (en realidad es una sub-clasificación de la expuesta en el apartado anterior).

| | | |
|---|---|---|
| Sub-clasificación 1 | *Determinísticos.* | En este tipo de modelos, las relaciones funcionales del problema, es decir, los parámetros del modelo, se conocen con certidumbre. Por ejemplo, el modelo de la Ec. 1.3.3 podría considerarse de este tipo porque los parámetros o coeficientes de contribución se conocen con certidumbre. |
| | *Estocásticos.* | A diferencia de los anteriores, en éstos los parámetros no se advierten con certidumbre.<br>En consecuencia, un modelo estocástico puede tener algunas relaciones funcionales determinísticas y estocásticas, o todas estocásticas.<br>Es fácil hallar soluciones para este tipo de modelos si se estructuran como normativos, de modo que proporcionen los mejores resultados esperados. O sea, se logra optimizar la función objetivo para alcanzar los resultados esperados máximos o mínimos. |

| | | |
|---|---|---|
| Sub-clasificación 2 | *Lineales.* | En este caso, todas las relaciones funcionales implican que la variable dependiente es proporcional a las variables independientes. |
| | *No lineales.* | Utilizan ecuaciones curvilíneas o no proporcionales. Igual que en los modelos estocásticos, no es necesario que todas las relacionales funcionales del modelo sean no lineales para clasificarlo como lineal. Y si una o más de las relaciones funcionales no son lineales, se ubica el modelo dentro de esta categoría. |
| Sub-clasificación 3 | *Estáticos.* | Se definen en un lapso concreto, y mantienen el supuesto de que todas las condiciones del modelo no cambian para ese periodo específico en el proceso de solución del modelo. Por tanto, permiten determinar una decisión o curso de acción idóneo sin hacer referencia al curso de acción óptimo adoptado en periodos previos o futuros. |
| | *Dinámicos.* | A diferencia de los estáticos, establecen que el curso de acción óptimo se determina examinando periodos múltiples. Por ello se emplean en situaciones en las que no puede determinarse el curso óptimo de acción para un número múltiple de periodos, sin considerar en forma colectiva las acciones que se emprenden en cada tiempo. |

| | | |
|---|---|---|
| Sub-clasificación 4 | **a.** *Simulación.* | Este modelo es un proceso de planteamiento de modelos y experimentación usado para describir y/o analizar un problema o grupo de problemas concretos. En este caso, también se emplea el término *proceso de planteamiento de modelos y experimentación*, porque la simulación puede utilizarse para ambos propósitos. |

Así, a partir de los datos y características descriptivas del problema de producción mencionado antes como ejemplo, se pudo plantear un modelo normativo, mostrado en el modelo 1.3. Con todo, es frecuente que la complejidad o naturaleza del problema hagan imposible desarrollar un planteamiento matemático que le sea propicio. En estas circunstancias, simular el problema ayudaría a estudiar diferentes cursos de acción.

Además, como los modelos de simulación no requieren funciones matemáticas de forma cerrada para relacionar las variables, es posible simular sistemas complejos cuyo modelo no puede plantearse en forma matemática.

# 1.4. Metodología de la investigación de operaciones[4]

La metodología de la investigación de operaciones se refiere tanto a los procesos de solución empleados para resolver problemas en las empresas, como a las etapas que en un proceso de solución de problemas en investigación de operaciones los describen en una estructura.

**Procesos de solución**

Existen tres procesos o métodos de solución para resolver problemas de investigación de operaciones y que permiten llegar a soluciones óptimas o casi óptimas:

*Algoritmos.* Es el más común, ya que en éste se justifica una explicación detallada de todos los componentes que intervienen en el análisis del problema.

Un algoritmo es un conjunto de procedimientos o reglas que, cuando se siguen en forma ordenada, proporcionan la mejor solución para un modelo determinado para el cual se ha desarrollado. Aunque tal vez sea posible alterar un algoritmo a fin de que este satisfaga los requerimientos de problemas especializados, pero será una labor difícil porque implicará alterar los programas de computadora que existen para los algoritmos.

[4] *Ibíd.,* pp. 11-17.

Analicemos un ejemplo. Supóngase el caso del modelo 1.3.1 referente al proceso de producción, revisado anteriormente. Recuérdese que el modelo final establecido fue el siguiente:

Minimizar: $Z = 12x_1 + 10x_2 + 8x_3$

Modelo 1.3.1

Sujeto a: $8x_1 + 4x_2 + 2x_3 <= 400$

Téngase en cuenta asimismo que las contribuciones a las utilidades eran de $12.00, $10.00 y $8.00 para la venta de los productos A, B y C, respectivamente; y 8, 4 y 2 eran las horas de mano de obra requeridas por unidad para la fabricación de los respectivos productos.

Si se analiza el modelo 1.3.1, puede advertirse de manera clara que el producto A contribuye con $12.00 a las utilidades, en comparación con el $10.00 y $8.00 de los otros dos productos. Luego, podría concluirse que deben fabricarse tantos productos A como los recursos lo permitan. Pero si ahora examinamos los costos de mano de obra asociados con el producto A, que son 8 horas, es fácil notar que tiene el más alto requerimiento unitario de mano de obra.

Por lo anterior, la decisión de fabricar tantos productos A como sea posible quizá no sea la mejor, dado que tanto los coeficientes de contribución como los de mano de obra afectan la decisión respecto al número de unidades que deben fabricarse de los tres productos. Así, es necesario emplear un medio que permita ambos coeficientes en forma simultánea, calculando una razón de los mismos. Estos cocientes se obtienen y muestran en el cuadro 1.4.1, con sus valores:

“Producto A” = $\frac{\$12.00/unidad}{8\ hr/unidad}$= 1.50 usd/unidad

“Producto B” = $\frac{\$10.00/unidad}{4\ hr/unidad}$= 2.50 usd/unidad

“Producto C” = $\frac{\$8.00/unidad}{2\ hr/unidad}$= 1.50 usd/unidad

“Cuadro 1.4.1.”

Las razones del cuadro anterior representan las contribuciones en dólares por hora de mano de obra invertida en la fabricación de los respectivos productos. Examinando estos valores, puede concluirse que la decisión apropiada sería fabricar la mayor cantidad del producto C como el recurso de mano de obra permita.

Así pues, para determinar el número real de unidades del producto C que deben fabricarse, se divide el total disponible de horas de mano de obra (en este caso, 400) entre los requerimientos de este recurso para el producto, 2 horas por unidad. De manera que el mejor curso de acción a seguir es elaborar 0 unidades del producto A ($x_1$ = 0), 0 del B ($x_2$ = 0) y 200 del C ($x_3$ = 200). En esta situación, entonces, Z = 12(0) + 10(0) + 8(200) = $ 1,600 USD.

Por consiguiente, el algoritmo para el modelo 1.3.1, definido de manera no muy formal, se expresaría de la siguiente manera: *calcular una razón para cada producto dividiendo el coeficiente correspondiente de contribución a las utilidades entre el coeficiente de mano de obra por unidad*. Y la mayor razón denota el producto que debe fabricarse.

Posteriormente, se determina la cantidad que debe fabricarse, dividiendo el total de horas de mano de obra disponibles entre el coeficiente de mano de obra del producto a elaborarse.

Como el algoritmo se ha definido de modo poco formal, o sea, sin la posibilidad de que existan coeficientes negativos o negativos, y al estar tan vinculado al problema específico, se tendrá que desarrollar uno más estructurado en términos matemáticos y ajustado a un modelo general que pueda utilizarse para este problema y otros. Para lograrlo, se comienza creando un modelo general para el modelo 1.3.1, utilizando la siguiente notación:

$c_j$ = Contribución por unidad del producto j

$a_j$ = Requerimiento unitario de mano de obra para la fabricación del producto j

b = Total de mano de obra disponible

Por tanto, el modelo 1.3.1 puede expresarse de manera general como se muestra en el modelo 1.4.1:

Minimizar: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

Modelo 1.4.1

Sujeto a: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 <= b$

Dado que se está estructurando un modelo general, pueden fabricarse más de tres productos, es decir, “n” productos. Ello exige observar que todas las variables de decisión ($x_1$, $x_2$ y $x_3$) son cero o mayores. Entonces, el modelo general sería como se muestra en el modelo 1.4.2:

Maximizar: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n$

Modelo 1.4.2

Sujeto a: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n <= b$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n >= 0$

Expresado en forma matemática más compacta, el modelo 1.4.2 se expresa como se presenta en el modelo 1.4.3:

Maximizar: $Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$

Modelo 1.4.3

Sujeto a: $\sum_{j=1}^{n} a_jx_j <= b$

y $x_j > = 0$ para toda j

Entonces, el algoritmo para el modelo 1.4.3 se expresaría de la siguiente manera:

*Calcular la razón $c_j/a_j$ para todas las variables, en donde $a_j > 0$.*

*Observar cuál es la razón y denotar la variable de decisión asociada como* $x_j$*. (Si hay varios cocientes con igual valor, esto denota que la fabricación de los productos asociados rinde el mismo nivel de utilidades).*

*Si la mayor razón que se ha identificado es igual o mayor que cero, no debe producirse nada: el curso óptimo de acción consiste en no fabricar unidad alguna. En cambio, si la mayor razón es superior a cero, se continúa.*

*Calcular la cantidad óptima que debe producirse con la relación* $x_j = b/a_j$*, en donde* $a_j$ *es el coeficiente de mano de obra asociado con el mayor cociente* *identificado antes. (Si existen razones iguales, hay políticas óptimas alternativas).*

Se puede concluir que este algoritmo no resultó tan complejo, porque el modelo 1.3.1 no lo es, y además sirvió como ilustración.

*Métodos heurísticos.* Se presentan cuando en ocasiones el planteamiento matemático de un problema puede ser tan complejo que una solución analítica es casi imposible, y la evaluación a través de una simulación no es práctica debido al tiempo excesivo de procesamiento. Así, brindan la opción de encontrar soluciones aproximadas aceptables.

Se basan en reglas empíricas o intuitivas que, cuando se aplican al modelo, proporcionan una o más soluciones. Son procedimientos de búsqueda que intentan pasar de un punto de solución a otro, de manera que se mejore el objetivo del modelo con cada movimiento sucesivo.

Cuando ya no es posible encontrar mejoras al objetivo del modelo utilizando la regla de búsqueda elegida, la solución alcanzada se denomina *solución aproximada.*

El análisis de los procesos heurísticos de solución depende en gran medida del problema específico que se responde. En términos generales, se aprovechan en problemas de particular complejidad, y con frecuencia dependen de algoritmos para resolver partes del problema.

*Simulación.* Un modelo de simulación "simula" precisamente la conducta del problema para un conjunto definido de condiciones de entrada. Para determinar el mejor curso de acción, debe analizarse la conducta del modelo con diversos datos de entrada y elegir el que proporcione el nivel deseado de resultados.

**Proceso de solución de problemas en investigación de operaciones/ciencia de la administración**

Resolver un problema o, en términos más específicos, utilizar modelos de ciencia de la administración/investigación de operaciones como ayuda en la solución de problemas implica algo más que encontrar un algoritmo propicio a un problema determinado. Se habrá de seguir un proceso de solución de problemas que comprende seis etapas.

| | |
|---|---|
| *Identificación, observación y planteamiento del problema.* | Se da cuando quien toma las decisiones observa la realidad y se da cuenta o percibe que no se está produciendo un resultado deseado en las operaciones existentes. |
| | La segunda fase de esta etapa incluye a quien construye el modelo y a quien toma las decisiones. En este punto, se observa el problema para identificar variables y relaciones clave. |
| | La observación del problema puede llevarse a cabo en forma colectiva o separada. Sin embargo, es necesario desarrollar un enfoque unificado, por ello debe existir una gran interacción entre quien toma las decisiones y quien crea el modelo. |
| | La fase final de la etapa consiste en describir el problema en forma verbal: presentar una descripción de las variables, restricciones y objetivo; y ofrecer ciertas ideas generales respecto de las relaciones del modelo. Este momento es fundamental, porque es la base sobre la cual se planteará el modelo matemático. |

| | |
|---|---|
| *Construcción del modelo.* | Esta etapa implica el desarrollo del modelo. Pero antes de estructurar en forma matemática el problema es necesario examinar los factores identificados en la etapa 1, para diferenciar entre las variables controlables y las no controlables. |
| | En este etapa, las variables controlables pueden manipularse o modificarse por quien toma las decisiones; lo que no sucede con las no controlables. |
| | Para ayudar a plantear el modelo matemático, quien tome las decisiones deberá ubicar las variables controlables más relevantes. Después, con base en estas variables y relaciones clave identificadas y documentadas en el modelo verbal, el constructor del modelo estructurará uno que describa en términos matemáticos el problema. Aunque puede ser necesario realizar algunas consideraciones que limiten al problema real para que éste pueda resolverse. Con frecuencia es indispensable probar un planteamiento inicial del modelo para determinar las consideraciones a realizarse. |

| | |
|---|---|
| *Generación de una solución.* | En este momento, se crea el algoritmo o proceso de solución, es la etapa 3. |
| | En la práctica, existe un cierto grado de retroalimentación entre las etapas 2 y 3, dado que debe tenerse plena seguridad de que el problema planteado en la etapa 2 satisface todas las condiciones que el algoritmo utilizará en la 3. Pero hay que tener precaución al utilizar el algoritmo en este punto, porque un proceso de solución no se limita a un algoritmo. |
| | Además, también los métodos heurísticos y la simulación son procesos para resolver determinados problemas. Aunque se ha enfatizado el algorítmico porque se puede generalizar, y es el más utilizado para resolver la mayoría de los problemas que enfrentan las empresas. |

| | |
|---|---|
| *Prueba y evaluación de la solución.* | En este paso, denominado etapa 4, se evalúa y prueba el modelo adoptado o desarrollado en la etapa anterior, con el objeto de determinar si produce resultados útiles para el problema original. |
| | Con este propósito, existen diversos procedimientos. Por ejemplo, quien toma las decisiones simplemente puede examinar los resultados y hacer algún juicio sobre cuán razonables pueden ser. O bien, adoptar un procedimiento de prueba mediante el cual se empleen situaciones históricas como modelo base, lo que significa que se introducirá información proveniente de una decisión previa al modelo y comparar los resultados con lo que ocurrió en la realidad. |
| | Sin importar cuál de estos procesos de prueba se utilice, el modelo debe modificarse si no satisface las necesidades de quien toma las decisiones. |
| | Con bastante frecuencia el proceso de revisión implica añadir y eliminar variables, pero podría implicar volver al problema observado originalmente. |

| | |
|---|---|
| *Implante.* | Es la etapa 5, cuando se implanta el modelo. Aunque se debe aclarar que el implante comienza el primer día del proyecto y no cuando el modelo se ha desarrollado y ya está operando. Es decir, el implante no significa que quien construyó el modelo se lo entrega a los administradores y luego se retira del proyecto; no, debe trabajar con quien toma las decisiones para identificar apropiadamente el problema (etapa 1), obtener retroalimentación con respecto a la validez del problema (etapa 4) y colaborar para implantar y utilizar el modelo. |

| | |
|---|---|
| *Evaluación.* | Última fase del proceso de solución, o etapa 6. Consiste en la evaluación y revisión del modelo, dado que no es raro que un modelo de investigación de operaciones/ciencia de la administración se utilice en forma repetitiva en el análisis de problemas de decisión. |

El modelo debe evaluarse en forma continua para determinar si los valores de los parámetros han cambiado y/o para juzgar si el modelo sigue satisfaciendo las metas de quien toma las decisiones. Si los rasgos del problema cambian, o no se están cumpliendo los propósitos de quien toma las decisiones, deberá considerarse una modificación del modelo. Se utiliza la expresión “considerarse” porque debe contrastarse el costo de cambiar el modelo con los ahorros que se lograrían con la modificación. Si el costo de la modificación supera los ahorros, entonces debe descontinuarse el proyecto. Es aquí donde los administradores pueden tener una mala experiencia con los modelos de investigación de operaciones/ciencia de la administración; si no reconocen el momento en que el proyecto excede su utilidad, los resultados deficientes de periodos posteriores de empleo del modelo pueden opacar su desempeño previo, cuando el modelo en verdad resolvía el problema.

# RESUMEN

La investigación de operaciones es una técnica utilizada de forma cotidiana en la práctica de la administración por parte de las entidades para llevar a cabo una correcta toma de decisiones. Entre las empresas que la emplean, están las dedicadas a la producción de bienes y servicios de diversos sectores industriales; así como las instituciones financieras enfocadas al servicio de toda clase de productos financieros.

La investigación de operaciones tiene sus inicios durante la Segunda Guerra Mundial, en octubre de 1954, con la publicación de la primera edición de la revista *Management Science*. Pero sus comienzos datan de 1937, cuando en la Gran Bretaña se reunió un equipo de trabajo conformado por matemáticos, ingenieros y científicos en áreas básicas para estudiar los problemas estratégicos y tácticos asociados con la defensa del país. El éxito de estas actividades hizo que en Estados Unidos se emprendieran trabajos similares.

Concluida la Segunda Guerra Mundial, muchos de quienes colaboraron en la investigación de operaciones durante el conflicto bélico se dieron cuenta de que varios métodos y técnicas aplicados para resolver problemas militares, también se podían aprovechar en la industria. Sin embargo, estos conceptos e ideas comenzaron a ponerse a disposición de las empresas de los distintos sectores industriales del país hasta la década de 1950, cuando se iniciaba el desarrollo y comercio de la computación.

Hoy, es fácil encontrar numerosos casos en los que los conceptos de investigación de operaciones se han aplicado a distintas áreas funcionales que componen una empresa: compras, mercadotecnia, contabilidad, planeación financiera, finanzas, entre otras.

Aunque la Gran Bretaña tiene el mérito de iniciar la investigación de operaciones como disciplina, los investigadores norteamericanos han hecho contribuciones más importantes a su evolución.

Hoy día, la ciencia de la administración ha madurado de manera vertiginosa y una gran cantidad de los problemas de implante que aparecieron en la década de 1960 y a principios de la de 1970 se han superado gracias a los progresos de la tecnología de la computadora y a cambios en los currículos académicos.

Se puede afirmar, entonces, que hay un mayor énfasis en la implantación y aplicación de técnicas y modelos, además de la disponibilidad de las computadoras. Esto ha ampliado en gran medida el alcance y magnitud de los problemas que es posible analizar.

En consecuencia, el diseño de sistemas computarizados de tiempo compartido ha ayudado al área de implante en tanto permite a quienes toman las decisiones interactuar en forma directa con los modelos de la ciencia de la administración. Como resultado, ha disminuido la necesidad de que un experto en ciencia de la administración actúe como intermediario entre el administrador y el modelo, por consiguiente, posibilita que el administrador explore preguntas hipotéticas con el objeto de comprender y valorar mejor el potencial del modelo.

A su vez, los sistemas de tiempo compartido también han puesto el poder de las computadoras a disposición de un gran número de empresas, ampliando así la aplicación potencial de las técnicas de la investigación de operaciones. Este grupo de técnicas se han aplicado de manera exitosa a una diversidad cada vez mayor y compleja de problemas en las áreas de los negocios, gobiernos, economía, finanzas, salud, educación, etcétera.

Un punto central de la investigación de operaciones es la optimización. Conocida también como *modelo de optimización*, es un modelo normativo, prescriptivo, porque señala el curso de acción que debe seguir el administrador para alcanzar un objetivo previamente definido.

Un modelo de optimización puede contener una serie de sub-modelos descriptivos, pero en este modelo es posible determinar un curso de acción óptimo o mejor.

Independientemente del sector donde trabaje el administrador, privado o público, una de sus principales funciones es resolver problemas. En este orden, la construcción de modelos es un medio que le permite analizarlos para examinar diferentes alternativas y elegir la más viable. Este recurso no es una idea nueva; es un proceso aplicado en forma cotidiana, con frecuencia de forma inconsciente, en distintas situaciones de problemas básicos.

Una primera clasificación de los modelos matemáticos incluye los descriptivos y normativos. Una segunda división los distingue en cuatro sub-clasificaciones (en realidad, ésta es una sub-clasificación de la primera): determinísticos y estocásticos, lineales y no lineales, estáticos y dinámicos, y simulación.

La metodología de la investigación de operaciones consiste en los procesos de solución empleados para resolver los problemas de las empresas. Y se refiere también a las etapas de este proceso.

En cuanto a los procesos de solución que permiten llegar a soluciones óptimas o casi óptimas, encontramos los algoritmos, los métodos heurísticos y la simulación.

Hay un proceso de solución de problemas en cualquier estudio de ciencia de la administración/investigación de operaciones que incluye las etapas de identificación, observación y planteamiento del problema; construcción del modelo; generación de una solución, prueba y evaluación de la solución; implante; y evaluación.

# BIBLIOGRAFÍA

## SUGERIDA

| # | Autor | Capítulo | Páginas |
|---|---|---|---|
| 1 | Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G. | 1. Introducción a los modelos y a la ciencia de la administración. | 1-22 |

## Bibliografía básica


1. Anderson R. David, Sweeney J. Dennis y Williams A. Thomas, *Métodos cuantitativos para los negocios*, 9.ª ed., México: Thompson, 2004, 822 pp.

2. Eppen, G. D. *et al.*, *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*, 5.ª ed., México: Prentice Hall, 2000, 755 pp.

3. Hiller F. y Lieberman G. J., *Introducción a la investigación de operaciones*, México: McGraw-Hill, 2002, 855 pp.

4. Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G., *Modelos cuantitativos para administración*, 2.ª ed., México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994, 757 pp.

5. Taha A. Hamndy, *Investigación de operaciones,* 5.ª ed., México: Alfa Omega, 2000, 960 pp.

6. Wayne L. Winston, *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos,* México: Thompson, 2005, 1418 pp.

## Bibliografía complementaria

1. Bueno A. G. de., *Introducción a la programación lineal y al análisis de sensibilidad*, México: Trillas 1990, 1889 pp.

2. Daellenback H., George J. y D. Menickle, *Introducción a técnicas de investigación de operaciones,* México: CECSA, 1986, 771 pp.

## Sitios de internet

| Sitio | Descripción |
|---|---|
| http://antiguo.itson.mx/dii/elagarda/apagina2001/PM/uno.html | Introducción a la investigación de operaciones. |
| http://www.investigaciondeoperaciones.net/historia_de_la_investigacion_de_operaciones.html | Historia de la investigación de operaciones. |
| http://www.fing.edu.uy/inco/cursos/io/archivos/teorico/todo.pdf | Introducción. |

# UNIDAD 2

# Programación lineal

SUAYED UNAM
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012 2016 actualizado

# OBJETIVO PARTICULAR

El alumno aprenderá los fundamentos, métodos y modelos de la programación lineal.

# TEMARIO DETALLADO

## (16 horas)

| 2. Programación lineal |
|---|
| 2.1. Concepto de programación lineal |
| 2.2. Métodos de solución |
| 2.2.1. Método gráfico |
| 2.2.2. Método dual-simplex |
| 2.2.3. Mediante el uso de computadora |
| 2.3. Modelo de transporte |
| 2.4. Modelo de asignación |

# INTRODUCCIÓN

Hoy día, los gerentes de las empresas le dan mucha importancia a la práctica de la administración, más cuando se encuentra enfocada al campo de la investigación de operaciones. En este orden, la presente unidad aborda una de las aplicaciones de mayor uso en la investigación de operaciones, la programación lineal.

Como se sabe, en la práctica la administración dispone de una serie de elementos como la mano de obra, dinero, materias primas y equipos, cuyo suministro es limitado o restringido.

Si los recursos de una empresa fueran ilimitados, no habría necesidad de las herramientas de la ciencia de la administración. Es decir, las organizaciones deben hallar la mejor asignación de sus recursos para maximizar sus ganancias y minimizar sus costos. Lo que no resulta sencillo, de allí la pertinencia de métodos cuantitativos y modelos matemáticos que faciliten y simplifiquen este trabajo.

En este sentido, la programación lineal –técnica cuantitativa– permite determinar la mejor asignación de los recursos limitados de una empresa, y está referida a la resolución de un modelo matemático con las siguientes características:

- Una función objetivo de tipo lineal cuyo fin será maximizar o minimizar, según sea el caso.
- Un conjunto de restricciones lineales en donde se distinguen los disponibles con que se cuenta según sea el caso.
- Una serie de variables de decisión sujetas a valores no negativos.

En la resolución se emplean variables de holgura o de excedente, para poder escribir las restricciones de menor o igual que, mayor o igual que, o también en forma de igualdad. El valor de una variable de holgura o de excedente generalmente se puede interpretar como la cantidad no usada de un recurso.

La programación lineal tiene como objetivo primordial buscar la solución que permita resolver un problema a fin de dar una respuesta que posibilite al gerente tomar las decisiones más pertinentes para el beneficio de la empresa en un momento determinado.

Asimismo, en esta unidad se abordan el concepto de programación lineal y los métodos de solución: gráfico, simplex y su forma dual. De igual manera, se presentan algunos paquetes de programación para resolver problemas de programación lineal mediante la computadora; y todo lo referente al modelo de transporte y de asignación.

# 2.1. Concepto de programación lineal

Como se analizó en la unidad anterior, la investigación de operaciones se conoce también como ciencia de la administración; mientras que la administración de una empresa es el área profesional en forma práctica, pero ésta recurre a la ciencia de la administración cotidianamente con el propósito de resolver un determinado problema en la organización y tomar una decisión acertada.

Por otra parte, la administración de una empresa implica tener disponibles una serie de factores como la mano de obra, dinero, materias primas y equipos o máquinas, en donde el suministro de estos factores es limitado. Si estos recursos fueran ilimitados, no habría necesidad de herramientas cuantitativas para la administración de una empresa, como la programación lineal.

Muchas empresas tienen recursos restringidos, por lo que deben encontrar su mejor asignación, a fin de aumentar al máximo sus ganancias, beneficios o ingresos y, por consiguiente, reducir al mínimo sus costos o egresos. Y para lograrlo es indispensable utilizar métodos cuantitativos y modelos matemáticos. Uno de estos métodos es la programación lineal, técnica matemática que permite determinar la mejor forma para asignar los recursos. Además es un enfoque para solucionar problemas definidos y sirve como ayuda para que los gerentes tomen decisiones pertinentes para el desarrollo y funcionamiento de las empresas.

La programación lineal es un método de solución de problemas previamente definidos, en el cual una función objetivo debe maximizarse o minimizarse según corresponda, considerando una serie de restricciones que reducen el grado en el que puede perseguirse lo que se pretende de la función objetivo, tomando en cuenta la no negatividad de las variables de decisión involucradas en las restricciones que lo definen.

Para llevar a cabo el planteamiento del modelo, deben seguirse las condiciones en el orden que presenta la definición anterior. Luego, un problema puede solucionarse a través de la programación lineal si se cumple lo siguiente:

1. Plantear la función objetivo para el problema en términos de las variables de decisión, es decir, como $x_1$, $x_2$, ... , $x_n$.
2. Las variables del problema deben interrelacionarse para generar el resultado total del problema (esto puede dejarlo de hacer una variable para permitir que aumente la otra variable).
3. Las restricciones vinculadas con la disposición de recursos, la satisfacción de necesidades o el surtimiento de la demanda se establecerán de forma lineal.
4. Los valores de las variables de decisión en la respuesta pueden ser expresados en forma fraccionaria, pero satisfaciendo la condición de ser mayores o iguales a cero.

Por tanto, una programación lineal está referida a la resolución de un modelo matemático con las siguientes características, como se muestra en el modelo 2.1.1:

Maximizar o minimizar: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots\ldots + c_nx_n$

Modelo 2.1.1

Sujeto a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n\ [<=, >=, =]\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n\ [<=, >=, =]\ b$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n\ [<=, >=, =]\ b_3$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n\ [<=, >=, =]\ b_n$$

Donde: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n >= 0$

El concepto de programación lineal expresado de manera simplificada en el modelo anterior resulta difícil a primera vista, pero será más accesible con el planteamiento y solución de algunos problemas previamente definidos, que exponemos a continuación.

**Problema 2.1.1**

Una compañía decide hacer un estudio basado en la producción de sus automóviles. Se sabe que existen dos productos considerados más vendibles: el compacto y el pick-up.

Según el estudio, por cada compacto vendido se ganan $300 dólares y por cada pick-up, $400 dólares. Además, se analizó que por cada compacto se invierten 5 horas de fabricación; y por cada pick-up, 7 (la disponibilidad total que se tiene es de 900 horas). También se sabe que un tope máximo de automóviles vendidos por semana es de 165 compactos y 120 pick-up.

Se pide construir un modelo de programación lineal que persista en maximizar la producción.

Solución

Para definir y plantear el modelo matemático correspondiente a las necesidades de la compañía, se deben asignar a las variables de decisión, que son las siguientes.

Sean $x_1$ y $x_2$ las variables de decisión, las cuales se definen a través de las siguientes proposiciones abiertas:

$\boldsymbol{X1\{x1|x1 \text{ es un auto compacto}\}}$

$\boldsymbol{X2\{x2|x2 \text{ es una pick} - \text{up}\}}$

Luego, se define la función objetivo, que resulta como se muestra en la Ec. 2.1.1:

Maximizar: $Z = c_1X_1 + c_2X_2$ Ec.2.1.1

Donde: $c_1 = 300$ y $c_2 = 400$

En la Ec. 2.1.1, se sustituyen los parámetros $c_1$ y $c_2$, y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.2:

Maximizar: $Z = 300x_1 + 400x_2$ Ec.2.1.2

Después, se definen las restricciones que limitan al problema, enunciadas a continuación.

Restricción uno: disponibilidad de tiempo

La compañía sólo dispone de 900 horas en total para fabricar la mayor cantidad de autos compactos y pick-ups que maximicen la producción, sabiendo que con 5 horas se puede fabricar un compacto y con 7 una pick-up. Por tanto, la restricción de disponibilidad de tiempo queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.3:

$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 <= b_1$ Ec.2.1.3

Donde: $a_{11} = 5$ horas; $a_{12} = 7$ horas y $b_1 = 900$ horas

En la Ec. 2.1.3, se sustituyen los parámetros $a_{11}$, $a_{12}$ y $b_1$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.4:

$5x_1 + 7x_2 <= 900$ Ec.2.1.4

Restricción dos: máxima venta de autos compactos

Esta restricción se refiere a que la compañía sabe que un tope máximo de automóviles vendidos es de 165 compactos por semana. Luego, la restricción de máxima venta de compactos queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.4:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 <= b_2 \qquad \text{Ec.2.1.5}$$

Donde: $a_{21} = 1$; $a_{22} = 0$ y $b_2 = 165$

En la Ec. 2.1.5, se sustituyen los parámetros $a_{21}$, $a_{22}$ y $b_2$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.6:

$$x_1 <= 165 \qquad \text{Ec.2.1.6}$$

Restricción tres: máxima venta de pick-ups

La compañía sabe que un tope máximo de automóviles vendidos es de 120 pick-ups por semana. Entonces, la restricción de máxima venta de pick-up queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.7:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 <= b_3 \qquad \text{Ec.2.1.7}$$

Donde: $a_{31} = 0$; $a_{32} = 1$ y $b_3 = 120$

En la Ec. 2.1.7, se sustituyen los parámetros $a_{31}$, $a_{32}$ y $b_3$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.8:

$$x_2 <= 120 \qquad \text{Ec.2.1.8}$$

Posteriormente, se establece la no negatividad de las variables de decisión; lo que significa que $x_1$, $x_2$ >= 0.

Por último, el modelo de programación lineal que permite maximizar la producción de autos compactos y pick-ups por parte de la compañía es el resultante de las Ecs. 2.1.2, 2.1.4, 2.1.6 y 2.1.8, mostrado en el modelo 2.1.2:

Maximizar: $Z = 300x_1 + 400x_2$

Modelo 2.1.2

Sujeto a: $5x_1 + 7x_2 <= 900$

$x_1 <= 165$

$x_2 <= 120$

Donde: $x_1, x_2 >= 0$

**Problema 2.1.2**

Un inversionista decide seguir el estudio durante un pequeño lapso determinado por él de dos acciones del sector industrial papelero, específicamente las de Kimberly Clark de México y las de Loreto y Peña Pobre. Durante este seguimiento, encontró que la máxima utilidad esperada por ambas empresas era del 27%, sabiendo que existía un alto volumen en las operaciones. También observó que el máximo volumen vendido de acciones de Kimberly Clark de México fue de 4,700 en ese periodo; y de Loreto y Peña Pobre, de 2,500. Asimismo, conoció que el precio de mercado de cada una fue de $31.80 para Kimberly Clark de México, y de $21.20 para Loreto y Peña Pobre.

Entonces, se pide construir un modelo de programación lineal que permita maximizar la utilidad o beneficio de la cartera.

Solución

Para definir y plantear el modelo matemático correspondiente a las necesidades de la compañía, se deben asignar las variables de decisión, que son las siguientes.

Sean $x_1$ y $x_2$ las variables de decisión, las cuales se definen a través de las siguientes proposiciones abiertas, donde:

$\boldsymbol{X1} = \{\boldsymbol{x1} | \boldsymbol{x1}\ \textbf{es una acción de Kimberly Clark de México}\}$

$\boldsymbol{X2} = \{\boldsymbol{x2} | \boldsymbol{x2}\ \textbf{es una acción de Loreto y Peña Pobre}\}$

Luego, se define la función objetivo, que resulta como se muestra en la Ec. 2.1.9:

Maximizar: $Z = c_1X_1 + c_2X_2$ Ec.2.1.9

Donde: $c_1 = 31.80$ y $c_2 = 21.20$

En la Ec. 2.1.9, se sustituyen los parámetros $c_1$ y $c_2$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.10:

Maximizar: $Z = 30.80x_1 + 21.20x_2$ Ec.2.1.10

Después, se definen las restricciones que limitan al problema, descritas a continuación.

Restricción uno: rendimiento total

Esta restricción se refiere a que el analista encontró que la máxima utilidad esperada por las dos acciones en el lapso determinado por él en conjunto fue del 27%. Así, la restricción de rendimiento total queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.11:

$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 <= b_1$ Ec.2.1.11

Donde: $a_{11} = 1\%$; $a_{12} = 1\%$ y $b_1 = 27\%$

En la Ec. 2.1.11, se sustituyen los parámetros $a_{11}$, $a_{12}$ y $b_1$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.12:

$x_1 + x_2 <= 27$ Ec.2.1.12

Restricción dos: máximo volumen de Kimberly Clark de México

El analista sabe que el máximo volumen vendido de las acciones de Kimberly Clark de México fue de 4,700 títulos. Por tanto, la restricción de máximo volumen de Kimberly Clark de México queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.13:

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 <= b_2$ Ec.2.1.13

Donde: $a_{21} = 1$; $a_{22} = 0$ y $b_2 = 4700$

En la Ec. 2.1.13, se sustituyen los parámetros $a_{21}$, $a_{22}$ y $b_2$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.14:

$x_1 <= 4700$ Ec.2.1.14

Restricción tres: máximo volumen de Loreto y Peña Pobre

El analista sabe que el máximo volumen vendido de las acciones de Loreto y Peña Pobre fue de 2,500 títulos. Luego, la restricción de máximo volumen de Loreto y Peña Pobre queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.15:

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 <= b_3$ Ec.2.1.15

Donde: $a_{31} = 0$; $a_{32} = 1$ y $b_3 = 2500$

En Ec. 2.1.15, se sustituyen los parámetros $a_{31}$, $a_{32}$ y $b_3$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.16:

$$x_2 <= 2500 \qquad \text{Ec.2.1.16}$$

Enseguida, se establece la no negatividad de las variables de decisión, lo que significa que $x_1, x_2 >= 0$.

Por último, el modelo de programación lineal que permite maximizar la utilidad o beneficio de la cartera compuesta por las acciones de Kimberly Clark de México y Loreto y Peña Pobre resulta de las Ecs. 2.1.10, 2.1.12, 2.1.14 y 2.1.16, mostrado en el modelo 2.1.3:

Maximizar: $Z = 31.80x_1 + 21.20x_2$

Modelo 2.1.3

Sujeto a: $x_1 + x_2 <= 27$

$x_1 <= 4700$

$x_2 <= 2500$

Donde: $x_1, x_2 >= 0$

**Problema 2.1.3**

Una compañía aseguradora decide realizar un estudio sobre los accidentes automovilísticos con el propósito de ampliar un mercado de las pólizas de seguro que ofrece. En una semana se hicieron 1500 observaciones para tres modelos de automóviles: Ford, Chrysler y General Motors. El número total de accidentes identificados fue de 680. La cantidad de pólizas vendidas para la marca Ford fue de 120; para Chrysler, 1,365; y para General Motors, 95. También se advirtió que la utilidad que gana la compañía de seguros por la venta de cada póliza fue de \$1000.00 para la Ford, \$690.00 para Chrysler y \$980.00 para General Motors.

Se necesita construir un modelo de programación lineal que permita maximizar la venta de las pólizas.

Solución

Para definir y plantear el modelo matemático correspondiente a las necesidades de la compañía, se deben asignar a las variables de decisión, como sigue.

Sean $x_1$, $x_2$ y $x_3$ las variables de decisión, las cuales se definen a través de las siguientes proposiciones abiertas, donde:

$$\boldsymbol{X1} = \{\boldsymbol{x1} | \boldsymbol{x1} \textbf{ es una póliza vendida de auto marca Ford}\}$$
$$\boldsymbol{X2} = \{\boldsymbol{x2} | \boldsymbol{x2} \textbf{ es una póliza vendida de auto marca Chrysler}\}$$
$$\boldsymbol{X3} = \{\boldsymbol{x3} | \boldsymbol{x3} \textbf{ es una póliza vendida de auto marca General Motors}\}$$

Después, se define la función objetivo, que resulta como se muestra en la Ec. 2.1.17:

Maximizar: $Z = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$

Ec.2.1.17

Donde: $c_1 = 1000$; $c_2 = 690$ y $c_3 = 980$

En la Ec. 2.1.17, se sustituyen los parámetros $c_1$, $c_2$ y $c_3$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.18, como sigue:

Maximizar: $Z = 1000x_1 + 690x_2 + 980x_3$ Ec.2.1.18

Luego, se definen las restricciones que limitan el problema, expuestas a continuación.

Restricción uno: observación total

La compañía de seguros realizó 1500 observaciones durante una semana de los accidentes de tres marcas de automóviles: Ford, Chrysler y General Motors. Por tanto, la restricción de observación total queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.19:

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = b_1$$

Ec.2.1.19

Donde: $a_{11} = 1$; $a_{12} = 1$, $a_{13} = 1$ y $b_1 = 1500$

En la Ec. 2.1.11, se sustituyen los parámetros $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{13}$ y $b_1$ y resulta lo siguiente, expresado la Ec. 2.1.20, como sigue:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1500 \qquad \text{Ec.2.1.20}$$

Restricción dos: observaciones de accidentes totales

La compañía de seguros midió en el lapso de una semana que el número de accidentes totales observados en forma conjunta para las tres marcas de automóviles fue de 680. Por tanto, la restricción de observaciones de accidentes totales queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.21:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

Ec.2.1.21

Donde: $a_{21} = 1$; $a_{22} = 1$, $a_{23} = 1$ y $b_2 = 680$

En la Ec. 2.1.21, se sustituyen los parámetros $a_{21}$, $a_{22}$ y $b_2$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.22:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 680 \qquad \text{Ec.2.1.22}$$

Restricción tres: total de ventas de las pólizas de la marca Ford

La compañía de seguros observó que en una semana se vendieron como máximo 120 pólizas de seguro de la marca Ford. Entonces, la restricción de total de ventas de las pólizas de esta marca queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.23:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 <= b_3 \qquad \text{Ec.2.1.23}$$

Donde: $a_{31} = 1$; $a_{32} = 0$, $a_{33} = 0$ y $b_3 = 120$

En la Ec. 2.1.23, se sustituyen los parámetros $a_{31}$, $a_{32}$, $a_{33}$ y $b_3$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.24:

$$x_1 <= 120 \qquad \text{Ec.2.1.24}$$

Restricción cuatro: total de ventas de las pólizas de la marca Chrysler

La compañía de seguros observó que en el lapso comprendido en una semana se vendieron como máximo 1,365 pólizas de Chrysler. Luego, la restricción total de ventas de las pólizas de esta marca queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.25:

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 <= b_4 \qquad \text{Ec.2.1.25}$$

Donde: $a_{41} = 0$; $a_{42} = 1$, $a_{43} = 0$ y $b_4 = 1365$

En la Ec. 2.1.25, se sustituyen los parámetros $a_{41}$, $a_{42}$, $a_{43}$ y $b_4$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.26:

$$x_2 <= 1365 \qquad \text{Ec.2.1.26}$$

Restricción cinco: total de ventas de las pólizas de la marca General Motors

La compañía de seguros observó que en una semana se vendieron como máximo 95 pólizas de General Motors. Entonces, la restricción total de ventas de las pólizas de esta marca queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.27:

$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 <= b_5 \qquad \text{Ec.2.1.27}$$

Donde: $a_{51} = 0$; $a_{52} = 0$, $a_{53} = 1$ y $b_5 = 95$

En la Ec. 2.1.27, se sustituyen los parámetros $a_{51}$, $a_{52}$, $a_{53}$ y $b_5$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.28:

$$x_3 <= 95 \qquad \text{Ec.2.1.28}$$

Posteriormente, se establece la no negatividad de las variables de decisión, lo que significa que $x_1$, $x_2$, $x_3 >= 0$.

Finalmente, el modelo de programación lineal que permite maximizar la venta de pólizas de seguro para las tres marcas de automóviles es el resultante de las Ecs. 2.1.20, 2.1.22, 2.1.24 y 2.1.26, mostrado en el modelo 2.1.4, como sigue:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximizar:} & Z = 1000x_1 + 690x_2 + 980x_3 & \\
 & & \text{Modelo 2.1.3} \\
\text{Sujeto a:} & x_1 + x_2 + x_3 = 1500 & \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 680 & \\
 & x_1 \leq 120 & \\
 & x_2 \leq 1365 & \\
 & x_3 \leq 95 & \\
\text{Donde:} & x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

**Problema 2.1.4**

Una empresa dedicada a producir muebles para comedores está tratando de decidir sobre las cantidades de producción para dos artículos: mesas y sillas. Se cuenta con 96 unidades de material y 72 horas de mano de obra. Cada mesa requiere 12 unidades de material y 6 horas de mano de obra. Por otro lado, las sillas demandan 8 unidades de material cada una y 12 horas de mano de obra. El margen de contribución es el mismo tanto para las mesas como para las sillas, es decir, $5.00 por unidad. Y la empresa fabricante prometió construir al menos 2 mesas.

Se pide obtener el modelo de programación lineal que permita maximizar la producción.

Solución

Para definir y plantear el modelo matemático correspondiente, se deben asignar a las variables de decisión, como sigue.

Sean $x_1$ y $x_2$ las variables de decisión, las cuales se definen a través de las siguientes proposiciones abiertas, donde:

$X1 = \{x1|x1 \textbf{ es un artículo producido de mesa}\}$

$X2 = \{x2|x2 \textbf{ es un artpículo producido de silla}\}$

Posteriormente, se define la función objetivo, que resulta como se muestra en la Ec. 2.1.29:

Maximizar: $Z = c_1X_1 + c_2X_2$

Ec.2.1.29

Donde: $c_1 = 5.00$ y $c_2 = 5.00$

En la Ec. 2.1.29, se sustituyen los parámetros "$c_1$" y "$c_2$" y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.30:

Maximizar: $Z = 5.00x_1 + 5.00x_2$ Ec.2.1.30

Enseguida, se definen las restricciones que limitan al problema.

Restricción uno: mano de obra total

La empresa cuenta con un disponible total de 72 horas como máximo de mano de obra, de las cuales se requieren 6 para fabricar una mesa y 12 horas para una silla. Por consiguiente, la restricción de mano de obra total queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.31:

$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 <= b_1$

Ec.2.1.31

Donde: $a_{11} = 6$; $a_{12} = 12$ y $b_1 = 72$

En la Ec. 2.1.31, se sustituyen los parámetros $a_{11}$, $a_{12}$ y $b_1$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.32:

Maximizar: $6x_1 + 12x_2 <= 72$ Ec.2.1.32

Restricción dos: unidades de material total

La empresa cuenta como máximo con un disponible en total de 96 unidades de material, de las cuales se requieren 12 para fabricar una mesa y 8 para una silla. Así, la restricción de unidades de material total queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.33:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 <= b_2$$

Ec.2.1.33

Donde: $a_{21} = 12$; $a_{22} = 8$ y $b_2 = 96$

En la Ec. 2.1.33, se sustituyen los parámetros $a_{21}$, $a_{22}$ y $b_2$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.34:

$$12x_1 + 8x_2 <= 96$$ Ec.2.1.34

Restricción tres: promesa de la empresa de producir al menos dos mesas

La empresa fabricante prometió producir al menos dos mesas. Luego, la restricción referida a la promesa de la empresa de producir mínimo dos sillas queda en forma general como se muestra en la Ec. 2.1.35:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 >= b_3$$

Ec.2.1.35

Donde: $a_{31} = 1$; $a_{32} = 0$ y $b_3 = 2$

En la Ec. 2.1.35, se sustituyen los parámetros $a_{31}$, $a_{32}$ y $b_3$ y resulta lo siguiente, expresado en la Ec. 2.1.36:

$$x_1 >= 2 \qquad \text{Ec.2.1.36}$$

Después, se establece la no negatividad de las variables de decisión, lo que significa que $x_1$, $x_2$ >= 0.

Finalmente, el modelo de programación lineal que permite maximizar la producción compuesta por los productos consistentes en mesas y silla es el resultante de las Ecs. 2.1.30, 2.1.32, 2.1.34 y 2.1.36, mostrado en el modelo 2.1.4:

$$\begin{array}{lrl} \text{Maximizar:} & Z = 5.00x_1 + 5.00x_2 & \\ & & \text{Modelo 2.1.4} \\ \text{Sujeto a:} & 6x_1 + 12x_2 <= 72 & \\ & 12x_1 + 8x_2 <= 96 & \\ & x_1 \qquad >= 2 & \\ \text{Donde:} & x_1, x_2 >= 0 & \end{array}$$

A partir de los problemas anteriores, se puede inferir que la programación lineal representa una técnica matemática que permite determinar la mejor manera de asignar los recursos limitados que poseen las empresas. O sea, ayuda a solucionar problemas definidos y apoya a los gerentes para una toma de decisiones más pertinente y adecuada en beneficio de las organizaciones, ya sean de bienes y productos terminados derivados de diversos sectores industriales, o las dedicadas a los servicios de bienes y productos intermedios y servicios financieros.

# 2.2. Métodos de solución

A partir de la programación lineal, las empresas se plantean los problemas que enfrentan, y para resolverlos aplican algoritmos que generan modelos matemáticos que pueden ser resueltos con diversos métodos, explicados a continuación.

## 2.2.1. Método grafico

Este método permite resolver problemas en donde se involucran solamente dos variables de decisión. Éstas se representan en forma esquemática en un diagrama cartesiano, a partir del cual se busca la solución óptima por medio de ensayo y error, o de un análisis algebraico cuando es necesario.

**Pasos de análisis**

**a.** Definir el planteamiento del problema. Puntualizar en forma clara y contundente las variables de decisión, así como los parámetros correspondientes, para que éstos se plasmen tanto en la función objetivo como en el conjunto de restricciones involucradas, respetando el supuesto de la no negatividad de las variables de decisión.

**b.** Representar en un gráfico a través de un diagrama cartesiano cada una de las restricciones involucradas en el modelo de programación lineal, a fin de observar el trazo en cada una de ellas por medio de la determinación de sus puntos de corte, mediante el método de ensayo y error, o por un análisis básico de álgebra de ecuaciones.

Además, con respecto a estas representaciones gráficas correspondientes a las restricciones, se debe tomar en cuenta lo siguiente:

- Cuando las restricciones son expresadas por medio de ecuaciones de primer grado, se dice que son *lineales*.
- Cuando las restricciones son expresadas por medio de ecuaciones de segundo o más grados, se dice que son *no lineales.*

**c.** Determinar la región factible de tal forma que se encuentren todos los puntos que satisfagan simultáneamente todas las restricciones involucradas en el problema.

**d.** Evaluar cada uno de los puntos determinados que limitan la región factible del modelo en cuestión en la función objetivo, a fin de ir determinando el valor de ésta y que, por consiguiente, muestre el comportamiento de las variables de decisión en cada uno de esos puntos, e irlas trazando ya sea en forma experimental o por medio de un análisis algebraico.

**e.** Cualquier valor obtenido por la función objetivo con el valor máximo obtenido representará una solución óptima para el modelo previamente planteado.

**f.** Si el modelo planteado consistiera en minimizar, entonces se buscará una solución óptima que realice el efecto contrario al señalado en los incisos d y e respectivamente.

**g.** Determinar el resultado y establecer las conclusiones pertinentes a la solución óptima del modelo en cuestión.

Con base en expuesto anteriormente, se puede concluir que el método gráfico es muy utilizado por los gerentes para resolver problemas de programación lineal.

Aunque está limitado para dos variables de decisión, ofrece al analista un panorama de lo que debe hacer para cuando sus modelos planteados sean de estas características.

Para que se puedan entender los pasos que definen cómo se lleva a cabo el método algebraico, a fin de resolver un modelo matemático de programación lineal, se explicará el método resolviendo los problemas 2.1.1 y 2.1.4 del subtema 2.1.

**Problema 2.2.1.1**

La compañía del problema 2.1.1, de acuerdo con las condiciones previamente establecidas, determinó el siguiente modelo de programación lineal.

Maximizar: $Z = 300x_1 + 400x_2$

Modelo 2.2.1.1

Sujeto a: $5x_1 + 7x_2 <= 900$

$x_1 <= 165$

$x_2 <= 120$

Donde: $x_1, x_2 >= 0$

Ahora, la compañía quiere conocer la solución óptima que permita maximizar la producción tanto de autos compactos como de pick-ups.

**Solución**

Para determinar la solución óptima del planteamiento del problema definido por la compañía del problema 2.1.1, se utilizará el método gráfico, desarrollando los siguientes pasos.

Paso 1

Se determinan los puntos de corte para cada una de las restricciones involucradas en el modelo matemático. Para la restricción 1 con referencia a la disponibilidad de tiempo, son los siguientes:

Restricción 1: Disponibilidad de Tiempo.

| | |
|---|---|
| Si $x_1 = 0$; se tiene: | Si $x_2 = 0$; se tiene: |
| $5x_1 + 7x_2 <= 900$ | $5x_1 + 7x_2 <= 900$ |
| $5(0) + 7x_2 <= 900$ | $5x_1 + 7(0) <= 900$ |
| $7x_2 <= 900$ | $5x_1 <= 900$ |
| $x_2 \leq \frac{900}{7}$ | $x_1 \leq \frac{900}{5}$ |
| Entonces: | Entonces: |
| $x_2 <= 128.59$ | $x_1 <= 180.00$ |
| Finalmente, el punto es: (0, 128.59) | Finalmente, el punto es: (180.00, 0) |

Para la restricción 2 con referencia a la venta máxima de autos compactos:

<u>Restricción 2</u>: Venta máxima de “Autos compactos”

Si $x_2 = 0, 1, 2, 3, \dots\dots, n$; se tiene:

$x_1$<= 165

Finalmente, el punto es: (165, 0) y (165, 180)

Y para la restricción 3 con referencia a la venta máxima de pick-ups:

<u>Restricción 3</u>: Venta máxima de “Pick-ups”

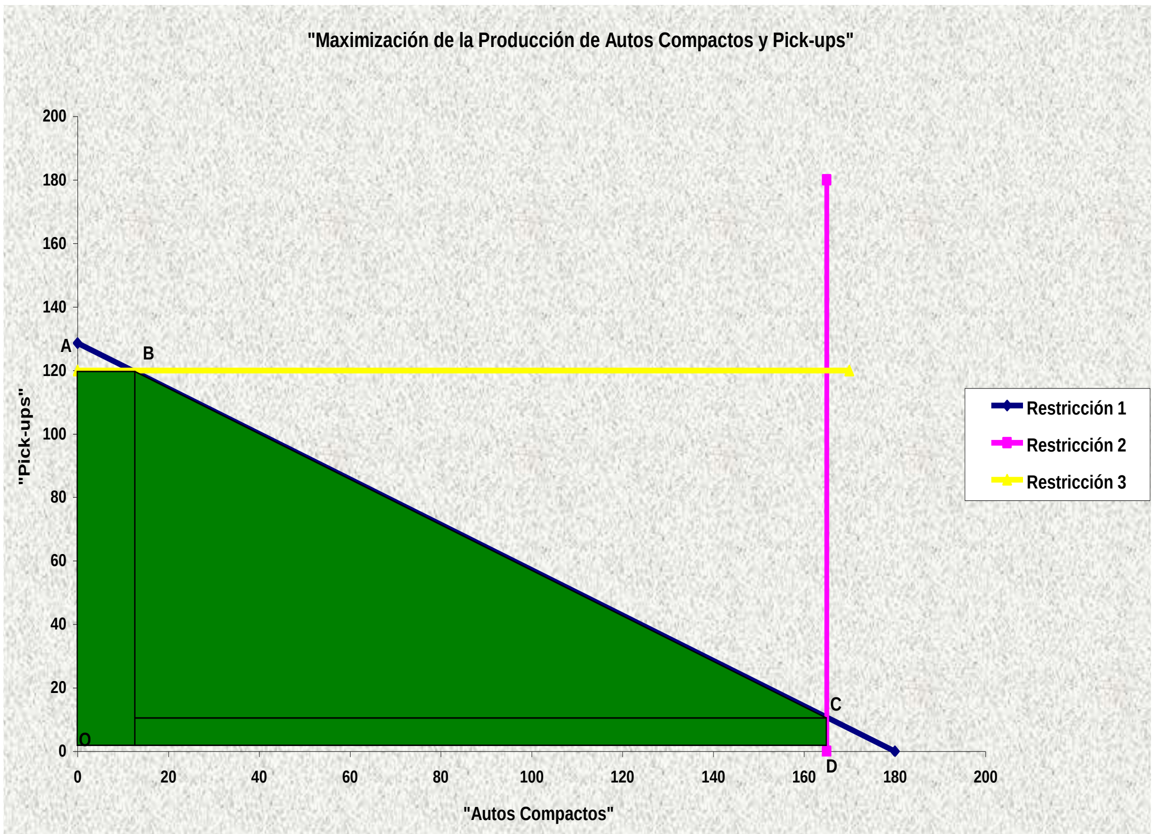
Si $x_2 = 0, 1, 2, 3, \dots\dots, n$; se tiene:

$x_2$<= 120

Finalmente, el punto es: (0, 120) y (170, 120)

Paso 2

Determinados los puntos de corte para cada restricción, se procede a trazar dichas restricciones mediante un diagrama cartesiano a fin de poder visualizar la región factible. Lo que se muestra en la siguiente gráfica:




Paso 3

Visualizada la región factible en la gráfica anterior, se procede a buscar los puntos *b* y *c* que forman parte de la frontera de la región factible y no se conocen con precisión:

Obteniendo el "*Punto B*"; el cual relaciona a la "*Restricción 1*" y a la "*Restricción 3*"; donde:

$$5x_1 + 7x_2 <= 900$$

$$x_2 <= 120$$

Como: $x_2 <= 120$; entonces se obtiene $x_1$; resultado:

$$5x_1 + 7x_2 <= 900$$

$$5x_1 + 7(120) <= 900$$

$$5x_1 + 840 <= 900$$

$$5x_1 <= 900 - 840$$

$$5x_1 <= \ \ 60$$

$$x_1 \leq \frac{60}{5}$$

Entonces:

$$x_1 <= 12.00$$

Finalmente, el punto es: (120, 12)

Obteniendo el "*Punto C*"; el cual relaciona a la "*Restricción 1*" y a la "*Restricción 2*"; donde:

$$5x_1 + 7x_2 <= 900$$

$$x_1 <= 165$$

Como: $x_1 <= 165$; entonces se obtiene $x_2$; resultado:

$$5x_1 + 7x_2 <= 900$$

$$5(165) + 7x_2 <= 900$$

$$825 + 7x_2 <= 900$$

$$7x_2 <= 900 - 825$$

$$7x_2 <= 75$$

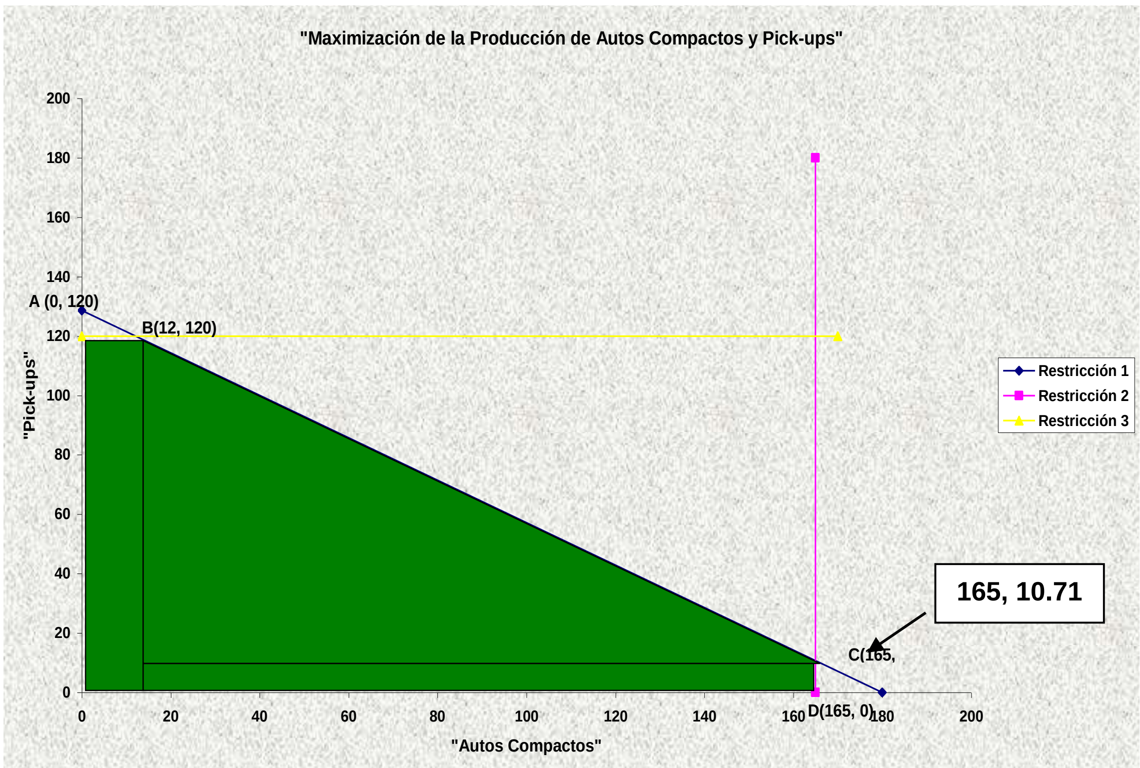
$$x_2 \leq \frac{75}{7}$$

Entonces:

$$x_2 <= 10.71$$

Finalmente, el punto es: (165, 10.71)

Los puntos de corte y los puntos *b* y *c* determinados previamente se pueden visualizar en un diagrama cartesiano. Aquí se distingue con certeza la región factible que permitirá establecer entre qué puntos se halla dicha región. Para problema 2.2.1, esta región se muestra en la gráfica 2.2.2:




Gráfica 2.2.2

En la gráfica anterior, se nota que la región factible está limitada por los puntos O (0, 0), A (0, 120), B (12, 120), C (165, 10.71) y D (165, 0).

Paso 4

Precisados los puntos que limitan la región factible, se determina cuáles cumplen con el propósito de maximizar la función objetivo. Entonces, se evaluará para cada punto la función objetivo cuyos resultados se muestran en el siguiente cuadro:

| Punto | Zmax = $300x_1 + 400x_2$ | Zmax |
|---|---|---|
| (0,0) | Zmax = 300(0) + 400(0) | 0 |
| A (12, 120) | Zmax = 300(12) + 400(120) | 51600 |
| C (165, 10.71) | Zmax = 300(165) + 400(10.71) | 53784 |
| D (165,0) | Zmax = 300(165) + 400(0) | 49500 |

"Cuadro 2.2.1"

Del cuadro anterior se deduce que, al analizar cada uno de los puntos que limitan la región factible, la solución óptima la representa el punto *c*, dado que allí la función objetivo es la que da mayor beneficio cuando es evaluada.

Paso 5

Se traza la función objetivo en el punto *c*. En la gráfica 2.2.2, se nota cómo el trazo de esta función pasa exactamente por dicho punto. Así se justifica esta línea trazada desde sus puntos de corte:

Los "Puntos de corte" de la "Función objetivo" son los siguientes:

Si $x_1 = 0$; se tiene:

$$300x_1 + 400x_2 = 53784$$
$$300(0) + 400x_2 = 53784$$
$$400x_2 = 53784$$
$$x_2 \leq \frac{53784}{400}$$

Entonces:

$$x_2 = 134.46$$

Finalmente, el punto es: (0, 134.46)

Si $x_2 = 0$; se tiene:

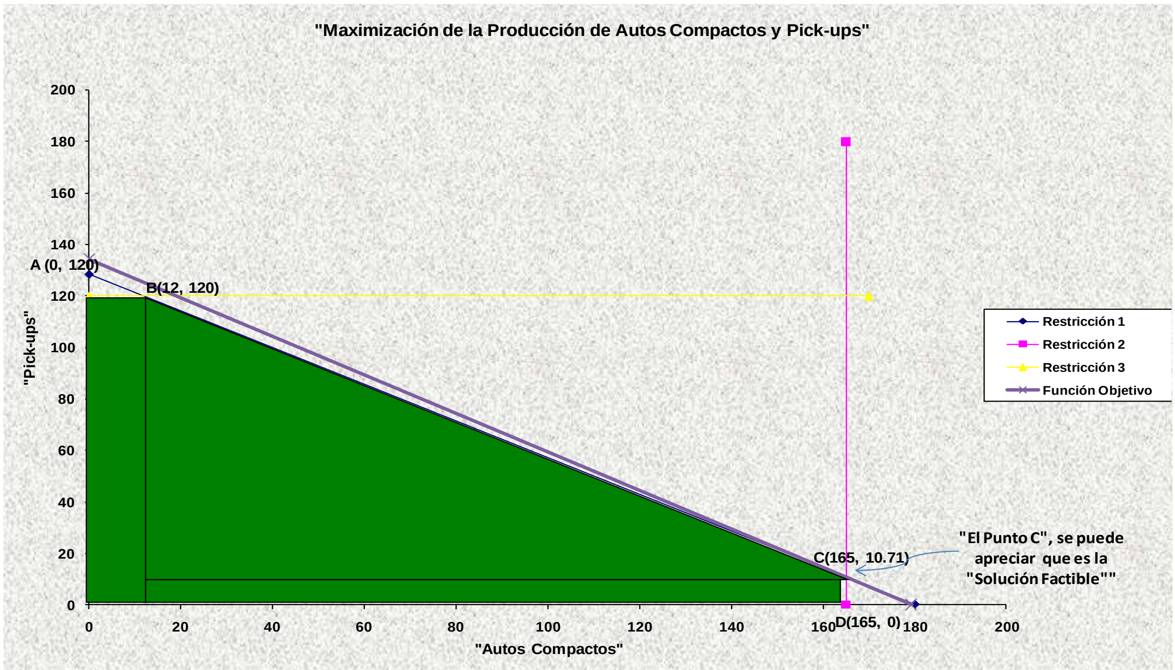
$$300x_1 + 400x_2 = 53784$$
$$300x_1 + 400(0) = 53784$$
$$300x_1 = 53784$$
$$x_1 \leq \frac{53784}{300}$$

Entonces:

$$x_1 = 179.28$$

Finalmente, el punto es: (179.28, 0)

Por tanto, en la gráfica 2.2.2, se distingue el marco general de la solución óptima que se obtuvo y que resuelve el planteamiento del problema del modelo 2.1.1, mostrado en la siguiente gráfica:




Paso 6

Se concluye que para resolver el modelo 2.2.1 del planteamiento del problema definido por la compañía del caso 2.1.1 se necesitará producir 165 autos compactos, que generarán una contribución de $300.00 USD; y 10.71 pick-ups, que darán una contribución de $400.00 USD. En conjunto, maximizan la producción dando un beneficio total de $53,784.00 USD.

**Problema 2.2.1.2**

De acuerdo con las condiciones previamente establecidas, la empresa del problema 2.1.4 determinó el siguiente modelo de programación lineal:

Maximizar: $Z = 5.00x_1 + 5.00x_2$

Modelo 2.2.4

Sujeto a: $6x_1 + 12x_2 <= 72$

$12x_1 + 8x_2 <= 96$

$x_1 >= 2$

Donde: $x_1, x_2 >= 0$

Ahora, la empresa desea saber cuál es la solución óptima para maximizar la producción mesas y sillas que permitan obtener la utilidad más alta.

**Solución**

Para determinar la solución óptima del planteamiento del problema definido por la empresa del problema 2.1.4, se utilizará el método gráfico desarrollando los siguientes pasos.

Paso 1

Determinar los puntos de corte para cada una de las restricciones involucradas en el modelo matemático que la empresa estableció de acuerdo con sus necesidades.

Para la restricción 1 con referencia a la mano de obra total, los puntos de corte obtenidos son:

| Restricción 1: Mano de obra total. | |
|---|---|
| Si $x_1 = 0$; se tiene: | Si $x_2 = 0$; se tiene: |
| $6x_1 + 12x_2 <= 72$ | $6x_1 + 12x_2 <= 72$ |
| $6(0) + 12x_2 <= 72$ | $6x_1 + 12(0) <= 72$ |
| $12x_2 <= 72$ | $6x_1 <= 72$ |
| $x_2 \leq \frac{72}{12}$ | $x_1 \leq \frac{72}{6}$ |
| Entonces: | Entonces: |
| $x_2 <= 6$ | $x_1 <= 12$ |
| Finalmente, el punto es: (0, 6) | Finalmente, el punto es: (12, 0) |

Para la restricción 2 con referencia a las unidades de material total:

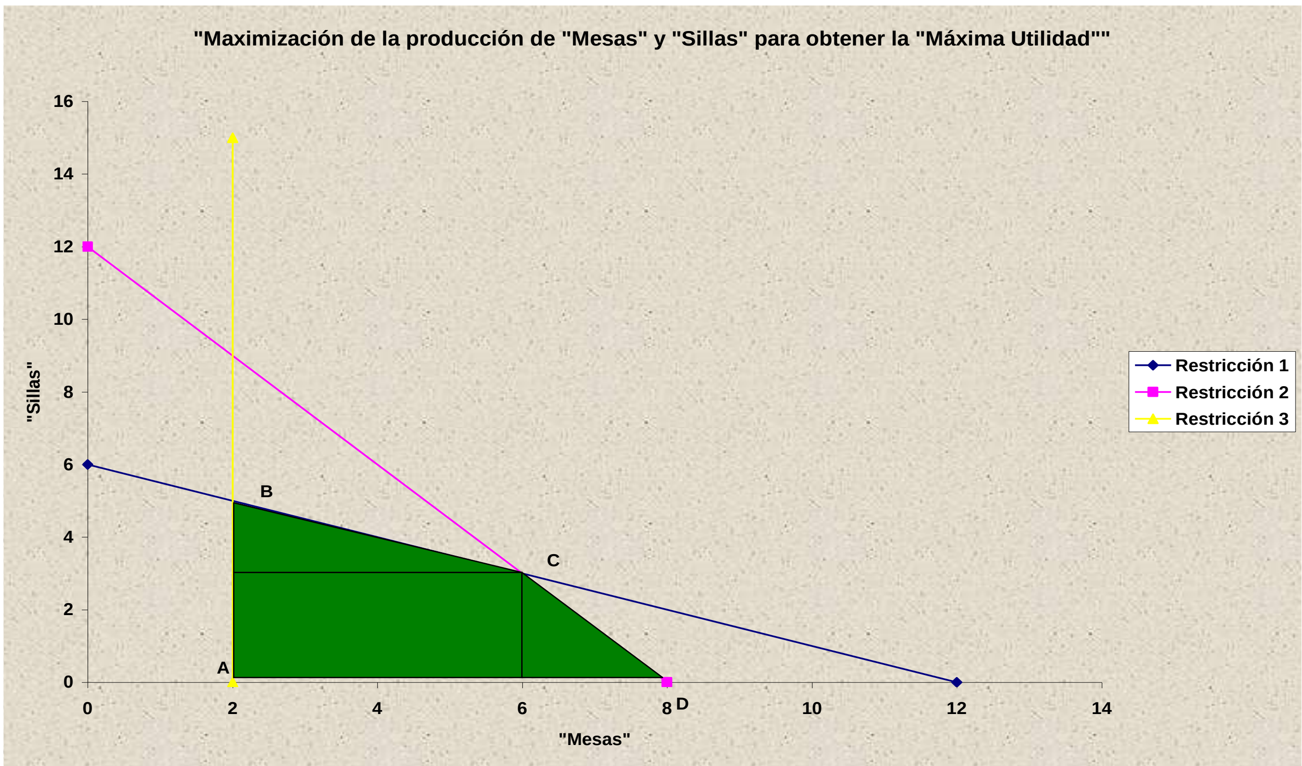
| Restricción 2: Unidades de material total. | |
|---|---|
| Si $x_1 = 0$; se tiene: | Si $x_2 = 0$; se tiene: |
| $12x_1 + 8x_2 <= 96$ | $12x_1 + 8x_2 <= 96$ |
| $12(0) + 8x_2 <= 96$ | $12x_1 + 12(0) <= 96$ |
| $8x_2 <= 96$ | $12x_1 <= 96$ |
| $x_2 \leq \frac{96}{8}$ | $x_1 \leq \frac{96}{12}$ |
| Entonces: | Entonces: |
| $x_2 <= 12$ | $x_1 <= 8$ |
| Finalmente, el punto es: (0, 12) | Finalmente, el punto es: (8, 0) |

Para la restricción 3 con referencia a la promesa de la empresa de producir al menos dos mesas:

| Restricción 3: Promesa de la "Emresa" de producir al menos "Dos mesas" |
|---|
| Si $x_2 = 0, 1, 2, 3, \dots \dots, n$; se tiene: |
| $x_1$>= 2 |
| Finalmente, el punto es: (2, 0) y (2, 15) |

Paso 2

Definidos los puntos de corte para cada una de las restricciones, se procede a trazarlas mediante un diagrama cartesiano a fin de poder visualizar la región factible, como se muestra en la siguiente gráfica:




Gráfica 2.2.4.

Paso 3

Visualizada la región factible, en la gráfica 2.2.1, se procede a buscar los puntos *b* y *c* que forman parte de la frontera de la región factible y no se conocen con precisión. La determinación de estos puntos resulta de utilizar cualquier método de solución que permita resolver un sistema de ecuaciones lineales o sistema de inecuaciones lineales de dos incógnitas.

Los métodos más comunes para resolver de forma analítica los sistemas de ecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales de dos incógnitas son el de igualación, reducción (mejor conocido como suma o resta), substitución, por determinantes, gráfico y de transformaciones (mejor conocido como Gauss-Jordan, por medio de matrices).

Para determinar el punto *b* del modelo, se relacionan las restricciones 1 y 3:

| |
|---|
| Obteniendo el “Punto B”; el cual relaciona a la “Restricción 1” y a la “Restricción 3”; donde:. |
| $6x_1 + 12x_2 <= \ 72$ |
| $x_1 >= \ 2$ |
| Como $x_1 >= \ 2$; entonces se obtiene $x_1$; resultado: |
| $6x_1 + 12x_2 <= \ 72$ |
| $6(2) + 12x_2 <= 72$ |
| $12 + 12x_2 <= 72$ |
| $12x_2 <= 72 - 12$ |
| $12x_2 <= 96$ |
| $x_2 \leq \frac{60}{12}$ |
| Entonces: |
| $x_2 <= 5$ |
| Finalmente, el punto es: (2, 5) |

Luego, se precisa el punto *c* del problema, para lo cual se utilizará el método de reducción (conocido también como *de suma* o *resta*) porque sus pasos son muy sencillos comparados con los de otros métodos. Cabe aclarar que cualquier método de los mencionados anteriormente dará el mismo resultado.

Así, con el método de reducción, se obtiene el punto *c* relacionando las restricciones 1 y 3:

Obteniendo el "Punto C"; el cual relaciona a la "Restricción 1" y a la "Restricción 2"; donde:

$$6x_1 + 12x_2 <= 72$$
$$12x_1 + 8x_2 <= 96$$

Obteniendo la "Solución" de este "Sistema de Inecuaciones" por "Resolución".

Paso 1: Multiplicando la "Inecuación de la Restricción 1" por (-2), se tiene el "Sistema":

$$(-2)(6x_1 + 12x_2) <= (-2)(72)$$
$$12x_1 + 8x_2 <= 96$$

Paso 2: El "Sistema de Inecuaciones" modificado es el siguiente:

$$(-12x_1 - 24x_2) <= (-144)$$
$$12x_1 + 8x_2 <= 96$$

Paso 3: Resolviendo el "Sistema de Inecuaciones" modificado resulta:

Obteniendo $x_2$, se tiene:

$$(-12x_1) - 24x_2 < = (-144)$$
$$12x_1) + 8x_2 < = 96$$
$$(-16x_2) <= (-48)$$
$$x_2 \leq \frac{-48}{-16}$$

Entonces:

$$x_2 < = 3$$

Obteniendo $x_1$, se tiene:

Si $x_2 < = 3$; entonces de la "Restricción 1" se tiene:

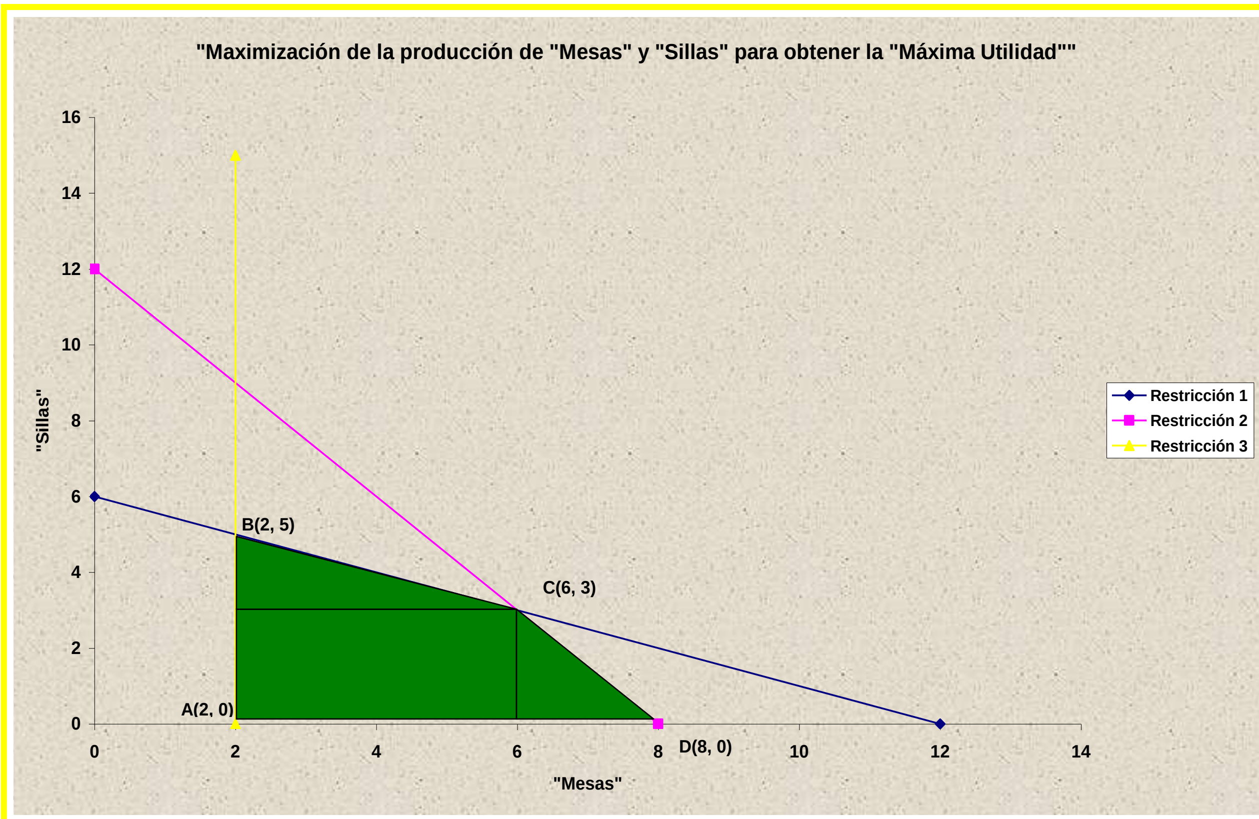
$$6x_1 + 12x_2 <= 72$$
$$6x_1 + 12(3) <= 72$$
$$6x_1 + 36 <= 72$$
$$6x_1 < = \text{72-36}$$
$$6x_1 < = 36$$
$$x_1 \leq \frac{36}{6}$$

Entonces:

$$x_1 < = 6$$

Finalmente, el punto es: (6, 3)

Los puntos de corte y los puntos *b* y *c* determinados previamente se pueden visualizar en un diagrama cartesiano. Aquí se podrá notar con certeza la frontera que comprende en su totalidad la región factible y que permitirá establecer entre qué puntos se halla dicha región, a fin de cumplir con el cometido de la función objetivo: maximizar la producción para obtener la utilidad más alta esperada de mesas y sillas respectivamente. Para el caso del problema 2.2.4, se muestra en la siguiente gráfica 2.2.5:




Gráfica 2.2.5

En la gráfica anterior se advierte que la región factible se encuentra limitada por los puntos a (2, 0); b (2, 5); c (6, 3) y d (8, 0).

Paso 4

Determinados los puntos que limitan la región factible, se procede a definir cuál cumple con el propósito de maximizar la función objetivo. Entonces, se evaluará para cada punto la función objetivo, cuyos resultados se muestran en el siguiente cuadro:

| Punto | Zmax = 5.00$x_1$ + 5.00$x_2$ | Zmax |
|---|---|---|
| A (2,0) | Zmax = 5.00(2) + 5.00(0) | 10 |
| B (2, 5) | Zmax = 5.00(2) + 5.00(5) | 35 |
| C (6, 3) | Zmax = 5.00(6) + 5.00(3) | 45 |
| E (8,0) | Zmax = 5.00(8) + 5.00(0) | 40 |

"Cuadro 2.2.2"

Finalmente, en el cuadro 2.2.2, analizando cada uno de los puntos que limitan la región factible, se observa que la solución óptima la representa el punto *c*, dado que en éste la función objetivo es la que da mayor beneficio al ser evaluada.

Paso 5

Se traza la función objetivo en el punto *c*. En la gráfica 2.2.6, se nota cómo el trazo de esta función pasa exactamente por ese punto. Así, se justifica esta línea trazada desde sus puntos de corte:

Los "Puntos de corte" de la "Función objetivo" son los siguientes:

Si $x_1 = 0$; se tiene:

$$5.00x_1 + 5.00x_2 <= 45$$

$$5.00(0) + 5.00x_2 <= 45$$

$$5.00x_2 <= 45$$

$$x_2 \leq \frac{45}{5}$$

Entonces:

$$x_2 <= 5$$

Finalmente, el punto es: (0, 9)

Si $x_2 = 0$; se tiene:

$$5.00x_1 + 5.00x_2 <= 45$$

$$5.00x_1 + 5.00(0) <= 45$$

$$5.00x_1 <= 45$$

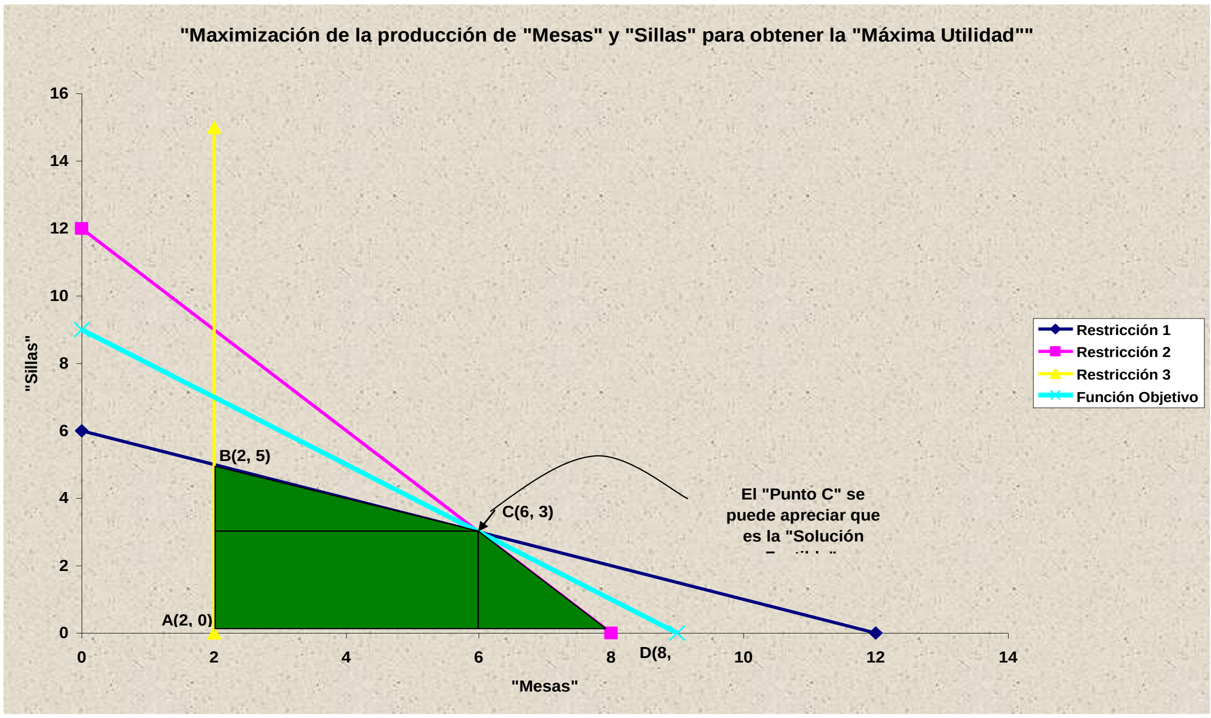
$$x_1 \leq \frac{45}{5}$$

Entonces:

$$x_1 <= 9$$

Finalmente, el punto es: (9, 0)

Por tanto, en la siguiente gráfica se advierte la solución óptima obtenida y que resuelve el planteamiento del problema del modelo 2.1.4:




Gráfica 2.2.6

Paso 6

Se concluye que, para la resolución del modelo 2.1.4 del planteamiento del problema definido por la compañía del problema 2.2.2, se necesitará producir 6 mesas, las cuales generan una contribución de $5.00 u. m.; y 3 sillas que generan una contribución de $5.00 u. m. En conjunto maximizan la producción generando un beneficio total de $45.00 u. m.

Por consiguiente, el método gráfico es accesible y de fácil aplicación, y permite resolver planteamientos de problemas de programación lineal restringidos a dos variables de decisión. Sin embargo, hay planteamientos de problemas de programación lineal de más variables de decisión, para los cuales el método gráfico no es idóneo; y en su lugar se aplica el dual-simplex, analizado a continuación.

Para ver otros ejemplos se sugiere revisar Anexo 1

## 2.2.2. Método dual-simplex

**Método simplex**

Creado por el investigador estadounidense George Dantzing a finales de la década de 1940, el método simplex puede describirse de la siguiente forma: este algoritmo consiste en un método de carácter algebraico sistemático que permite revisar las esquinas, conocidas también como vértices o puntos extremos de un conjunto factible de programación lineal, para buscar una solución óptima.

En concreto, este algoritmo en su etapa inicial tiene como fin determinar un vértice inicial, cuyo objetivo es maximizar o minimizar según sea el caso. Esta etapa inicial se le denomina fase I.

Si un planteamiento del problema en cuestión fuera inconsistente, la fase I lo descubrirá. En caso contrario, procederá a encontrar una representación algebraica referente a un vértice inicial, y por tanto, la fase I terminará en ese momento. En consecuencia; el algoritmo empezará a describir el conjunto factible de un vértice a otro adyacente.

Ello significa que cada vértice del conjunto factible de programación lineal puede representarse de manera algebraica como una combinación particular de solución de un conjunto de ecuaciones lineales. Esto permite generar soluciones diferentes de tal forma que se produzca una secuencia lógica de vértices adyacentes. Cada movimiento en la secuencia de un vértice adyacente se llama *iteración* o *pivote*, e implica una manipulación en un sistema de carácter lineal.

Así, el algoritmo del método simplex está creado para que la función objetivo no disminuya en un modelo de maximización, o aumente en un modelo de minimización, y por generalidad ascenderá o descenderá en cada vértice de la secuencia según sea el caso.

Si el planteamiento del problema no está acotado, el algoritmo del método simplex lo descubrirá durante su ejecución.

Respecto a los métodos cuantitativos aplicados por este algoritmo, el movimiento ascendente para un modelo de maximización o descendente para un modelo de minimización, descansan en la aplicación de una serie de transformaciones elementales, utilizadas comúnmente en los arreglos matriciales. Estas transformaciones elementales son:

- Multiplicar un renglón por un escalar.
- Intercambiar dos renglones.
- Multiplicar un renglón por un escalar y sumárselo al siguiente.

Estos movimientos realizados a través de estas transformaciones elementales, de una esquina a la adyacente, serán expresados en términos de la operación del pivote sobre una tabla de datos denominada con el galicismo *tableau*.

Cuando se alcanza el punto óptimo, el algoritmo del método simplex lo reconoce; en ese momento terminará la operación.

Si se pretende resolver el planteamiento de un problema por el método simplex, éste proporcionará las solucione óptimas tanto del problema primal como del dual.

Es decir, permite visualizar las ecuaciones lineales y sus soluciones, que tienen un papel clave en el desarrollo total del algoritmo.

Para comprender mejor cómo solucionar un planteamiento de problema con el método simplex, se procederá a resolver el problema 2.2.4, abordado con el método gráfico tratado en el subtema anterior.

*Problema 2.2.2.1*

Según las condiciones previamente establecidas, la empresa del problema 2.1.1 determinó el siguiente modelo de programación lineal:

Maximizar: $Z = 300x_1 + 400x_2$

Modelo 2.1.2

Sujeto a:

$$5x_1 + 7x_2 <= 900$$
$$x_1 <= 165$$
$$x_2 <= 120$$

Donde: $x_1, x_2 >= 0$

Ahora la empresa quiere saber cuál es la solución óptima que permita maximizar la producción tanto de autos compactos como de pick-ups, que dé una máxima utilidad esperada. Pero en esta ocasión aplicará el método simplex.

Solución

Para obtener la solución óptima del modelo 2.1.2, planteado de acuerdo con el problema 2.1.1, se utilizará el método simplex de la siguiente forma.

Paso 1

El modelo 2.1.2 es de carácter matemático, y sus restricciones se integran de inecuaciones, donde están involucradas directamente las variables de decisión, denominadas *no básicas*.

Por tanto, para que las inecuaciones del modelo 2.1.2 se conviertan en ecuaciones, será necesario modificar dicho modelo agregando una serie de variables denominadas *básicas*, que surgen de acuerdo con los siguientes criterios:

a. Cuando la restricción está expresada mediante la forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 =< b_1$, se agregará una variable básica, denomina *de holgura*, de modo que dicha restricción quede re-expresada como $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1$.

b. Si la restricción está expresada mediante la forma $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 >= b_1$, se añadirá una variable básica, denomina *de excedente*, de manera que dicha restricción quede re-expresada como $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - s_1 + A_1 = b_1$.

c. Cuando la restricción está expresada mediante la forma: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$; se agregará una variable básica, denomina *artificial,* de forma que dicha restricción quede re-expresada como: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + A_1 = b_1$.

Una vez que las inecuaciones que definen las restricciones del problema se han convertido en ecuaciones, se podrá observar que en ellas intervendrán en forma conjunta tanto las variables básicas como las no básicas. Ello significa que también la función objetivo original del modelo 2.1.2 sufrirá cambios, pues también en ella intervendrán en forma conjunta tanto las variables básicas como las no básicas que se obtuvieron en las restricciones del problema.

Cuando el modelo 2.1.2 se haya modificado con dichos cambios, se podrán empezar a aplicar y ejecutar las instrucciones que ordena el algoritmo del método simplex para obtener la solución óptima al planteamiento del problema original, en este caso, la obtención de la maximización de la producción de autos compactos y pick-ups que permitan obtener la máxima utilidad esperada, en las condiciones que este modelo específica.

En consecuencia, el modelo 2.1.2 quedará modificado aplicando en tres ocasiones el criterio del inciso *a*. Esto significa que a la función objetivo se le sumarán tres variables básicas de holgura: una para la cantidad que no se usa en la restricción 1 de dicho modelo; otra para la cantidad que no se emplea de la restricción 2; y la última para la cantidad que no se ocupa de la restricción 3.

Luego, la modificación del modelo 2.1.2 resultante a estos cambios es como se muestra en el modelo 2.1.2.a:

Maximizar: $Z = 300x_1 + 400x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Modelo 2.1.2.a

Sujeto a: $5x_1 + 7x_2 + s_1 = 900$

$x_1 + 0s_2 = 165$

$x_2 + 0s_3 = 120$

Donde: $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 >= 0$

Paso 2

Del modelo 2.1.2.a, se procede a aplicar el método simplex, obteniendo en primera instancia su solución básica inicial desde el siguiente concepto:

> La solución básica factible que tiene el mayor valor para la función objetivo se dice que es un problema de maximización y, por consiguiente, será la solución óptima. En caso contrario, cuando ésta tiene el menor valor, se dice que es un problema de minimización y, por tanto, será la solución óptima.

Entonces, para el problema 2.1.1, planteado en el modelo 2.1.2.a, se procede a identificar la tabla inicial. Para ello se necesita saber qué variables serán básicas y cuáles no básicas. En este caso, $s_1$, $s_2$ y $s_3$ serán las básicas; mientras $x_1$ y $x_2$, las no básicas.

Se eligieron $s_1$, $s_2$ y $s_3$ como variables básicas porque, al igualar $x_1$ y $x_2$ a cero, se puede encontrar de manera inmediata la solución al conjunto de ecuaciones. Sin embargo, no siempre resulta fácil identificar una solución factible inicial básica. Para superar esta situación, el procedimiento más eficiente es considerar una matriz identidad de orden *m x m* con los coeficientes de las restricciones.

Por otra parte, a la tabla inicial como al resto de las tablas que se generen cuando se obtenga la solución óptima de un problema determinado, se identifican con el galicismo *tableau*.

Determinadas las variables básicas y las no básicas, se procede a transferirlas a la tabla inicial, junto con las modificaciones que generó la función objetivo en su forma canónica ampliada. La tabla inicial del modelo 2.1.2.a se muestra en la tabla 2.2.2.1, de la siguiente forma:

TABLA INICIAL o *TABLEAU* INICIAL

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0<br>0<br>0 | $S_1$<br>$S_2$<br>$S_3$ | 900<br>165<br>120 | 5<br>1<br>0 | 7<br>0<br>1 | 1<br>0<br>0 | 0<br>1<br>0 | 0<br>0<br>1 |
| | $Z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 2.2.2.1

A partir de la tabla anterior, que muestra toda la información contenida en el modelo 2.1.2.a del problema 2.1.1, se pueden hacer las siguientes observaciones.

i. Los coeficientes que se hallan sobre el renglón designado como $C_j$ corresponden a la función objetivo y reflejan la contribución por unidad al objetivo.

ii. Bajo el renglón que define las variables básicas y las no básicas, se colocan los coeficientes en forma directa, como están expresados en el modelo 2.1.2.a.

iii. La columna denominada *variables de la base* se refiere al conjunto de variables básicas que conforman la solución factible básica, para este caso: $s_1$, $s_2$ y $s_3$.

iv. En la columna *segundo término* (solución), se colocan los valores del segundo término de las ecuaciones de restricción. En este caso: 900, 165 y 120, respectivamente.

v. En la columna $C_B$, se colocan los coeficientes de las variables de la base contenidas en la función objetivo; y puesto que $s_1$, $s_2$ y $s_3$ se encuentran en la base, sus coeficientes en la función objetivo son cero.

vi. La determinación de los coeficientes resultantes sobre el renglón $Z_j$ se hace calculando la suma de los productos de los coeficientes de la columna $C_B$ por los coeficientes de la columna asociada con la variable respectiva: $x_1$, $x_2$, $s_1$, $s_2$, y $s_3$. En este caso, como sigue:

$$Z_1 = (0)(5) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$Z_2 = (0)(7) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

$$Z_3 = (0)(1) + (0)(0) + (0)(0) = 0$$

$$Z_4 = (0)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0$$

$$Z_5 = (0)(0) + (0)(0) + (0)(1) = 0$$

Cada uno de estos coeficientes de $Z_j$ calculados puede describirse como la contribución que se pierde por unidad fabricada, puesto que cada valor de $Z_j$ se encuentra sumando los productos cruzados de las tasas físicas de sustitución y las utilidades asociadas con las variables básicas respectivas.

Además, la tasa física de sustitución es aquella que se refiere al número de unidades de una variable básica a las que se debe renunciar para fabricar una unidad de una variable no básica; tomando el producto de una tasa física de sustitución y la correspondiente unidad básica para fabricar una unidad de la variable no básica.

Por tanto, sumando los productos cruzados se encuentra la contribución total a las utilidades a la que se tiene que renunciar para fabricar una unidad de una variable no básica.

vii. El valor $Z$ de la función objetivo para la solución se muestra en la parte inferior de la columna del segundo término (solución). Para el caso de la tabla 2.2.2.1, este valor es cero, ya que se obtienen resultados de cero. Se calcula como sigue:

$$Z_{MAX} = (0)(900) + (0)(165) + (0)(120) = 0$$

Este valor de $Z_{MAX}$ obtenido en la tabla inicial indica el valor óptimo inicial, utilizando el método simplex. Y de acuerdo con la cantidad de tablas que se requieran éste irá mejorando, tanto para alcanzar el máximo –como en este caso–, como para llegar al mínimo, en una situación contraria.

viii. Por último, el renglón denominado $(C_j – Z_j)$ se calcula restando el valor de $Z_j$ del valor de $C_j$ para cada columna respectiva de variable. Es decir, esta cantidad refleja la diferencia entre la ganancia $(C_j)$ y la pérdida $(Z_j)$, generada cuando se fabrica una unidad de $x_j$. Por tanto, este renglón refleja la mejora neta que se da en la función objetivo por un aumento de una unidad en el valor de cada variable.

Paso 3

Ahora se procede a mejorar la solución básica inicial del modelo 2.1.2.a, desde este concepto:
Si en un problema dado la solución básica inicial resulta ser óptima, ésta sólo será válida para lo siguiente

Cuando la solución óptima busca ser máxima, todos los coeficientes resultantes del renglón deberán ser ceros o valores negativos.

- Cuando la solución óptima busca ser mínima, todos los coeficientes resultantes del renglón deberán ser ceros o valores positivos.

Si la solución básica inicial no cumpliera lo anterior, será necesario buscar otra básica y verificarla. Así se hará en forma sucesiva, hasta alcanzarla.
Como en este caso la solución básica inicial no cumple los criterios de validez, se buscará una nueva solución que resulte óptima o que la mejore (es la *primera iteración*). De la siguiente manera.

Si el objetivo del modelo 2.1.2.a es maximizar, para obtener una nueva solución, lo primero será determinar qué variable no básica va a entrar; se elegirá a aquella que tenga el mayor valor positivo de la función objetivo. En este caso, $x_2$.

En segundo lugar, se deberá establecer qué variable de la base $(c_b)$ sale. Para ello, se dividirá cada uno de los coeficientes de la columna del segundo término (solución) entre los coeficientes positivos de la columna $x_j$ que entra, en este caso $x_2$, y se elegirá la variable que tenga el cociente resultante mínimo. En esta acción se excluyen los coeficientes cero y los negativos. Si hay empate, para el cociente mínimo puede elegirse cualquiera de los renglones involucrados como la variable que sale.

En el caso del modelo 2.1.2.a, los cocientes resultantes mínimos a obtener serán los de $s_1$ *y* $s_3$, excluyendo el de $s_2$, porque es cero. Así:

$$\boldsymbol{s_1 \frac{900}{7} = 128.57} \qquad\qquad \boldsymbol{s_3 \frac{120}{1} = 120}$$

La variable que saldrá o será sustituida por $x_2$, es $s_3$. Entonces, la tabla inicial, modificada, queda como se muestra en la tabla 2.2.2.2, de la siguiente forma:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0<br>0<br>400 | $S_1$<br>$S_2$<br>$x_2$ | 900<br>165<br>120 | 5<br>1<br>0 | 7<br>0<br>1 | 1<br>0<br>0 | 0<br>1<br>0 | 0<br>0<br>1 |
| | $Z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 2.2.2

Después, se procede a realizar la actualización inicial de la tabla 2.2.2.2, la cual se inicia transformando el renglón asociado con la variable que sale. Es decir, identificando el elemento pivote que se halla en la intersección de la columna que entra y el renglón que sale, en el caso de este modelo es 1.

El renglón actualizado se obtiene aplicando la transformación elemental 1 mencionada anteriormente, referida a multiplicar un renglón por un escalar. O sea, el renglón reemplazante se calcula dividiendo todos los coeficientes y el valor del segundo término entre el elemento pivote (1 en este caso). Esto se puede apreciar en la tabla 2.2.2.3 como sigue:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0 | $S_1$ | | | | | | |
| 0 | $S_2$ | | | | | | |
| 400 | $x_2$ | 120 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | $Z_j$ | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.3

Modificado el renglón reemplazante, se procede a actualizar el resto de los renglones de la tabla 2.2.2.3, aplicando la transformación elemental 3, multiplicando un renglón por un escalar y sumándolo al siguiente. Es decir, todos los renglones de la tabla 2.2.2.3, con excepción del asociado con la variable que sale, pueden transformarse empleando la siguiente expresión[5]:

Nuevo renglón **=** (Elementos del renglón antiguo) **–** (Elemento de intersección en el renglón antiguo x elemento en el renglón reemplazante)

En el modelo 2.2.1.a, las actualizaciones de los renglones para $s_1$ y $s_2$ se harán combinando los coeficientes de las tablas 2.2.2.2 y 2.2.2.3: se multiplica el renglón pivote de la tabla 2.2.2.3 por el coeficiente de 7, pero con signo negativo para el renglón que contiene a $s_1$; después, se le suma algebraicamente al renglón de $s_1$ contenido en la tabla 2.2.2.2, y el renglón resultante se anota en la tabla 2.2.2.3. Esta operación se repetirá en el renglón que contienen a $s_2$, pero el coeficiente a utilizar en este caso será *0*. De esta manera, tenemos que los valores de dichos renglones quedan de la siguiente forma.

[5] *Ibíd.*, p. 145.

Para $s_1$:

$$-7\begin{bmatrix} 900 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 60 & 5 & 0 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Para $s_2$:

$$-7\begin{bmatrix} 165 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 120 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 165 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con la actualización de los renglones que contienen a $s_1$ y $s_2$, se procede a vaciarlos a la tabla 2.2.2.3, que también se actualiza como sigue:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0<br>0<br>400 | $S_1$<br>$S_2$<br>$x_2$ | 60<br>165<br>120 | 5<br>1<br>0 | 0<br>0<br>1 | 1<br>0<br>0 | 0<br>1<br>0 | -7<br>0<br>1 |
| | $Z_j$ | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.3

Ya con la actualización de los renglones de la tabla 2.2.2.3, ahora se procede a determinar el valor del renglón $z_j$. Para el caso del modelo 2.2.2.a, los valores son los siguientes:

$Z_1$ = (0)(5) + (0)(1) + (400)(0) = 0

$Z^2$ = (0)(0) + (0)(0) + (400)(1) = 400

$Z_3$ = (0)(1) + (0)(0) + (400)(0) = 0

$Z_4$ = (0)(0) + (0)(1) + (400)(0) = 0

$Z_5$ = (0)(-7) + (0)(0) + (400)(1) = 400

El valor de $Z_{MAX}$ se obtiene así:

$$Z_{MAX} = (0)(60) + (0)(165) + (400)(120) = 48,000$$

Después, los valores obtenidos de $Z_j$ se vacían en la tabla 2.2.2.3, cuya presentación modificada se muestra a continuación:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0<br>0<br>400 | $S_1$<br>$S_2$<br>$x_2$ | 60<br>165<br>120 | 5<br>1<br>0 | 0<br>0<br>1 | 1<br>0<br>0 | 0<br>1<br>0 | -7<br>0<br>1 |
| | $Z_j$ | 48,000 | 0 | 400 | 0 | 0 | 400 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.3

Para terminar la primera iteración, se determinan los valores del renglón $(C_j – Z_j)$, para posteriormente verificar si se tiene o no la solución óptima. Los valores del renglón $C_j – Z_j$ se obtienen de manera directa de la tabla 2.2.2.3, que se concluye de la siguiente manera:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 0<br>0<br>400 | $S_1$<br>$S_2$<br>$x_2$ | 60<br>165<br>120 | 5<br>1<br>0 | 0<br>0<br>1 | 1<br>0<br>0 | 0<br>1<br>0 | -7<br>0<br>1 |
| | $Z_j$ | 48,000 | 0 | 400 | 0 | 0 | 400 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 300 | 0 | 0 | 0 | -400 |

Tabla 2.2.2.3

Completada la tabla, se procede a la verificación del renglón *($C_j$ – $Z_j$)*. Así, distinguimos que la solución obtenida en la primera iteración no es óptima, porque un coeficiente resultó ser positivo y no cumplió con la regla de valores negativos o ceros. Por ende, se hará una segunda iteración para obtenerla.

Paso 4

Como la solución obtenida en la primera iteración no resultó óptima, se procede a repetir todas las acciones realizadas en el paso 3, pero ahora tomando como referencia la tabla 2.2.2.3. Como se expone a continuación.

En primer lugar, la variable será $x_1$, porque es la única no básica que queda en el caso del modelo 2.1.2.a. En segunda instancia, se establecerá qué variable de la base *($C_B$)* sale, dividiendo cada uno de los coeficientes de la columna del segundo término (solución) entre los coeficientes positivos de la columna $x_j$ que entra, en este caso $x_1$; y se elegirá la variable que tenga el cociente resultante mínimo.

En el modelo 2.1.2.a, los cocientes resultantes mínimos a obtener serán los de $s_1$ y $s_2$, así:

$$\boldsymbol{s_1 \frac{60}{5} = 12} \qquad \qquad \boldsymbol{s_3 \frac{165}{1} = 165}$$

Por tanto, la variable que saldrá o será sustituida por $x_2$ será $s_1$. De modo que la tabla 2.2.2.3, modificada, queda como se muestra en la tabla 2.2.2.4:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| $C_B$ | $C_j$ / Variables en la base | Segundo término (solución) | 300 / $X_1$ | 400 / $X_2$ | 0 / $S_1$ | 0 / $S_2$ | 0 / $S_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | $X_1$ | 60 | 5 | 0 | 1 | 0 | -7 |
| 0 | $S_2$ | 165 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 400 | $x_2$ | 120 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | $Z_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |

Tabla 2.2.2.4

Después, se procede a la actualización inicial de la tabla 2.2.2.4, que comienza transformando el renglón asociado con la variable que sale. Es decir, identificando el elemento pivote hallado en la intersección de la columna que entra y el renglón que sale (para el caso de este modelo, es 1/5).

El renglón actualizado se alcanza aplicando la transformación elemental 1 mencionada anteriormente, multiplicando un renglón por un escalar; es decir, el renglón reemplazante se calcula dividiendo todos los coeficientes y el valor del segundo término entre el elemento pivote (para este caso, 1/5). Lo anterior se puede notar en la tabla 2.2.2.5 como sigue:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| $C_B$ | $C_j$ / Variables en la base | Segundo término (solución) | 300 / $X_1$ | 400 / $X_2$ | 0 / $S_1$ | 0 / $S_2$ | 0 / $S_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | $X_1$ | 12 | 1 | 0 | 1/5 | 0 | -7/5 |
| 0 | $S_2$ | | | | | | |
| 400 | $x_2$ | | | | | | |
| | $Z_j$ | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.5

Modificado el renglón reemplazante, se actualiza el resto de los renglones de la tabla 2.2.2.5, aplicando la transformación elemental 3, multiplicando un renglón por un escalar y sumándolo al siguiente.

En el modelo 2.2.1.a, las actualizaciones de los renglones para $s_1$ y $x_2$ se harán combinando los coeficientes de las tablas 2.2.2.4 y 2.2.2.5, como se describe a continuación.

Se multiplicará el renglón pivote de la tabla 2.2.2.5 por el coeficiente de 5, pero con signo negativo, para el renglón que contiene a $s_2$. Después, se le sumará algebraicamente al renglón de $s_1$ contenido en la tabla 2.2.2.4, y el renglón resultante se anotará en la tabla 2.2.2.5. Esta operación se repetirá para el renglón que contienen a $x_2$, pero se empleará el coeficiente 0. Así, los valores de dichos renglones son los siguientes.

Para $s_2$:

$$-1\begin{bmatrix} \mathbf{165} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{12} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1/5} & \mathbf{0} & \mathbf{-7/5} \\ \hline \mathbf{155} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/5} & \mathbf{1} & \mathbf{7/5} \end{bmatrix}$$

Para $x_2$:

$$-1\begin{bmatrix} \mathbf{120} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{12} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1/5} & \mathbf{0} & \mathbf{-7/5} \\ \hline \mathbf{120} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Se procede a vaciar la actualización de los renglones que contienen a $s_2$ y $x_2$ a la tabla 2.2.2.5, como sigue:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 300<br>0<br>400 | $X_1$<br>$S_2$<br>$x_2$ | 12<br>153<br>120 | 1<br>0<br>0 | 0<br>0<br>1 | 1/5<br>-1/5<br>0 | 0<br>1<br>0 | -7/5<br>7/5<br>1 |
| | $Z_j$ | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.5

Obtenida la actualización de los renglones de la tabla 2.2.2.5, se determina el valor del renglón $Z_j$. Para el caso del modelo 2.2.2.a, los valores son los siguientes:

$$Z_1 = (300)(1) + (0)(0) + (400)(0) = 300$$

$$Z_2 = (300)(0) + (0)(0) + (400)(1) = 400$$

$$Z_3 = (300)(1/5) + (0)(-1/5) + (400)(0) = 60$$

$$Z_4 = (300)(0) + (0)(1) + (400)(0) = 0$$

$$Z_5 = (300)(-7/5) + (0)(7/5) + (400)(1) = -820$$

El valor de $Z_{MAX}$ se obtiene así:

$$Z_{MAX} = (300)(12) + (0)(153) + (400)(120) = 51{,}600$$

Los valores de $Z_j$ se vacían en la tabla 2.2.2.5, la cual queda modificada de la siguiente manera:

**TABLA 2 o *TABLEAU 2***

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CB | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 300<br>0<br>400 | $X_1$<br>$S_2$<br>$x_2$ | 12<br>153<br>120 | 1<br>0<br>0 | 0<br>0<br>1 | 1/5<br>-1/5<br>0 | 0<br>1<br>0 | -7/5<br>7/5<br>1 |
| | $Z_j$ | 51,600 | 300 | 400 | 60 | 0 | -820 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.5

Para concluir la primera iteración, se determinan los valores del renglón *($C_j$ – $Z_j$)* y luego se verifica si se ha llegado o no la solución óptima. Los valores del renglón $C_j$ –$Z_j$ se obtienen de manera directa de la tabla 2.2.2.5, la cual queda terminada de la siguiente manera:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 300<br>0<br>400 | $X_1$<br>$S_2$<br>$x_2$ | 12<br>153<br>120 | 1<br>0<br>0 | 0<br>0<br>1 | 1/5<br>-1/5<br>0 | 0<br>1<br>0 | -7/5<br>7/5<br>1 |
| | $Z_j$ | 51,600 | 300 | 400 | 60 | 0 | -820 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 0 | 0 | -60 | 0 | 820 |

Tabla 2.2.2.5

Completada la tabla, se procede a la verificación del renglón *($c_j$ – $z_j$)*. Se advierte, entonces, que la solución de la segunda iteración no es óptima porque un coeficiente resultó positivo y no cumplió con la regla de valores negativos o ceros. Por ende, se deberá hacer una tercera iteración para obtenerla.

Paso 5

Como la solución obtenida en la segunda iteración no fue la óptima, se procede a repetir todas las acciones realizadas en el paso 4, pero tomando como referencia la tabla 2.2.2.5.

Para empezar, ahora la variable que sale será $s_3$, la única que queda en el caso del modelo2.1.2.a. En segunda instancia, se establecerá qué variable de la base *($c_b$)* sale, dividiendo cada uno de los coeficientes de la columna del segundo término (solución) entre los coeficientes positivos de la columna $s_j$ que entra, en este caso, $s_3$; y se elegirá la variable que tenga el cociente resultante mínimo.

Para el modelo 2.1.2.a, los cocientes resultantes mínimos a obtener serán los de $s_2$ y $x_2$, así:

$$\boldsymbol{s_2 \frac{153}{7/5} = 109.28} \qquad \boldsymbol{x_2 \frac{120}{1} = 120}$$

Por consiguiente, la variable que saldrá o será sustituida por $s_3$ es $s_2$, de manera que tabla 2.2.2.5 queda modificada como se muestra en la tabla 2.2.2.6:

**TABLA 3 o *TABLEAU* 3**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 300<br>0<br>400 | $X_1$<br>$S_3$<br>$x_2$ | 12<br>153<br>120 | 1<br>0<br>0 | 0<br>0<br>1 | 1/5<br>-1/5<br>0 | 0<br>1<br>0 | -7/5<br>7/5<br>1 |
| | $Z_j$ | 51,600 | 300 | 400 | 60 | 0 | -820 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 0 | 0 | -60 | 0 | 820 |

Tabla 2.2.2.6

Después, se realiza la actualización inicial de la tabla 2.2.2.6, transformando el renglón asociado con la variable que sale. Se comienza identificando el elemento pivote que se halla en la intersección de la columna que entra y el renglón que sale, que para el caso de este modelo es 5/7.

El renglón actualizado se obtiene aplicando la transformación elemental 1 mencionada anteriormente, multiplicando un renglón por un escalar. Es decir, el renglón reemplazante se calcula dividiendo todos los coeficientes y el valor del segundo término entre el elemento pivote, que para este caso será 5/7. Esto se puede apreciar en la tabla 2.2.2.7 como sigue:

**TABLA 3 o *TABLEAU* 3**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 300<br>0<br>400 | $X_1$<br>$S_3$<br>$x_2$ | 109.28 | 0 | 0 | -1/7 | 5/7 | 1 |
| | $Z_j$ | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.7

Modificado el renglón reemplazante, se actualiza el resto de los renglones de la tabla 2.2.2.6 aplicando la transformación elemental 3, que consiste en multiplicar un renglón por un escalar y sumarlo al siguiente.

En el modelo 2.2.1.a, las actualizaciones de los renglones para $x_1$ y $x_2$ se realizarán combinando los coeficientes de las tablas 2.2.2.6 y 2.2.2.7, como se explica a continuación.

Se multiplica el renglón pivote de la tabla 2.2.2.6 por el coeficiente de 7/5, pero con signo positivo, para el renglón que contiene a $s_3$. Después, se le suma algebraicamente al renglón de $x_1$ contenido en la tabla 2.2.2.6; y el renglón resultante se anota en la tabla 2.2.2.7.

Esta operación se hará de manera similar para el renglón que contienen a $x_2$, pero el coeficiente a utilizar ahora es *1* con signo negativo. Así, los valores de dichos renglones ahora son los siguientes:

Para $x_1$:

$$7/5\begin{bmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1/5} & \mathbf{0} & \mathbf{-7/5} \\ \underline{\mathbf{109.28}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{-1/7}} & \underline{\mathbf{5/7}} & \underline{\mathbf{1}} \\ \mathbf{165} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Para $x_2$:

$$-1\begin{bmatrix} \mathbf{120} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \underline{\mathbf{109.28}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{-1/7}} & \underline{\mathbf{5/7}} & \underline{\mathbf{1}} \\ \mathbf{10.72} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1/7} & \mathbf{-5/7} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Con la actualización de los renglones que contienen a $x_1$ y a $x_2$, se procede a vaciarlos a la tabla 2.2.2.7, y ésta queda actualizada como sigue:

**TABLA 3 o *TABLEAU* 3**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 300<br>0<br>400 | $X_1$<br>$S_3$<br>$x_2$ | 165<br>109.28<br>10.72 | 1<br>0<br>0 | 0<br>0<br>1 | 0<br>-1/7<br>1/7 | 1<br>5/7<br>-5/7 | 0<br>1<br>0 |
| | $Z_j$ | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.7

Obtenida la actualización de los renglones de la tabla 2.2.2.7, se determina el valor del renglón $z_j$. Para el modelo 2.2.2.a, queda así:

$$Z_1 = (300)(1) + (0)(0) + (400)(0) = 300$$

$$Z_2 = (300)(0) + (0)(0) + (400)(1) = 400$$

$$Z_3 = (300)(0) + (0)(-1/7) + (400)(1/7) = 60$$

$$Z_4 = (300)(1) + (0)(5/7) + (400)(-5/7) = 14.29$$

$$Z_5 = (300)(0) + (0)(1) + (400)(0) = 0$$

El valor de $Z_{MAX}$ se encuentra así:

$$Z_{MAX} = (300)(165) + (0)(109.28) + (400)(10.72) = 53{,}784$$

Los *valores* de $Z_j$ obtenidos se vacían en la tabla 2.2.2.7, la cual queda modificada de esta manera:

**TABLA 3 o *TABLEAU* 3**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 300 | $X_1$ | 165 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $S_3$ | 109.28 | 0 | 0 | -1/7 | 5/7 | 1 |
| 400 | $x_2$ | 10.72 | 0 | 1 | 1/7 | -5/7 | 0 |
| | $Z_j$ | 53,784 | 300 | 400 | 60 | 14.29 | 0 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | |

Tabla 2.2.2.7

Para concluir la segunda iteración, se procede a determinar los valores del renglón $(c_j – z_j)$, para luego verificar si se tiene la solución óptima.

Los valores del renglón $c_j - z_j$ se obtienen de manera directa de la tabla 2.2.2.7, la cual queda terminada de la siguiente manera:

**TABLA 3 o *TABLEAU* 3**

| | $C_j$ | | 300 | 400 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
| 300<br>0<br>400 | $X_1$<br>$S_3$<br>$x_2$ | 165<br>109.28<br>10.72 | 1<br>0<br>0 | 0<br>0<br>1 | 0<br>-1/7<br>1/7 | 1<br>5/7<br>-5/7 | 0<br>1<br>0 |
| | $Z_j$ | 53,784 | 300 | 400 | 60 | 14.29 | 0 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 0 | 0 | -60 | -14.29 | 0 |

Tabla 2.2.2.7

Una vez completada, se procede a la verificación del renglón $(c_j - z_j)$. Entonces, se puede notar que la solución obtenida en la tercera iteración es óptima: cumple con la regla de valores negativos o ceros.

Paso 6

Se puede concluir para la resolución al modelo 2.2.1 del planteamiento del problema definido por la compañía del problema 2.1.1 lo siguiente:

Se necesitará producir 165 autos compactos, los cuales generan una contribución de $300.00 USD, y 10.71 *pick-ups*, las cuales dan una contribución de $400.00 USD. En conjunto, la producción total de ambos vehículos genera un beneficio total de $53,784.00 USD.

El problema 2.1.1, planteado a través del modelo 2.1.2.a, consistió en un proceso de maximización, y se ha podido resolver tanto con el método gráfico como con el simplex.

Por otro lado, dentro del algoritmo que rige la funcionalidad y operatividad del método simplex, existe el proceso de *minimización*. Cuando en un problema determinado se pretende obtener este proceso, implica que en el modelo de programación lineal que lo define se generan excedentes en las restricciones que rigen al problema. Luego, cuando se quiere minimizar, en vez de maximizar, existe un cambio pequeño pero significativo. Entonces, como se mencionó, el criterio de *optimalidad* se convierte en lo siguiente: la solución óptima será si $(C_j - Zj)$ es menor o igual a cero para toda; es decir, se deben tener todos los valores no negativos en el criterio del renglón neto.

Para que el estudiante comprenda cómo se desarrolla y resuelve un proceso de minimización utilizando como herramienta al método simplex, se expone el siguiente ejemplo.

*Problema 2.2.2.2*

Dado el siguiente modelo de programación lineal, se pide obtener la solución óptima que cumpla con las condiciones del siguiente proceso de minimización para el mismo.

Minimizar: $Z = 3x_1 + 8x_2$

Modelo de programación lineal

Sujeto a: $x_1 + 4x_2 >= 3.5$

$x_1 + 2x_2 >= 2.5$

Donde: $x_1, x_2 >= 0$

Solución

Para obtener la solución óptima del modelo de programación lineal planteado en el presente proceso de minimización, se utilizará el método simplex de la siguiente forma.

Paso 1

De la misma manera que el proceso de maximización, el modelo de programación lineal para un proceso de minimización es matemático, cuyas restricciones se conforman por una serie de inecuaciones donde están involucradas directamente las variables de decisión o *no básicas*.

Por tanto, para que las inecuaciones del modelo de programación lineal propuesto en el presente ejemplo se conviertan en ecuaciones, es necesario modificar el modelo agregando una serie de variables básicas a las que se llegará aplicando el criterio *b* explicado anteriormente.

Ya que las inecuaciones que definen las restricciones del problema se han convertido en ecuaciones, se podrá notar que en ellas intervendrán de manera conjunta variables básicas y no básicas. En consecuencia, la función objetivo original del modelo de programación lineal también sufrirá cambios, pues de igual forma intervendrán en ella de manera conjunta variables básicas y no básicas que se obtuvieron en las restricciones del problema. Cuando el modelo de programación lineal propuesto se haya modificado con dichos cambios, se podrá empezar a aplicar y a ejecutar las instrucciones que ordena el algoritmo del método simplex, para obtener la solución óptima al planteamiento del problema original, que en este caso es llegar a la minimización del modelo de programación lineal sugerido que permita obtener el mínimo costo esperado en las condiciones que puntualiza este modelo.

Así, el modelo de programación lineal propuesto quedará en forma modificada, aplicando en dos ocasiones el criterio *b*. Ello significa que a la función objetivo se le agregarán dos variables básicas de excedente: una para la cantidad que exceda en la restricción 1 de dicho modelo, y otra para la que sobrepase la restricción 2.

Entonces, la modificación del modelo de programación lineal propuesto resultante a estos cambios es como se muestra en el modelo de programación lineal a, de la siguiente forma:

Minimizar: $Z = 3x_1 + 8x_2 - 0s_1 + A_1 - 0s_2 + A_2$

Sujeto a: $x_1 + 4x_2 - s_1 = 3.5 - A_1$

$x_1 + 2x_2 - s_2 = 2.5 - A_2$

Donde: $x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 >= 0$

Modelo de programación lineal a

A su vez, el modelo de programación lineal a puede re-expresarse de la siguiente manera, resultando:

Minimizar: $Z = 3x_1 + 8x_2 - 0s_1 + A_1 - 0s_2 + A_2$

Sujeto a: $x_1 + 4x_2 - s_1 + A_1 = 3.5$

$x_1 + 2x_2 - s_2 + A_2 = 2.5$

Donde: $x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 >= 0$

Modelo de programación lineal a

Paso 2

Se procede a aplicar el método simplex al modelo de programación lineal *a*, obteniendo en primera instancia su solución básica inicial, desde el siguiente concepto: la solución básica factible que tiene el mayor valor para la función objetivo se dice que es un problema de maximización y, por consiguiente, será la solución óptima. En caso contrario, cuando ésta tiene el menor valor, se dice que es un problema de minimización, y será la solución óptima.

Luego, para el caso del problema de programación lineal a, se identifica la tabla inicial. Para ello se necesita saber qué variables serán básicas y cuáles no básicas. En este problema, $s_1$, $s_2$, $a_1$ y $a_2$ serán las variables básicas; mientras que $x_1$ y $x_2$, las no básicas.

De la misma forma que en el proceso de maximización, en el de minimización, la razón por la cual se eligieron a $s_1$, $s_2$, $a_1$ y $a_2$ como variables básicas es porque al igualar $x_1$ y $x_2$ a cero, se puede encontrar de manera inmediata la solución al conjunto de ecuaciones.

Sin embargo, no siempre resulta sencillo identificar una solución factible inicial básica. Ante esto, el procedimiento más eficiente consiste en considerar una matriz identidad de orden “m x m” con los coeficientes de las restricciones.

Determinadas las variables básicas y las no básicas, se procede a transferirlas a la tabla inicial, junto con las modificaciones que la función objetivo generó en su forma canónica ampliada.

La tabla inicial del modelo de programación lineal a se muestra en la tabla 2.2.2.8, de la siguiente forma:

**TABLA INICIAL o *TABLEAU* INICIAL**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| M<br>M | $A_1$<br>$A_2$ | 3.5<br>2.5 | 1<br>1 | 4<br>2 | -1<br>0 | 1<br>0 | 0<br>-1 | 0<br>1 |
| | $Z_j$ | 6M | 2M | 6M | -M | M | -M | M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 3 – 2M | 8 – 6M | M | 0 | M | 0 |

Tabla 2.2.2.8

Paso 3

Ahora se procede a mejorar la solución básica inicial del modelo de programación lineal a propuesto, desde el siguiente concepto: si en un problema dado la solución básica inicial resulta óptima, ésta sólo será válida cuando busca ser máxima, entonces, todos los coeficientes resultantes del renglón deberán ser ceros o valores negativos. En cambio, cuando la solución óptima busca ser mínima, todos los coeficientes resultantes del renglón deberán ser ceros o valores positivos.

En caso de que la solución básica inicial no cumpliera el criterio, se deberá buscar una nueva solución básica y verificarla; así se hará en forma sucesiva hasta obtenerla. Como en este caso la solución básica inicial no lo cubre, se hallará una nueva solución que resulte óptima o que la mejore, a este movimiento se le denomina *primera iteración*. Luego, para dar con la nueva solución, se hará lo siguiente.

Como el objetivo del modelo de programación lineal *a* es minimizar, para obtener una nueva solución, lo primero que se hará es establecer qué variable de las no básicas entrará; se elegirá la que tenga el mayor valor positivo de la función objetivo. En este caso, la variable no básica que entra es $x_2$, por ser la más negativa.

En segunda instancia, se establecerá qué variable de la base ($C_B$) sale. Para ello, se dividirá cada uno de los coeficientes de la columna del segundo término (solución) entre los coeficientes positivos de la columna $x_j$ que entra, en este caso, $x_2$; y se elegirá a la variable con el cociente resultante mínimo. En esta acción se excluyen los coeficientes cero y los negativos. Si hay empate para el cociente mínimo, puede elegirse cualquiera de los renglones involucrados como la variable que sale.

Para el modelo de programación lineal *a*, los cocientes resultantes mínimos a obtener serán los de $A_1$ y $A_2$:

$$\boldsymbol{A_1 \frac{3.5}{4} = 0.875} \qquad \boldsymbol{A_2 \frac{2.5}{2} = 1.25}$$

Por tanto, la variable que saldrá o será sustituida por $x_2$ será $A_1$, porque es la que se agota más rápidamente. Luego, la tabla inicial modificada queda como se muestra en la tabla 2.2.2.9:

**TABLA INICIAL o *TABLEAU* INICIAL**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8 | $X_2$ | 3.5 | 1 | 4 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| M | $A_2$ | 2.5 | 1 | 2 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| | $Z_j$ | 6M | 2M | 6M | -M | M | -M | M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 3 – 2M | 8 – 6M | M | 0 | M | 0 |

Tabla 2.2.2.9

Luego, se procede a realizar la actualización inicial de la tabla 2.2.2.9, transformando el renglón asociado con la variable que sale. La transformación comienza identificando el elemento pivote hallado en la intersección de la columna que entra y el renglón que sale (para el caso de este modelo es 1/4).

El renglón actualizado se obtiene aplicando la transformación elemental 1 mencionada anteriormente, multiplicando un renglón por un escalar, es decir, el renglón reemplazante se calcula dividiendo todos los coeficientes y el valor del segundo término entre el elemento pivote (para este caso, 1/4). Esto se puede notar en la tabla 2.2.2.9:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8<br>M | $X_2$<br>$A_2$ | 0.875 | 1/4 | 1 | -1/4 | 1/4 | 0 | 0 |
| | $Z_j$ | | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.9

Modificado el renglón reemplazante, se actualiza el resto de los renglones de la tabla 2.2.2.9, aplicando la transformación elemental 3, o sea, multiplicando un renglón por un escalar y sumándolo al siguiente.

En el caso del modelo de programación lineal *a*, la actualización del renglón para $A_2$ se realizará combinando los coeficientes de las tablas 2.2.2.8 y 2.2.2.9, así: se multiplica el renglón pivote de la tabla 2.2.2.9 por el coeficiente de 2, pero con signo negativo para el renglón que contiene a $x_2$; después, se le suma algebraicamente al renglón de $A_2$ contenido en la tabla 2.2.2.8; y el renglón resultante se anota en la tabla 2.2.2.9. Luego, los valores de dicho renglón son los siguientes.

Para $A_2$:

$$-2\left[\begin{array}{ccccccc} \mathbf{2.5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0.875} & \mathbf{1/4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1/4} & \mathbf{1/4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0.75} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0} & \mathbf{0.5} & \mathbf{-0.5} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{array}\right]$$

Hecha la actualización del renglón que contiene a $A_2$, se procede a hacer lo propio con la tabla 2.2.2.9, que queda así:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8<br>M | $X_2$<br>$A_2$ | 0.875<br>0.75 | 1/4<br>0.5 | 1<br>0 | -1/4<br>0.5 | 1/4<br>-0.5 | 0<br>-1 | 0<br>-1 |
| | $Z_j$ | | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.9

Obtenida la actualización del renglón de la tabla 2.2.2.9, se procede a determinar el valor del renglón $Z_j$.

Para el caso del modelo de programación lineal a, los valores son los siguientes:

$Z_1$ = (8)(1/4) + (M)(0.5) = 2 + 0.5M

$Z_2$ = (8)(1) + (M)(0) = 8

$Z_3$ = (8)(-1/4) + (M)(0.5) = -2 + 0.5M

$Z_4$ = (8)(1/4) + (M)(-0.5) = 2 – 0.5M

$Z_5$ = (8)(0) + (M)(-1) = -M

$Z_6$ = (8)(0) + (M)(-1) = -M

El valor de $Z_{MIN}$ se obtiene así:

$$Z_{MIN} = (8)(0.875) + (M)(0.75) = 7 + 0.75M$$

Los valores de $Z_j$ obtenidos se vacían en la tabla 2.2.2.9 que, modificada, queda de la siguiente forma:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8<br>M | $X_2$<br>$A_2$ | 0.875<br>0.75 | 1/4<br>0.5 | 1<br>0 | -1/4<br>0.5 | 1/4<br>-0.5 | 0<br>-1 | 0<br>-1 |
| | $Z_j$ | 7 + 0.75M | 2 + 0.5M | 8 | -2 + 0.5M | 2 – 0.5M | -M | M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.9

Finalmente, para concluir la primera iteración, se determinan los valores del renglón *($C_j$ – $Z_j$)* para luego verificar si se tiene o no la solución óptima.

Los valores del renglón $C_j$ –$Z_j$ se obtienen de manera directa de la tabla 2.2.2.9, que estará terminada de la siguiente forma:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8<br>M | $X_2$<br>$A_2$ | 0.875<br>0.75 | 1/4<br>0.5 | 1<br>0 | -1/4<br>0.5 | 1/4<br>-0.5 | 0<br>-1 | 0<br>-1 |
| | $Z_j$ | 7 + 0.75M | 2+0.5M | 8 | -2+0.5M | 2–0.5M | -M | M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 1 – 0.5M | 0 | 2 – 0.5M | -2 + 1.5M | M | 0 |

Tabla 2.2.2.9

Enseguida, se procede a la verificación del renglón *($C_j$ – $Z_j$)* y se notará que la solución obtenida en la primera iteración no es óptima: dos coeficientes resultaron ser negativos; no se cumplió con la regla de valores positivos o ceros. Por ende, se hará una segunda iteración.

Paso 4

Como la solución obtenida en la primera iteración no resultó óptima, se procede a repetir todas las acciones realizadas en el paso 3, pero ahora tomando como referencia la tabla 2.2.2.9.

Para iniciar, la variable que saldrá ahora es $x_1$, la única no básica que queda en el caso del modelo 2.1.2.a. En segundo lugar, se deberá establecer qué variable de la base *($C_B$)* saldrá. Para esto, se dividirá cada uno de los coeficientes de la columna del segundo término (solución) entre los coeficientes positivos de la columna $x_j$ que entra, que en este caso es $x_1$; y se elegirá la variable que tenga el cociente resultante mínimo.

Para el caso del modelo de programación lineal a propuesto, los cocientes resultantes mínimos a obtener serán los de $x_2$ *y* $A_2$:

$$\boldsymbol{x_2 \frac{0.875}{1/4} = 3.5} \qquad \qquad \boldsymbol{A_2 \frac{0.75}{1/2} = 1.5}$$

Por tanto, la variable que saldrá o va a ser sustituida por $x_1$ será $A_2$. De tal forma que la tabla 2.2.2.9 modificada queda como se muestra en la tabla 2.2.2.10:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8<br>3 | $X_2$<br>$X_1$ | 0.875<br>0.75 | ¼<br>0.5 | 1<br>0 | -1/4<br>0.5 | 1/4<br>-0.5 | 0<br>-1 | 0<br>-1 |
| | $Z_j$ | 7 + 0.75M | 2 + 0.5M | 8 | -2 + 0.5M | 2 – 0.5M | -M | M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 1 – 0.5M | 0 | 2 – 0.5M | -2 + 1.5M | M | 0 |

Tabla 2.2.2.10

Ahora se procede a realizar la actualización inicial de la tabla 2.2.2.10, transformando el renglón asociado con la variable que sale. La transformación comienza identificando el elemento pivote situado en la intersección de la columna que entra y el renglón que sale (para el caso de este modelo, 1/0.5).

El renglón actualizado se obtiene aplicando la transformación elemental 1 mencionada anteriormente, multiplicando un renglón por un escalar. Es decir, el renglón reemplazante se calcula dividiendo todos los coeficientes y el valor del segundo término entre el elemento pivote, que para este caso es 1/5. Esto se puede apreciar en la tabla 2.2.2.11:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8<br>3 | $X_2$<br>$X_1$ | <br>1.5 | <br>1 | <br>0 | <br>1 | <br>-1 | <br>-2 | <br>2 |
| | $Z_j$ | 7 + 0.75M | 2 + 0.5M | 8 | -2 + 0.5M | 2 – 0.5M | -M | M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 1 – 0.5M | 0 | 2 – 0.5M | -2 + 1.5M | M | 0 |

Tabla 2.2.2.11

Modificado el renglón reemplazante, se actualiza el resto de los renglones de la tabla 2.2.2.11, aplicando la transformación elemental 3, o sea, multiplicando un renglón por un escalar y sumándolo al siguiente.

Para el caso del modelo de programación lineal a, la actualización del renglón para $x_1$ se realizará combinando los coeficientes de las tablas 2.2.2.10 y 2.2.2.11. Lo anterior se logrará multiplicando el renglón pivote de la tabla 2.2.2.10 por el coeficiente de 1/4, pero con signo negativo, para el renglón que contiene a $x_1$; y después se le sumará algebraicamente al renglón de $x_2$ contenido en la tabla 2.2.2.10; y el renglón resultante se anotará en la tabla 2.2.2.11. Entonces, los valores de dichos renglones son los siguientes.

Para $x_2$:

$$-1/4\begin{bmatrix} 0.875 & 1/4 & 1 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ \hline 0.5 & 0 & 1 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Después, esta actualización se vacía a la tabla 2.2.2.11:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8<br>3 | $X_2$<br>$X_1$ | 0.5<br>1.5 | 0<br>1 | 1<br>0 | -0.5<br>1 | 0.5<br>-1 | 0.5<br>-2 | -0.5<br>2 |
| | $Z_j$ | | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.11

Obtenida la actualización de la tabla anterior, se determinará el valor del renglón $Z_j$. Para el modelo de programación lineal a, los valores son los siguientes:

$Z_1 = (8)(0) + (3)(1) = 3$

$Z_2 = (8)(1) + (3)(0) = 8$

$Z_3 = (8)(-0.5) + (3)(1) = -1$

$Z_4 = (8)(0.5) + (3)(-1) = 1$

$Z_5 = (8)(0.5) + (3)(-2) = -2$

$Z_6 = (8)(-0.5) + (3)(2) = 2$

El valor de $Z_{MIN}$ se obtiene así:

$$Z_{MIN} = (8)(0.5) + (3)(1.5) = 8.5$$

Los valores de $Z_j$ obtenidos se vacían en la tabla 2.2.2.11 y ésta queda modificada así:

**TABLA 2 o *TABLEAU 2***

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8<br>3 | $X_2$<br>$X_1$ | 0.5<br>1.5 | 0<br>1 | 1<br>0 | -0.5<br>1 | 0.5<br>-1 | 0.5<br>-2 | -0.5<br>2 |
| | $Z_j$ | 8.5 | 3 | 8 | -1 | 1 | -2 | 2 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.11

Para concluir la primera iteración, se procede a determinar los valores del renglón $(C_j – Z_j)$ y luego se verifica si se ha llegado a la solución óptima.

Los valores del renglón $C_j – Z_j$ se obtienen de manera directa de la tabla 2.2.2.11, la cual queda terminada de la siguiente manera:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 3 | 8 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $X_1$ | $X_2$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 8 | $X_2$ | 0.5 | 0 | 1 | -0.5 | 0.5 | 0.5 | -0.5 |
| 3 | $X_1$ | 1.5 | 1 | 0 | 1 | -1 | -2 | 2 |
| | $Z_j$ | 8.5 | 3 | 8 | -1 | 1 | -2 | 2 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 0 | 0 | 1 | M - 1 | 2 | M -2 |

Tabla 2.2.2.11

Después, se procede a la verificación del renglón *($C_j$ – $Z_j$)* y se conoce que la solución obtenida en la segunda iteración es óptima: cumple con la regla de valores positivos o ceros.

Paso 5

Se concluye para la resolución al modelo de programación lineal a del planteamiento del problema definido por el modelo del problema 2.2.2.2 lo siguiente:

Se necesitará producir 1.5 unidades de $x_1$ que generan un costo de $3.00 USD; y 0.5 unidades de $x_2$, que implican un costo de $8.00 USD. En conjunto, minimizan la producción causando un costo total de $8.50 USD.

De acuerdo con los casos analizados en los problemas 2.2.2.1 y 2.2.2.2, se puede concluir que los pasos a seguir para analizar cualquier tipo de modelo de programación lineal utilizando el método simplex son los siguientes:

**a.** Definir el planteamiento del problema, donde aparezcan puntualizadas en forma clara y contundente las variables de decisión, así como los parámetros correspondientes, para que éstos se plasmen tanto en la función objetivo como en el conjunto de restricciones involucradas, respetando el supuesto de la no negatividad de las variables de decisión.

**b.** Definido el planteamiento del problema, se procede a transformar todas las desigualdades de cada una de las restricciones en igualdades, aumentando variables de holgura y disminuyendo variables de excedente. Lo anterior para obtener todo el conjunto de variables básicas y no básicas que conformarán la transformación del planteamiento del problema original, de modo que todo este conjunto de valores se pueda colocar en forma tabular en una tabla de simplex inicial, que representa la respuesta inicial al proceso de solución del modelo del problema.

Así como el método gráfico, el simplex considera lo siguiente:

i. Cuando las restricciones son expresadas por medio de ecuaciones de primer grado, se dice que son lineales.
ii. Cuando las restricciones son expresadas por medio de ecuaciones de segundo grado o más, se dice que son no lineales.

**c.** Encontrada la solución inicial, se procede a mejorarla de la siguiente forma: la selección de la variable que debe incluirse en la base parte de los valores ubicados en el renglón $(C_j – Z_j)$ de la tabla simplex, donde se supone se ha examinado ese renglón, para determinar si la solución es óptima y se encuentran valores positivos. Se elegirá entonces la variable con el mayor valor positivo. La columna asociada con esta variable se llama *columna de entrada*; y la variable que se selecciona, *variable que entra* o *variable nueva.*

**d.** En este proceso de mejora, la variable que sale se selecciona dividiendo las cantidades de la columna del segundo término de la tabla simplex entre los coeficientes positivos de la columna de la variable que entra, o sea, los coeficientes positivos de la variable que entra a la base. Esto se hace renglón por renglón.

**e.** Después de analizar qué variable entra y cuál sale, se procede a realizar la actualización inicial de la tabla, transformando el renglón asociado con la variable que sale. Esta transformación inicia identificando al elemento pivote, ubicado en la intersección de la columna que entra y el renglón que sale. El renglón modificado se denomina *reemplazante de la nueva tabla* y se calcula dividiendo todos los coeficientes y el valor del segundo término entre el elemento pivote.

**f.** Luego, todos los renglones de la nueva tabla, excepto el asociado con la variable que sale, pueden transformarse aplicando la propiedad número 3 de las transformaciones elementales mencionadas; es decir, multiplicando un renglón por un escalar y sumándolo al siguiente.

**g.** Calculados todos los valores de los renglones faltantes de la base, finalmente se calculan los nuevos renglones $z_j$ y $(c_j - z_j)$, y se procede a verificar si se tiene la solución óptima o no. Para saberlo, se debe cumplir con la siguiente regla: se logra la solución óptima cuando el renglón $(c_j - z_j)$ no tiene coeficientes mayores a cero; es decir, todos ceros o negativos para el caso de maximizar. Y para minimizar, se dice que la solución es óptima cuando no tiene coeficientes menores a cero, o sea, todos ceros o positivos.

**h.** Por último, si no se halla una solución óptima, se procede a iterar nuevamente, iniciando desde el inciso *c*.

En conclusión, el método simplex es bien aceptado por los gerentes para poder resolver problemas de programación lineal. Tiene la ventaja de que no está limitado para dos variables de decisión, como el método gráfico.

Para ver otros ejemplos de Método Simple, se recomienda revisar el Anexo 2

**Problema dual**

El problema dual es una aplicación derivada del planteamiento de un problema de programación lineal original, el cual se expresa a través de un modelo matemático. Es decir, para cualquier problema de maximización de un modelo de programación lineal existirá en contraparte un problema equivalente, el cual será un problema de minimización. Y para cualquier problema de minimización de un modelo de programación lineal, existirá en contraparte uno equivalente, que será un proceso de maximización.

Independientemente de la situación de análisis que el modelo de programación lineal trate –maximizar o minimizar–, el problema dual tiene una gran trascendencia debido a los siguientes razonamientos.

1. El planteamiento de un problema de programación lineal tiene como ventaja principal una reducción considerable en sus cálculos al momento de obtener la solución óptima.

2. La relación entre el problema principal y su correspondiente problema dual es trascendental con el análisis de sensibilidad, el cual se fundamenta en el concepto del límite de una función, donde se marcan los cambios en todos los coeficientes, tanto de la función objetivo como en los recursos disponibles.

3. El problema dual correspondiente a un problema principal dado permite proporcionar distinto tipo de información de carácter económico respecto de los recursos disponibles usados cuando se le está analizando.

A partir de los razonamientos anteriores, se puede establecer un concepto fundamental del problema dual, también denominado *dualidad*: el problema dual se fundamenta en una relación matemática existente entre lo que se conoce como problema primario y su equivalente, el problema dual. La estructura operacional de los métodos cuantitativos permite que un problema de programación lineal, denominado *primario*, se convierta en uno equivalente que lo relacione, el cual será el problema dual. Por tanto, al planteamiento del problema original se le llama *problema primario*; mientras que a su equivalente en contraparte, *problema alternativo* o *dual*.

Supóngase que el objetivo del problema primario consiste en obtener un proceso de maximización, entonces, la forma general de expresar la relación con su correspondiente problema dual se muestra en el modelo 2.2.2.1.

Problema primario

Maximizar: $Z_p = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots\ldots + c_nx_n$

Modelo 2.2.2.1

Sujeto a:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n <= b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n <= b_2$

. ...... .. .......... .. ............ .. ........... ..................... .....

. ...... .. .......... .. ............ .. ........... ..................... .....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n <= b_n$

Donde: $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n >= 0$

Entonces, el problema correspondiente es dual y consiste en obtener un proceso de minimización, el cual se muestra en el modelo 2.2.2.1.bis, de la siguiente manera.

Problema dual

Minimizar: $Z_d = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + \ldots\ldots. + b_ny_n$

Modelo 2.2.2.1.bis

Sujeto a:
$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \ldots\ldots. + a_{m1}y_n <= c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \ldots\ldots. + a_{m2}y_n <= c_2$$
$$a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 + \ldots\ldots. + a_{m3}y_n <= c_3$$
. …… .. ………. .. ………… .. ……….. ………………… …..

. …… .. ………. .. ………… .. ……….. ………………… …..
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \ldots\ldots. + a_{mn}y_n <= c_n$$

Donde: $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots, y_n >= 0$

En el modelo 2.2.2.1, $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ son variables principales o primarias; mientras que en el 2.2.2.1.bis, $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots\ldots, y_n$ son las variables duales.

Por otra parte, el planteamiento dual de un problema primario o principal se puede obtener siguiendo los pasos enunciados a continuación.

| | |
|---|---|
| *Primero.* | • Se reemplazan todas las variables principales $x_j$ del problema primario por las variables duales $y_i$ en el problema dual. |
| *Segundo.* | • Se colocan todos los coeficientes de la función objetivo del problema primario, como los valores del segundo término en el problema dual. |
| *Tercero.* | • Se empiezan a colocar todos los valores del segundo término del problema primario, como los coeficientes de la función objetivo en el problema dual. |
| *Cuarto.* | • Se comienzan a trasponer todos los renglones de los coeficientes de todas las restricciones correspondientes del problema primario, convirtiéndolos en columnas de todos los coeficientes en el problema dual. O sea, se obtiene la matriz transpuesta de la matriz principal. |
| *Quinto.* | • Se invierte la dirección que tienen cada una de las desigualdades del conjunto de restricciones del problema principal. Esto significa que si las desigualdades del problema primario son *mayor* o *igual que*, las desigualdades del problema dual serán de *menor* o *igual que* y viceversa. |

Para memorizar los cinco pasos mencionados, se puede aplicar la siguiente regla nemotécnica:

> Dado el modelo matemático de un problema primario o problema principal, para poder obtener su problema equivalente o problema dual será necesario realizar lo siguiente:
>
> Del problema primario se procede a girar todos los elementos que conforman su modelo matemático 90º en el sentido contrario a las manecillas del reloj; de tal forma que el alumno podrá ver cómo efectivamente, en primera instancia, los elementos del segundo término del problema primario pasan a ser los coeficientes de la función objetivo del problema dual. En segunda instancia, se puede ver cómo los elementos de la función objetivo del problema primario pasan a ser los coeficientes del segundo término en el problema dual. En tercera instancia, también se puede ver cómo los renglones del conjunto de restricciones del problema primario pasan a ser el conjunto de columnas para las nuevas restricciones en el problema dual. Y finalmente las desigualdades del conjunto de restricciones del problema primario cambian de dirección en las restricciones del problema dual; este cambio se da debido a que se está girando al modelo primario en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Por tanto, una vez obtenido el planteamiento del problema dual derivado de un problema primario, se inicia a resolverlo utilizando nuevamente el método simplex, siguiendo los pasos explicados anteriormente, con el fin de obtener la solución óptima correspondiente.

La relación problema primario-problema dual genera la siguiente inferencia: dado un problema primario o problema principal, si éste tiene una solución óptima, entonces su correspondiente problema dual también deberá tener una solución óptima.

De igual forma, en esta relación problema primario-problema dual, se establece la siguiente regla: cuando se obtiene el valor óptimo de la función objetivo de un problema primario, éste deberá ser igual en magnitud al valor óptimo de la función objetivo del problema dual.

Para entender mejor los pasos de cómo se lleva a cabo el planteamiento del problema de programación lineal en forma dual y la obtención de su solución óptima correspondiente dado un problema principal o primario, a continuación se desarrolla un ejemplo, el problema 2.2.2.1, tratado en el subtema del método simplex.

*Ejemplo*

De acuerdo con las condiciones previamente establecidas, la empresa del problema 2.1.1 determinó el siguiente modelo de programación lineal:

Minimizar: $Z = 300x_1 + 400x_2$

Modelo 2.1.2

Sujeto a: $5x_1 + 7x_2 <= 900$

$x_1 <= 165$

$x_2 <= 120$

Donde: $x_1, x_2 >= 0$

Aplicando el método simplex, la empresa quiere saber ahora cuál es el problema dual correspondiente y la solución óptima que permita minimizar los costos de la producción tanto de autos compactos como de pick-ups y así obtener la máxima utilidad esperada.

Solución

Ya se explicó el tema correspondiente al método simplex, en referencia al modelo 2.1.2, donde el objetivo fue obtener la maximización de la utilidad esperada, y se encontró como una solución óptima. Ahora se procederá a obtener el problema dual correspondiente a dicho modelo siguiendo estos pasos.

Paso 1

De acuerdo con lo tratado a lo largo del tema referente al problema dual dado un problema primario, y con base en los conceptos analizados, el problema dual correspondiente al problema primario del modelo 2.1.2 es el que se muestra en el modelo 2.1.2.bis, de la siguiente forma:

Minimizar: $Z = 900y_1 + 165y_2 + 120y_3$

Modelo 2.1.2 bis

Sujeto a: $5y_1 + y_2 >= 300$

$7y_1 + y_3 >= 400$

Donde: $y_1, y_2, y_3 >= 0$

Paso 2

Realizado el planteamiento del problema dual correspondiente al problema primario del modelo 2.1.2, se procede a resolverlo para hallar su solución óptima: el mínimo costo requerido que permita maximizar la producción del problema primario. Para ello, se ocupará otra vez la aplicación del método simplex.

En consecuencia, el modelo de programación lineal propuesto quedará modificado, aplicando en dos ocasiones el criterio *b*. Ello significa que a la función objetivo se le agregarán dos variables básicas de excedente: una para la cantidad que exceda en la restricción 1 de dicho modelo; y otra para la que exceda en la restricción 2.

Por tanto, la modificación del modelo del modelo de programación lineal propuesto resultante a estos cambios es como se muestra en el modelo de programación lineal b, de la siguiente forma:

Minimizar: $Z = 900y_1 + 165y_2 + 120y_3 - 0s_1 + A_1 - 0s_2 + A_2$

Sujeto a: $5y_1 + y_2 - s_1 = 300 - A_1$

$7y_1 + y_3 - s_2 = 400 - A_2$

Donde: $y_1, y_2, y_3, s_1, s_2, A_1, A_2, >= 0$

Modelo de programación lineal b

A su vez, el modelo de programación lineal a puede re-expresarse de la siguiente manera:

Minimizar: $Z = 900y_1 + 165y_2 + 120y_3 - 0s_1 + A_1 - 0s_2 + A_2$

Sujeto a: $5y_1 + y_2 - s_1 + A_1 = 300$

$7y_1 + y_3 - s_2 + A_2 = 400$

Donde: $y_1, y_2, y_3, s_1, s_2, A_1, A_2, >= 0$

Modelo de programación lineal b

Paso 3

Se procede a aplicar el método simplex al modelo de programación lineal b, y se obtiene en primera instancia su solución básica inicial, a partir del siguiente concepto: la solución básica factible que tiene el mayor valor para la función objetivo se dice que es un problema de maximización y, por consiguiente, será la solución óptima; en caso contrario, cuando ésta tiene el menor valor, se dice que es un problema de minimización y, por consiguiente, será la solución óptima.

Entonces, para el caso del problema de programación lineal b, se procede a identificar la tabla inicial. Para ello se necesita saber qué variables serán básicas y cuáles no básicas. Para este problema, $s_1$, $s_2$, $A_1$ y $A_2$ son las básicas; y $y_1$, $y_2$, $y_3$, las no básicas.

Así como en el proceso de maximización, en el de minimización se eligieron $s_1$, $s_2$, $A_1$ y $A_2$ como variables básicas porque al igualar $y_1$, $y_2$, $y_3$ a cero, se puede encontrar inmediatamente la solución al conjunto de ecuaciones. Pero no siempre resulta fácil identificar una solución inicial básica; y para resolverlo, el procedimiento más eficiente es considerar una matriz identidad de orden "m x m" con los coeficientes de las restricciones.

Determinadas las variables básicas y las no básicas, se procede a transferirlas a la tabla inicial, junto con las modificaciones que generó la función objetivo en su forma canónica ampliada.

La tabla inicial del modelo de programación lineal b se muestra en la tabla 2.2.2.12:

**TABLA INICIAL o *TABLEAU* INICIAL**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| M | $A_1$ | 300 | 5 | 1 | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| M | $A_2$ | 400 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| | $Z_j$ | 700M | 12M | M | M | -M | M | -M | M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 900 – 2M | 165 – M | 120 -M | M | 0 | M | 0 |

Tabla 2.2.2.12

Paso 4

Nuevamente, del modelo de programación lineal b propuesto, ahora se procede a mejorar su solución básica inicial, desde los siguientes conceptos.

Si en un problema dado, la solución básica inicial resulta ser óptima, ésta sólo será válida para lo siguiente: cuando la solución óptima busca ser máxima, entonces todos los coeficientes resultantes del renglón deberán ser ceros o valores negativos. Cuando la solución óptima busca ser mínima, entonces todos los coeficientes resultantes del renglón deberán ser ceros o valores positivos. Y si la solución básica inicial no cumpliera lo anterior, se buscará una nueva solución básica y se verificará, y así en forma sucesiva hasta obtenerla.

Como en este caso la solución básica inicial no lo cumple, entonces se ubicará una nueva solución que resulte ser óptima o que la mejore (este movimiento se denomina *primera iteración*). Por tanto, se hará lo siguiente.

El objetivo del modelo de programación lineal b es minimizar. Así, para obtener una nueva solución, lo primero que se hará es establecer qué variable de las no básicas entrará. Se elegirá la que tenga el mayor valor positivo de la función objetivo. En este caso, la variable no básica más negativa que entra es $y_1$.

En segunda instancia, se establecerá qué variable de la base ($c_b$) sale, dividiendo cada uno de los coeficientes de la columna del segundo término (solución) entre los coeficientes positivos de la columna $y_j$ que entra, que en este caso es $y_1$, y se escogerá la variable que posea el cociente resultante mínimo. En esta acción se excluyen los coeficientes cero y los negativos. Si hay empate para el cociente mínimo, puede elegirse cualquiera de los renglones involucrados como la variable que sale.

Para el modelo de programación lineal a, los cocientes resultantes mínimos a obtener serán los de $A_1$ y $A_2$:

$$\boldsymbol{A_1 \frac{300}{5} = 60} \qquad\qquad \boldsymbol{A_2 \frac{400}{7} = 57.14}$$

Por consiguiente, la variable que saldrá y será sustituida por $y_1$ es $A_2$, pues es la que se agota más rápido. Así, la tabla inicial modificada queda como se muestra en la tabla 2.2.2.13:

**TABLA INICIAL o *TABLEAU* INICIAL**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| M<br>900 | $A_1$<br>$y_1$ | 300<br>400 | 5<br>7 | 1<br>0 | 0<br>1 | -1<br>0 | 1<br>0 | 0<br>-1 | 0<br>1 |
| | $Z_j$ | 700M | 12M | M | M | -M | M | -M | M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 900 – 2M | 165 – M | 120 -M | M | 0 | M | 0 |

Tabla 2.2.2.13

Después se realiza la actualización inicial de la tabla 2.2.2.13 transformando el renglón asociado con la variable que sale. La transformación comienza identificando el elemento pivote situado en la intersección de la columna que entra y el renglón que sale, que para el caso de este modelo es 1/7.

El renglón actualizado se obtiene aplicando la transformación elemental 1 mencionada anteriormente, multiplicando un renglón por un escalar. Es decir, el renglón reemplazante se calcula dividiendo todos los coeficientes y el valor del segundo término entre el elemento pivote, que para este caso es 1/7. Esto se puede apreciar en la tabla 2.2.2.14:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| M<br>900 | $A_1$<br>$y_1$ | 57.14 | 1 | 0 | 1/7 | 0 | 0 | -1/7 | 1/7 |
| | $Z_j$ | | | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.14

Modificado el renglón reemplazante, se actualiza el resto de los renglones de la tabla 2.2.2.14, aplicando la transformación elemental 3, o sea, multiplicando un renglón por un escalar y sumándolo al siguiente.

En el caso del modelo de programación lineal b, la actualización del renglón para $A_1$ se realizará combinando los coeficientes de las tablas 2.2.2.13 y 2.2.2.14. Se multiplicará el renglón pivote de la tabla 2.2.2.14 por el coeficiente de 5, pero con signo negativo, para el renglón que contiene a $y_1$; y después se le sumará algebraicamente al renglón de $A_1$ contenido en la tabla 2.2.2.13, y el renglón resultante se anotará en la tabla 2.2.2.14. De este modo, los valores de dicho renglón son los siguientes.

Para $A_2$:

$$\begin{array}{c} \\ -5 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccccc} 300 & 5 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 57.14 & 1 & 0 & 1/7 & 0 & 0 & -1/7 & 1/7 \\ \hline 14.30 & 0 & 1 & -5/7 & -1 & 1 & 5/7 & -5/7 \end{array}\right]$$

Después, esta actualización se vacía a la tabla 2.2.2.11:

Luego, se procede a vaciar los resultados de la actualización del renglón que contiene a $A_1$ a la tabla 2.2.2.13, con lo que la tabla 2.2.2.14 queda actualizada así:

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| M<br>900 | $A_1$<br>$y_1$ | 14.30<br>57.14 | 0<br>1 | 1<br>0 | -5/7<br>1/7 | -1<br>0 | 1<br>0 | 5/7<br>-1/7 | -5/7<br>1/7 |
| | $Z_j$ | | | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.14

Lograda la actualización del renglón de la tabla 2.2.2.14, se procede a determinar el valor del renglón $Z_j$. Para el caso del modelo de programación lineal b, los valores son los siguientes:

$$Z_1 = (M)(0) + (900)(1) = 900$$

$$Z_2 = (M)(0) + (900)(0) = 0$$

$$Z_3 = (M)(-5/7) + (900)(1/7) = 128.57 – 5/7M$$

$$Z_4 = (M)(-1) + (900)(0) = -M$$

$$Z_5 = (M)(1) + (900)(0) = M$$

$$Z_6 = (M)(5/7) + (900)(-1/7) = -128.57 + 5/7M$$

$$Z_7 = (M)(-5/7) + (900)(1/7) = 128.57 - 5/7M$$

El valor de $Z_{MIN}$ se obtiene de la siguiente forma:

$$Z_{MIN} = (M)(14.30) + (900)(57.14) = 51{,}426 + 14.30M$$

Los valores de $Z_j$ obtenidos se vacían en la tabla 2.2.2.14, la cual queda modificada como se muestra a continuación.

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| M<br>900 | $A_1$<br>$y_1$ | 14.30<br>57.14 | 0<br>1 | 1<br>0 | -5/7<br>1/7 | -1<br>0 | 1<br>0 | 5/7<br>-1/7 | -5/7<br>1/7 |
| | $Z_j$ | 51,426+14.30M | 900 | M | 128.57–5/7M | -M | M | -128.57+5/7M | 128.57-5/7M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.14

Para concluir la primera iteración, se procede a determinar los valores del renglón $(C_j – Z_j)$ y luego verificar si se tiene o no la solución óptima.

Los valores del renglón $C_j – Z_j$ se obtienen de manera directa de la tabla 2.2.2.14, con lo cual ésta queda terminada de la siguiente manera.

**TABLA 1 o *TABLEAU* 1**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| M<br>900 | $A_1$<br>$y_1$ | 14.30<br>57.14 | 0<br>1 | 1<br>0 | -5/7<br>1/7 | -1<br>0 | 1<br>0 | 5/7<br>-1/7 | -5/7<br>1/7 |
| | $Z_j$ | 51,426 + 14.30M | 900 | M | 128.57 – 5/7M | -M | M | -128.57 + 5/7M | 128.57 - 5/7M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 0 | 165- M | -8.57 + 5/7M | M | 0 | 128.57 – 5/7M | -128.57+ 12/7M |

Tabla 2.2.2.14

Completada la tabla, se procede a la verificación del renglón $(C_j – Z_j)$ y se notará que la solución obtenida en la primera iteración no es óptima: dos coeficientes resultaron negativos; y no se cumplió con la regla de valores positivos o ceros. Por ende, se hará una segunda iteración.

Paso 5

Como la solución obtenida en la primera iteración no resultó óptima, se procede a repetir las acciones del paso 3, ahora tomando como referencia la tabla 2.2.2.14, como se describe a continuación.

Para iniciar, la variable que sale será $y_2$, porque es la segunda no básica de mayor valor que sigue en el caso del modelo 2.1.2.bis. Después, se establecerá qué variable de la base $(C_B)$ sale. Para ello, se dividirá cada uno de los coeficientes de la columna del segundo término (solución) entre los coeficientes positivos de la columna $y_j$ que entra, en este caso $y_2$, y se elegirá la variable que tenga el cociente resultante mínimo.

En el modelo de programación lineal a propuesto, los cocientes resultantes mínimos a obtener serán de $A_1$ porque los de $y_1$ corresponden a cero. Estos cocientes resultantes son los siguientes:

$$\boldsymbol{A_1 \frac{14.30}{1} = 14.30}$$

Por tanto, la variable que saldrá o será sustituida por $y_2$ será $A_1$. Entonces, la tabla 2.2.2.14 modificada queda como se muestra en la tabla 2.2.2.15, de la siguiente forma:

### TABLA 2 o *TABLEAU* 2

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 165<br>900 | $y_2$<br>$y_1$ | 14.30<br>57.14 | 0<br>1 | 1<br>0 | -5/7<br>1/7 | -1<br>0 | 1<br>0 | 5/7<br>-1/7 | -5/7<br>1/7 |
| | $Z_j$ | 51,426 + 14.30M | 900 | M | 128.57 – 5/7M | -M | M | -128.57 + 5/7M | 128.57 - 5/7M |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 0 | 165 - M | -8.57 + 5/7M | M | 0 | 128.57 – 5/7M | -128.57 + 12/7M |

Tabla 2.2.2.15

Después, se procede a realizar la actualización inicial de la tabla 2.2.2.15, que se inicia transformando el renglón asociado con la variable que sale. La transformación comienza identificando el elemento pivote situado en la intersección de la columna que entra y el renglón que sale, que para el caso de este modelo es 1/0.5.

El renglón actualizado se obtiene aplicando la transformación elemental 1 mencionada anteriormente, es decir, multiplicando un renglón por un escalar. Es decir, el renglón reemplazante se calcula dividiendo todos los coeficientes y el valor del segundo término entre el elemento pivote. En este caso, el renglón reemplazante queda de la misma forma debido a que el coeficiente de $y_2$ es 1. Esto se puede observar en la tabla 2.2.2.16 como sigue:

### TABLA 2 o *TABLEAU* 2

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 165<br>900 | $y_2$<br>$y_1$ | 14.30 | 0 | 1 | -5/7 | -1 | 1 | 5/7 | -5/7 |
| | $Z_j$ | | | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.16

Ahora se procede a actualizar el resto de los renglones de la tabla 2.2.2.16 aplicando la transformación elemental 3, o sea, multiplicando un renglón por un escalar y sumándolo al siguiente.

En el modelo de programación lineal b, la actualización del renglón para $y_2$ se realizará combinando los coeficientes de las tablas 2.2.2.15 y 2.2.2.16, de la siguiente manera: se multiplicará el renglón pivote de la tabla 2.2.2.15 por el coeficiente de 0, para el renglón que contiene a $y_2$, y después se le sumará algebraicamente al renglón de $y_1$ de la tabla 2.2.2.15, y el renglón resultante se anotará en la tabla 2.2.2.16. Por tanto, los valores de dichos renglones son los siguientes.

Para $y_1$:

$$-5\begin{bmatrix} \mathbf{57.14} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1/7} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/7} & \mathbf{1/7} \\ \underline{\mathbf{14.30}} & \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{1}} & \underline{\mathbf{-5/7}} & \underline{\mathbf{1}} & \underline{\mathbf{1}} & \underline{\mathbf{5/7}} & \underline{\mathbf{-5/7}} \\ \mathbf{57.14} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1/7} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1/7} & \mathbf{1/7} \end{bmatrix}$$

Se procede a vaciar la actualización del renglón que contienen a $y_1$ a la tabla 2.2.2.16, con lo que ésta queda actualizada así:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 165<br>900 | $y_2$<br>$y_1$ | 14.30<br>57.14 | 0<br>1 | 1<br>0 | -5/7<br>1/7 | -1<br>0 | 1<br>0 | 5/7<br>-1/7 | -5/7<br>1/7 |
| | $Z_j$ | | | | | | | | |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.16

Obtenida la actualización de los renglones de la tabla 2.2.2.16, se procede a determinar el valor del renglón $Z_j$. Para el caso del modelo de programación lineal b, los valores son los siguientes:

$$Z_1 = (165)(0) + (900)(1) = 900$$
$$Z_2 = (165)(1) + (900)(0) = 165$$
$$Z_3 = (165)(-5/7) + (900)(1/7) = 10.72$$
$$Z_4 = (165)(-1) + (900)(0) = -165$$
$$Z_5 = (165)(1) + (900)(0) = 900$$
$$Z_6 = (165)(5/7) + (900)(-1/7) =-10.72$$
$$Z_7 = (165)(-5/7) + (900)(1/7) = 10.72$$

El valor de $Z_{MIN}$ se obtiene así:

$$Z_{MIN} = (165)(14.30) + (900)(57.14) = 53,784$$

Los valores de $Z_j$ obtenidos se vacían en la tabla 2.2.2.16, la cual queda modificada como a continuación se muestra:

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 165<br>900 | $y_2$<br>$y_1$ | 14.30<br>57.14 | 0<br>1 | 1<br>0 | -5/7<br>1/7 | -1<br>0 | 1<br>0 | 5/7<br>-1/7 | -5/7<br>1/7 |
| | $Z_j$ | 53,784 | 900 | 165 | 10.72 | -165 | 900 | -10.72 | 10.72 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | | | | | | | |

Tabla 2.2.2.16

Finalmente, para concluir la primera iteración, se determinan los valores del renglón *($C_j$ – $Z_j$)* para luego verificar si se tiene la solución óptima.

Los valores del renglón $C_j$ –$Z_j$ se obtienen de manera directa de la tabla 2.2.2.16, con lo cual la tabla 2.2.2.17 queda terminada de la siguiente forma.

**TABLA 2 o *TABLEAU* 2**

| | $C_j$ | | 900 | 165 | 120 | 0 | M | 0 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Variables en la base | Segundo término (solución) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $S_1$ | $A_1$ | $S_2$ | $A_2$ |
| 165<br>900 | $y_2$<br>$y_1$ | 14.30<br>57.14 | 0<br>1 | 1<br>0 | -5/7<br>1/7 | -1<br>0 | 1<br>0 | 5/7<br>-1/7 | -5/7<br>1/7 |
| | $Z_j$ | 53,784 | 900 | 165 | 10.72 | -165 | 900 | -10.72 | 10.72 |
| | $C_j$-$Z_j$ | | 0 | 0 | 109.28 | 165 | M - 900 | 10.72 | M – 10.72 |

Tabla 2.2.2.17

Completada la tabla, se procede a la verificación del renglón *($C_j$ – $Z_j$)*, y se nota que la solución obtenida en la segunda iteración es óptima: cumple con la regla de valores positivos o ceros.

Paso 6

Se puede concluir para la resolución al modelo de programación lineal b del planteamiento del problema definido por el modelo del problema 2.2.2.1 que se necesitará costear 57.14 unidades de $y_1$, las cuales generan un costo de $900.00 USD, y 14.30 de $y_2$, que dan un costo de $165.00 USD, que en conjunto minimizan el costo implicando un costo total de $53,784.00 USD. Este valor obtenido también representa la máxima utilidad esperada, la cual fue obtenida del problema primario.

Por último, con la obtención del problema dual y su resolución llevada a cabo en el ejemplo anterior se puede deducir que el valor óptimo de la función objetivo de un problema primario es igual en magnitud al valor óptimo de la función objetivo del problema dual, que fue de $53,784.00 USD.

## 2.2.3. Mediante el uso de computadora

Uno de los elementos fundamentales en la actualidad que ha ayudado al crecimiento de la investigación de operaciones es la computadora. Sin ésta, la investigación de operaciones estaría muy restringida en cuanto al uso de todas sus aplicaciones. Por ejemplo, al traducir un problema a un modelo matemático, hay que resolverlo con métodos de programación lineal, a veces muy laboriosos y complejos. Y con la computadora se reduce en gran medida la complejidad matemática del modelo, así como la carga de los cálculos implícitos al emplear diferentes métodos de solución.

Hoy día, se han desarrollado distintos paquetes o programas informáticos que facilitan el trabajo a los analistas para emplear los métodos de solución vistos a lo largo de esta unidad. Entre los más utilizados, se encuentran Manager, Solver, Lindo, Tora, Derive y Matlab.

Todos estos programas o *softwares* tienen una gama de versiones o línea de productos diseñados y desarrollados para diferentes necesidades de acuerdo con el nivel requerido por parte de los usuarios.

## 2.3. Modelo de transporte

El modelo de transporte es de tipo cuantitativo y se fundamenta en la resolución de problemas relacionados con el término de distancias, que en conjunto son establecidos previamente a través de distintos itinerarios posibles. El propósito es hallar la ruta óptima para resolver el objetivo.

Cada una de las distancias que conforman ese conjunto de itinerarios posibles son definidas o determinadas a través de un itinerario previamente establecido entre un punto de origen denominado *fuente* y uno llamado *destino*. Así, el problema de transporte tiene relación con la selección de rutas previamente establecidas entre las plantas de fabricación y las bodegas de distribución, o entre las bodegas de distribución de una región y los puntos de distribución locales. En consecuencia, cuando la gerencia aplica el método de transporte su intención es dar con la ruta de distribución que optimizará ese objetivo. Y esta ruta de distribución, en forma cuantitativa, puede ser referida a las siguientes atribuciones:

- Minimización del costo total de transporte.
- Maximización de utilidades.
- Maximización del tiempo total involucrado.

Por otra parte, este método fue diseñado por primera vez como un algoritmo de carácter propio, cuya tarea principal fue encontrar el programa de costo mínimo consistente en la distribución de unidades homogéneas de un producto, el cual se derivaba desde varios puntos de abastecimiento a varios puntos de consumo, o sea, de varias fuentes a varios destinos. Por ejemplo, si un fabricante posee 6 plantas y 24 bodegas, ubicadas en distintas situaciones geográficas durante un periodo específico, entonces cada origen tiene una capacidad determinada y cada destino un requerimiento determinado. Así, también se conocen los costos unitarios que se generan al embarcar el producto de cada fuente con rumbo final a cada destino, cuyo objetivo será programar los embarques de las fuentes a los destinos, para lograr que se minimice el costo total del transporte de estos productos.

A partir del ejemplo anterior, se puede concluir que el método de transporte es un muy socorrido por los diferentes analistas, tanto de administración como de finanzas, para la resolución de todo estudio técnico propuesto para la formulación y evaluación de proyectos de inversión, consistente en la determinación de la localización de la planta o *macrolocalización*.

De la misma forma como se trató el método simplex, ahora se analizará el de transporte, mediante un ejemplo, donde se darán todos los pasos que ordena este algoritmo.

**Problema 2.3.1**

La Junta Local de Caminos del Estado de Hidalgo ha recibido un contrato para abastecer de grava a tres nuevas carreteras proyectadas en las ciudades de Apan, Tizayuca e Ixmiquilpan.

Los ingenieros de la obras han calculado así las cantidades de grava necesarias en los tres proyectos de construcción para estas carreteras[6].

| PROYECTO | UBICACIÓN | REQUERIMIENTO |
|---|---|---|
| 1 | Apan | 76 |
| 2 | Tizayuca | 106 |
| 3 | Ixmiquilpan | 45 |
| TOTAL | | 227 |

Además, la Junta Local de Caminos del Estado de Hidalgo tiene tres plantas de grava localizadas en los municipios de Pachuca, Tula y Tulancingo. La grava requerida para los tres proyectos de construcción se puede abastecer de esas tres plantas; y el despachador en eje ha calculado las cantidades de grava que serán abastecidas por cada de estas plantas.

| PLANTA | UBICACIÓN | REQUERIMIENTO |
|---|---|---|
| A | Pachuca | 60 |
| B | Tula | 86 |
| C | Tulancingo | 81 |
| Total | | 227 |

De igual forma, la Junta Local de Caminos del Estado de Hidalgo ha calculado los costos de entrega de cada una de las plantas según cada localización del proyecto. Por tanto, los costos de entrega por carga de caminos entre cada una de las plantas y cada una de las localizaciones varían directamente con la cantidad distribuida:

[6] Ejemplo tomado de Arturo Camacho Quiroz, *Principios de investigación de operaciones*, México: Editorial ECAFSA, 1997, pp. 145-160.

| DE | A PROYECTO 1 | PROYECTO 2 | PROYECTO 3 |
|---|---|---|---|
| Planta A | $4 | $8 | $8 |
| Planta B | $16 | $24 | $16 |
| Planta C | $8 | $16 | $24 |

Con base en la información proporcionada por la Junta Local de Caminos del Estado de Hidalgo, se quiere determinar la ruta óptima que se deberá seguir a fin de minimizar el costo total para poder llevar a cabo los tres proyectos de construcción.

**Solución**

Para resolver este problema, lo primero que deberá realizar la Junta Local de Caminos del Estado de Hidalgo es una esquematización en donde se establezcan las fuentes y destinos, y finalmente se marquen los costos de entrega por carga (los cuales varían directamente con la cantidad distribuida).

Esta información se puede esquematizar de la siguiente manera:

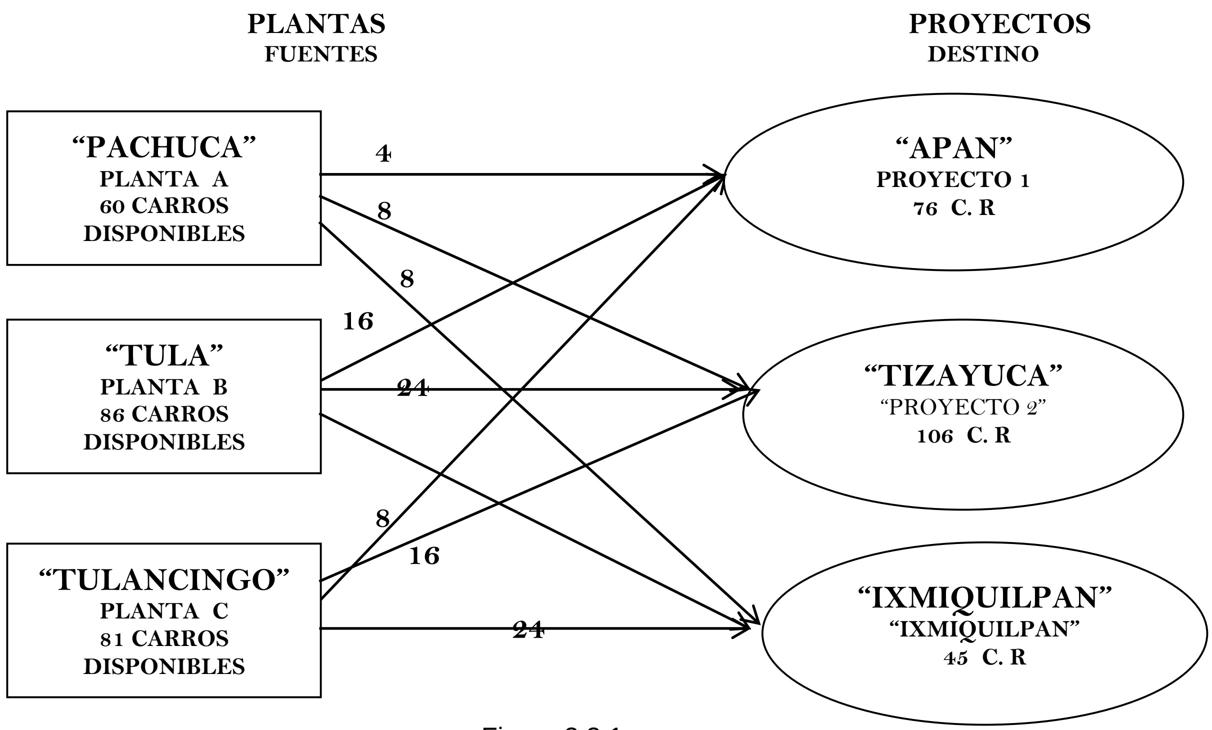



Figura 2.3.1

Definido el esquema anterior, se procede a colocar su información mediante el establecimiento de una matriz o tabla de transporte, mostrada en la matriz 2.3.1, como sigue:

**MATRIZ DE TRANSPORTE**

| DE / A | PROYECTO 1 APAN | PROYECTO 2 TIZAYUCA | PROYECTO 3 IXMIQUILPAN | CAPACIDAD PLANTA |
|---|---|---|---|---|
| **Planta A Pachuca** | $\boxed{4}$ | $\boxed{8}$ | $\boxed{8}$ | 60 |
| **Planta B Tula** | $\boxed{16}$ | $\boxed{24}$ | $\boxed{16}$ | 86 |
| **Planta C Tulancingo** | $\boxed{8}$ | $\boxed{16}$ | $\boxed{24}$ | 81 |
| **Requerimientos** | 76 | 106 | 45 | 227/227 |

Matriz 2.3.1

Ahora se procede a establecer una solución inicial mediante uno de los dos métodos más utilizados, el de la esquina del noroeste (el otro es el del costo mínimo).

El método de la esquina del noroeste, como su nombre lo indica, consiste en ir rellenando desde la parte del noroeste de la matriz de transporte las cantidades correspondientes de acuerdo con lo que disponen las fuentes para poder cumplir con las necesidades de los destinos. Así, para el ejemplo que analizamos, la solución inicial aplicando este método queda como se muestra en la siguiente matriz:

**MATRIZ DE TRANSPORTE**

| DE / A | PROYECTO 1 APAN | PROYECTO 2 TIZAYUCA | PROYECTO 3 IXMIQUILPAN | CAPACIDAD PLANTA |
|---|---|---|---|---|
| **Planta A Pachuca** | $\boxed{4}$ **60** | $\boxed{8}$ | $\boxed{8}$ | 60 |
| **Planta B Tula** | **16** $\boxed{16}$ **(76-60)** | **70** $\boxed{24}$ **(86-16)** | $\boxed{16}$ | 86 |
| **Planta C Tulancingo** | $\boxed{8}$ | **36** $\boxed{16}$ **(106-70)** | **45** $\boxed{24}$ **(81-36)** | 81 |
| **Requerimientos** | 76 | 106 | 45 | 227/227 |

Matriz 2.3.2

Después, se procede a obtener el valor del costo total de la suma de cada uno de los productos de las celdas ocupadas. Cada producto se conoce al multiplicar la cantidad de carga-requerimiento utilizada por el costo unitario que cuesta enviar dicha carga-requerimiento, sumando cada uno de los productos consistente en multiplicar el valor de las cargas-requerimientos por cada uno de los costos unitarios.

Para este caso, el valor del costo total de la solución inicial se alcanza así:

$$\text{Costo Total} = (60 \times 4) + (16 \times 16) + (70 \times 24) + (36 \times 16) + (45 \times 24)$$

$$\text{Costo Total} = 240 + 256 + 1680 + 576 + 1080$$

$$\text{Costo total} = 3{,}832$$

Luego se procede a comprobar el número de casilleros ocupados, utilizando la Ec. 2.3.1, como sigue:

$$\text{Número de casilleros ocupados} = n + m - 1 \qquad \text{Ec. 2.3.1}$$

Entonces, como la matriz es de orden “m x n”, es decir, “m renglones” por “n columnas”, en donde $m = 3$ y $n = 3$, sustituyendo, se tiene:

$$\text{Número de casilleros ocupados} = 3 + 3 - 1 = 5$$

Como se puede observar, el resultado obtenido en la matriz 2.3.1 indica el número de celdas ocupadas por la solución inicial, que para el caso del ejemplo resultó cinco.

Si la Ec. 2.3.1 hubiera dado un resultado diferente al número de celdillas ocupadas, significaría que esa posible solución no es factible. Como en este ejemplo se advierte que la solución obtenida sí cumple con las características de una solución inicial, ahora se procede a probar si es factible.

Después de haber obtenido la solución inicial, la siguiente acción es determinar si es la mejor, o sea, representa la solución de costo mínimo. Este procedimiento de evaluación implica examinar cada celdilla de las que quedaron vacías para valorar si es más deseable cambiar el embarque a uno de ellos. Esta evaluación, por tanto, tiene como propósito determinar si existe un mejor programa de embarques de las fuentes a los destinos; en el caso del ejemplo de las plantas a los proyectos, la solución inicial fue de costo mínimo. Para llevar a cabo esta actividad se dan los siguientes pasos:

a. Construir una tabla o matriz que represente las asignaciones alternas de la fuente a destino.

b. Colocar los costos de embarque, es decir, los unitarios, denominados *costos de puntos de apoyo*. Se asignan con la letra *c*.

Estos pasos se pueden esquematizar en la siguiente matriz:

**ELEMENTOS DE MARGEN DERECHO (M.D.) = a**

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | |
| 16 | 24 | |
| | 16 | 24 |

**ELEMENTOS DE MARGEN INFERIOR (M.I.) = b**

Matriz 2.3.3

**c.** Luego, se seleccionará el menor de los costos unitarios anotados. Si existen dos o más costos iguales, se elegirá el que se desee, siempre y cuando se anote entre paréntesis dicho valor en el renglón que más celdillas tenga ocupadas.

**d.** Se obtienen los valores de los márgenes derecho *(M. D. = a)* e inferior *(M. I. = b)* y los demás costos unitarios *(costo unitario = c)*, a través de las relaciones mostradas en las Ecs. 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.4:

c = a + b Ec. 2.3.2
a = c - b Ec. 2.3.3
b = c - a Ec. 2.3.4

Los incisos *c* y *d* se pueden apreciar en la matriz 2.3.4, como sigue. Primero se obtienen los valores de los márgenes inferiores *(M. I.)* y derecho (*M. D.*), ya determinados en la matriz 2.3.4, como sigue:

| | | | | M. D. = a |
|---|---|---|---|---|
| | $4^c$ | | | -8 |
| | 16 | $24^c$ | | ( 4 ) |
| | | $16^c$ | $24^c$ | - 4 |
| M. I. = b | 12 | 20 | 28 | |

Matriz 2.3.4

Los valores de los márgenes inferior *(M. I.)* y derecho *(M. D.)* fueron calculados aplicando las Ecs. 2.3.3 y 2.3.4 de la siguiente manera:

b = c – a = 16 – 4 = 12

b = c – a = 24 - 4 = 20

a = c – b = 4 - 12 = -8

b = c – a = 16 – 20 = -4

b = c – a = 24 – (-4) = 28

Después, ubicados los valores del margen inferior *(M. I.)* y del derecho *(M. D.)*, ya determinados en la matriz 2.3.4, se procede a encontrar los valores de los costos de apoyo; es decir, de las celdillas vacías, que no fueron ocupadas por la solución inicial. Estos valores se muestran en la matriz 2.3.5:

| | | | | M. D. = a |
|---|---|---|---|---|
| | $4^c$ | 12 | 20 | -8 |
| | 16 | $24^c$ | 32 | ( 4 ) |
| | 8 | $16^c$ | $24^c$ | - 4 |
| M. I. = b | 12 | 20 | 28 | |

Matriz 2.3.5

Los valores de los costos de apoyo *(c)* fueron calculados aplicando la Ec. 2.3.2, del siguiente modo:

$$c = a + b = 12 + (-4) = 8$$

$$c = a + b = 20 + (-8) = 12$$

$$c = a + b = 28 + (-8) = 20$$

$$c = a + b = 28 + 4 = 32$$

En tercer lugar, se procede a determinar los valores de los costos mínimos: a los valores de la matriz 2.3.5 –costos modificados– se le restan los valores de la matriz 2.3.2 –costos originales–, cuyos valores se muestran en la matriz 2.3.6, de la siguiente forma:

Costos Modificados

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 12 | 20 |
| 16 | 24 | 32 |
| 8 | 16 | 24 |

-

Costos Originales

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 8 | 8 |
| 16 | 24 | 16 |
| 8 | 16 | 24 |

=

Costos Mínimos

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 4 | 12 |
| 0 | 0 | 16 |
| 0 | 0 | 0 |

Matriz 2.3.6

Determinados los valores de los costos mínimos, se procede a evaluarlos para verificar si cumplen con la siguiente regla: cuando se ha hecho el análisis de obtención de los costos mínimos de una solución inicial, si los resultados de estos costos dan ceros y valores negativos, entonces, la solución es óptima; en caso contrario, se procede a realizar una nueva iteración a fin de encontrar una nueva solución que sea factible.

Como se puede advertir, esta regla no se cumple en el ejemplo, ya que dieron valores positivos y ceros; será necesario hacer una primera iteración, que conste en lo siguiente.

Calculados los valores de las diferencias, se escogerá el mayor valor positivo de la diagonal, el cual indica que el costo total disminuirá si entra en la solución factible.

Por tanto, se asigna una cantidad (*) en la celdilla correspondiente de la matriz 2.3.2 inicial y se le resta y suma en forma alternada de cada renglón y cada columna involucrada hasta lograr que permanezcan invariables.

En el caso del ejemplo, se distingue que el mayor valor resultante de la matriz 2.3.6 fue 16; entonces, se toma como referencia la celdilla donde está ubicado dicho valor; y enseguida se regresa a la matriz 2.3.2 para poder buscar la nueva solución factible.

Así, a la matriz 2.3.2 se le hicieron las modificaciones que se pueden observar en la matriz 2.3.7, como sigue:

**MATRIZ DE TRANSPORTE**

| DE / A | PROYECTO 1 APAN | PROYECTO 2 TIZAYUCA | PROYECTO 3 IXMIQUILPAN | CAPACIDAD PLANTA |
|---|---|---|---|---|
| **Planta A Pachuca** | $\boxed{4}$ **60** | $\boxed{8}$ | $\boxed{8}$ | 60 |
| **Planta B Tula** | **16** $\boxed{16}$ **(76-60)** | $\boxed{24}$ **70 – ( * )** | $\boxed{16}$ **( * )** | 86 |
| **Planta C Tulancingo** | $\boxed{8}$ | $\boxed{16}$ **36 + ( * )** | $\boxed{24}$ **45 – ( * )** | 81 |
| **Requerimientos** | 76 | 106 | 45 | 227/227 |

Matriz 2.3.7

De la matriz 2.3.7, se determina lo siguiente: si ( * ) = 45, es porque es el *valor* más pequeño de los dos que se van a restar para poder encontrar la nueva solución. Luego, se tiene que la matriz 2.3.7 se modifica resultando la siguiente solución factible mostrada en la matriz 2.3.8:

**MATRIZ DE TRANSPORTE**

| **DE / A** | **PROYECTO 1<br>APAN** | **PROYECTO 2<br>TIZAYUCA** | **PROYECTO 3<br>IXMIQUILPAN** | **CAPACIDAD<br>PLANTA** |
|---|---|---|---|---|
| **Planta A<br>Pachuca** | **4**<br>**60** | **8** | **8** | 60 |
| **Planta B<br>Tula** | **(76-60)** **16**<br>**16** | **(70 – 45)** **24**<br>**25** | **16**<br>**45** | 86 |
| **Planta C<br>Tulancingo** | **8** | **(36 + 45)** **16**<br>**81** | **24** | 81 |
| **Requerimientos** | 76 | 106 | 45 | 227/227 |

Matriz 2.3.8

Después de haber obtenido la nueva solución factible, se procede a encontrar el valor de su costo total, de la siguiente manera:

Costo total = (60 x 4) + (16 x 16) + (25 x 24) + (81 x 16) + (45 x 16)

Costo total = 240 + 256 + 600 + 1296 + 720

Costo total = 3,112

Posteriormente, se procede a comprobar el número de casilleros ocupados por la nueva solución, utilizando nuevamente la Ec. 2.3.1, como sigue:

Número de casilleros ocupados = n + m - 1 Ec. 2.3.1

Entonces, como la matriz es de orden "m x n", es decir, "m renglones" por "n columnas", en donde *m = 3* y *n = 3*, sustituyendo, se tiene:

Número de casilleros ocupados = 3 + 3 - 1 = 5

Como se puede distinguir, el resultado obtenido en la matriz 2.3.8 indica el número de celdas ocupadas por la nueva solución factible, que para el caso del ejemplo resultó ser nuevamente de cinco celdillas ocupadas.

Hecha la comprobación del número de celdas cubiertas por la nueva solución factible, se procede a realizar otra vez los pasos de los incisos *a, b, c* y *d* para verificar si esta solución es la mínima.

**a.** Nuevamente se obtienen los valores del margen derecho *(M. D. = a)* y del margen inferior *(M. I. = b)*, y los demás costos unitarios *(costo unitario = c)* a través de las Ecs. 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.4. Por tanto, los valores del margen inferior *(M. I.)* y del margen derecho *(M. D.)* se encuentran ya determinados en la matriz 2.3.9 como sigue:

| | | | | **M. D. = a** |
|---|---|---|---|---|
| | $4^c$ | | | |
| | 16 | $24^c$ | 16 | **-8** |
| | | $16^c$ | | **( 4 )** |
| | | | | **- 4** |
| **M. I. = b** | **12** | **20** | **12** | |

Matriz 2.3.9

Los valores del margen inferior *(M. I.)* y del margen derecho *(M. D.)* fueron calculados aplicando las Ecs. 2.3.3 y 2.3.4, de la siguiente forma:

b =  c – a = 16 – 4 = 12

b = c – a = 24   - 4 = 20

b  =  c – a = 16  - 4 = 12

a = c – b = 4 – 12 = -8

a = c – b = 16 – 20 = -4

Ubicados los valores del margen inferior *(M. I.)* y del margen derecho *(M. D.)*, ya determinados en la matriz 2.3.9, se procede a encontrar los valores de los costos de apoyo, es decir, de las celdillas vacías que no fueron ocupadas por la solución inicial. Estos valores se muestran en la matriz 2.3.10 como sigue:

| | | | | M. D. = a |
|---|---|---|---|---|
| | $4^c$ | 12 | 4 | -8 |
| | 16 | $24^c$ | 16 | ( 4 ) |
| | 8 | $16^c$ | 8 | - 4 |
| **M. I. = b** | **12** | **20** | **12** | |

Matriz 2.3.10

Los valores de los costos de apoyo *(c)* fueron calculados aplicando la Ec. 2.3.2 de la siguiente forma:

c =  a  + b = 12 +  (–4) = 8

c = a + b = 20 + (-8) = 12

c =  a + b = 12 + (-8) = 4

c = a + b = 12 + (-4) = 8

Luego, se procede a determinar los valores de los costos mínimos: a los valores de la matriz 2.3.10 –costos modificados– se le restan los de la matriz 2.3.8 –costos originales–, cuyos valores se muestran en la matriz 2.3.11, de la siguiente manera:

| Costos Modificados | | | | Costos Originales | | | | Costos Mínimos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 12 | 20 | | 4 | 8 | 8 | | 0 | 4 | -4 |
| 16 | 24 | 16 | - | 16 | 24 | 16 | = | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 16 | 8 | | 8 | 16 | 24 | | 0 | 0 | -16 |

Matriz 2.3.11

Fijados los valores de los costos mínimos, se procede a evaluarlos para verificar si cumplen con la siguiente regla: *cuando se ha hecho el análisis de obtención de los costos mínimos de la solución factible correspondiente a la primera iteración, si los resultados de estos costos dan ceros y valores negativos, la solución es óptima; en caso contrario, se procede a realizar una nueva iteración, a fin de encontrar una nueva solución que sea factible.*

Como se puede notar, esta regla no se cumple en el ejemplo: se dieron valores positivos y negativos, y ceros; por tanto, es necesario hacer una segunda iteración, que consiste en lo siguiente: una vez calculados los valores de las diferencias, se deberá escoger el mayor valor positivo de la diagonal, el cual indica que el costo total disminuirá si entra en la solución factible. Por tanto, se asigna una cantidad (*) en la celdilla correspondiente de la matriz 2.3.11 inicial y se le resta y suma en forma alternada de cada renglón y cada columna involucrada hasta lograr que permanezcan invariables.

En el caso del ejemplo, se nota que de la matriz 2.3.11 el mayor valor resultante fue 4; en consecuencia, se toma como referencia a la celdilla donde está ubicado dicho valor, e inmediatamente se regresa a la matriz 2.3.2 para buscar la nueva solución factible. Una vez analizada la primera iteración, este valor de 4 es el único valor positivo que quedó, por eso resultó ser el mayor. Asimismo, se le hicieron las siguientes modificaciones a la matriz 2.3.2, como se puede distinguir en la matriz 2.3.12:

**MATRIZ DE TRANSPORTE**

| DE / A | PROYECTO 1 APAN | PROYECTO 2 TIZAYUCA | PROYECTO 3 IXMIQUILPAN | CAPACIDAD PLANTA |
|---|---|---|---|---|
| **Planta A Pachuca** | **4** **60 – ( * )** | **8** **( * )** | **8** | 60 |
| **Planta B Tula** | **16** **16 + ( * )** | **24** **25 – ( * )** | **16** **45** | 86 |
| **Planta C Tulancingo** | **8** | **16** **81** | **24** | 81 |
| **Requerimientos** | 76 | 106 | 45 | 227/227 |

Matriz 2.3.12

De la matriz 2.3.12, se determina lo siguiente: si *( * ) = 25*, se debe a que es el valor más pequeño de los dos que se van a restar para encontrar la nueva solución. Luego, la matriz 2.3.12 se modifica y resulta la siguiente solución factible, mostrada en la matriz 2.3.13:

**MATRIZ DE TRANSPORTE**

| DE / A | PROYECTO 1 APAN | PROYECTO 2 TIZAYUCA | PROYECTO 3 IXMIQUILPAN | CAPACIDAD PLANTA |
|---|---|---|---|---|
| **Planta A Pachuca** | **(60 – 25)** **4** **35** | **8** **25** | **8** | 60 |
| **Planta B Tula** | **(16 + 25)** **16** **41** | **24** | **16** **45** | 86 |
| **Planta C Tulancingo** | **8** | **16** **81** | **24** | 81 |
| **Requerimientos** | 76 | 106 | 45 | 227/227 |

Matriz 2.3.13

Después de hallar la nueva solución factible, se procede a obtener el valor de su costo total de la siguiente manera:

Costo total = (35 x 4) + (25 x 8) + (41 x 16) + (45 x 16) + (81 x 16)

Costo total = 140 + 200 + 656 + 720 + 1296

Costo total = 3,012

Posteriormente, se procede a comprobar el número de casilleros ocupados por la nueva solución, utilizando otra vez la Ec. 2.3.1:

Número de casilleros ocupados = n + m -1 Ec. 2.3.1

Entonces, como la matriz es de orden “m x n”, es decir, “m renglones” por “n columnas”, en donde *m = 3* y *n = 3*, sustituyendo, se tiene:

Número de casilleros ocupados = 3 + 3 - 1 = 5

Así, el resultado obtenido en la matriz 2.3.13 indica el número de celdas ocupadas por la nueva solución factible, que para el caso del ejemplo resultó ser también de cinco celdillas ocupadas.

Hecha la comprobación del número de celdas ocupadas por la nueva solución factible, se procede a reiterar los pasos de los incisos *a, b, c* y *d* para poder verificar si esta solución es la mínima.

**b.** Otra vez, se obtienen los valores del margen derecho *(M. D. = a)* y los del inferior (*M. I. = b)*, y los demás costos unitarios *(costo unitario = c)*, a través de las Ecs. 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.4. Por tanto, los valores del margen inferior *(M. I.)* y del derecho *(M. D.)* se encuentran determinados en la matriz 2.3.14 como sigue:

**c.**

**M. D. = a**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4^c$ | 8 | | -8 |
| 16 | | 16 | ( 4 ) |
| | $16^c$ | | 0 |
| **M. I. = b** 12 | 16 | 12 | |

Matriz 2.3.14

Los valores del margen inferior *(M. I.)* y del derecho *(M. D.)* fueron calculados aplicando las Ecs. 2.3.3 y 2.3.4 de la siguiente forma:

$$b = c - a = 16 - 4 = 12$$

$$b = c - a = 16 - 4 = 12$$

$$a = c - b = 4 - 12 = -8$$

$$b = c - a = 8 - (-8) = 16$$

$$a = c - b = 16 - 16 = 0$$

Ubicados los valores del margen inferior *(M. I.)* y del derecho *(M. D.),* ya determinados en la matriz 2.3.14, se procede a encontrar los de los costos de apoyo, es decir, de las celdillas vacías que no fueron ocupadas por la solución inicial. Estos valores se muestran en la matriz 2.3.15 como sigue:

**M. D. = a**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4^c$ | 8 | 4 | -8 |
| 16 | 20 | 16 | ( 4 ) |
| 12 | $16^c$ | 12 | 0 |
| **M. I. = b** 12 | 16 | 12 | |

Matriz 2.3.15

Los valores de los costos de apoyo *(c)* fueron calculados aplicando la Ec. 2.3.2, de la siguiente manera:

c = a + b = 12 + (0) = 12

c = a + b = 16 + 4 = 20

c = a + b = 12 + (-8) = 4

c = a + b = 12 + (0) = 12

Después, se procede a determinar los valores de los costos mínimos: a los valores de la matriz 2.3.15 –costos modificados– se les restan los valores de la matriz 2.3.13 –costos originales–, cuyos valores se muestran en la matriz 2.3.16:

Costos Modificados

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 8 | 4 |
| 16 | 20 | 16 |
| 12 | 16 | 12 |

-

Costos Originales

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 8 | 8 |
| 16 | 24 | 16 |
| 8 | 16 | 24 |

=

Costos Mínimos

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | -4 |
| 0 | -4 | 0 |
| 4 | 0 | -12 |

Matriz 2.3.16

Determinados los valores de los costos mínimos, se procede a evaluarlos a fin de verificar si cumplen con la siguiente regla: *cuando se ha hecho el análisis de obtención de los costos mínimos de la solución factible correspondiente a la primera iteración, si los resultados de estos costos dan ceros y valores negativos, la solución es óptima; en caso contrario, se procede a realizar una nueva iteración, a fin de encontrar una nueva solución que sea factible.*

Esta regla no se cumple en el ejemplo: se obtuvieron valores positivos, negativos y ceros. Por tanto, será necesario hacer una tercera iteración, como se describe a continuación.

Una vez calculados los valores de las diferencias, se deberá escoger el mayor valor positivo de la diagonal, el cual indica que el costo total disminuirá si entra en la solución factible. Por tanto, se asigna una cantidad (*) en la celdilla correspondiente de la matriz 2.3.16 inicial, y se le resta y suma de forma alternada en cada renglón y cada columna involucrada hasta lograr que permanezcan invariables.

En el ejemplo, se distingue que de la matriz 2.3.16 el mayor valor resultante fue 4, por tanto, se toma como referencia la celdilla donde está ubicado dicho valor, e inmediatamente se regresa a la matriz 2.3.2, para buscar la nueva solución factible.

Analizada la segunda iteración, el valor de 4 fue el único positivo que quedó, por tanto, éste resultó ser el mayor.

Como se puede notar, a la matriz 2.3.2 se le hicieron las siguientes modificaciones, expresadas en la matriz 2.3.17, como sigue:

**MATRIZ DE TRANSPORTE**

| DE / A | PROYECTO 1 APAN | PROYECTO 2 TIZAYUCA | PROYECTO 3 IXMIQUILPAN | CAPACIDAD PLANTA |
|---|---|---|---|---|
| **Planta A Pachuca** | **4** **35 – ( * )** | **8** **25 + ( * )** | **8** | 60 |
| **Planta B Tula** | **16** **41** | **24** | **16** **45** | 86 |
| **Planta C Tulancingo** | **8** **( * )** | **16** **81 – ( * )** | **24** | 81 |
| **Requerimientos** | 76 | 106 | 45 | 227/227 |

Matriz 2.3.17

De la matriz 2.3.17, se determina que si *( * ) = 35* es porque es el valor más pequeño de los dos que se van a restar para encontrar la nueva solución. Entonces, se tiene que la matriz 2.3.17 se modifica y resulta la solución factible en la matriz 2.3.18, como sigue:

**MATRIZ DE TRANSPORTE**

| DE / A | PROYECTO 1 APAN | PROYECTO 2 TIZAYUCA | PROYECTO 3 IXMIQUILPAN | CAPACIDAD PLANTA |
|---|---|---|---|---|
| **Planta A Pachuca** | **4** | **(25 + 35)** **8** **60** | **8** | 60 |
| **Planta B Tula** | **16** **41** | **24** | **16** **45** | 86 |
| **Planta C Tulancingo** | **8** **35** | **(81 – 35)** **16** **46** | **24** | 81 |
| **Requerimientos** | 76 | 106 | 45 | 227/227 |

Matriz 2.3.18

Después, se procede a obtener el valor del costo total:

$$\text{Costo total} = (60 \times 8) + (41 \times 16) + (45 \times 16) + (35 \times 8) + (46 \times 16)$$

$$\text{Costo total} = 480 + 656 + 720 + 280 + 736$$

$$\text{Costo total} = 2{,}872$$

Luego, se comprueba el número de casilleros ocupados por la nueva solución, utilizando nuevamente la Ec. 2.3.1, como sigue:

$$\text{Número de casilleros ocupados} = n + m - 1 \qquad \text{Ec. 2.3.1}$$

Entonces, como la matriz es de orden “m x n”; es decir, “m renglones” por “n columnas”, en donde $m = 3$ y $n = 3$, sustituyendo, se tiene:

$$\text{Número de casilleros ocupados} = 3 + 3 - 1 = 5$$

El resultado obtenido en la matriz 2.3.13 indica el número de celdas ocupadas por la nueva solución factible: cinco.

Hecha la comprobación del número de celdas ocupadas por la nueva solución factible, se reiteran los pasos de los incisos *a, b, c* y *d*, para verificar si esta solución representa ser la mínima.

**c.** Otra vez, se obtienen los valores de los márgenes derecho *(M. D. = a)* e inferior *(M. I. = b)*, y los demás costos unitarios *(Costo Unitario = c)*, a través de las Ecs. 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.4. Por tanto, los valores del margen inferior *(M. I.)* y derecho *(M. D.)* ya se encuentran determinados en la matriz 2.3.19, como sigue:

| | | | | M. D. = a |
|---|---|---|---|---|
| | | 8 | | -8 |
| | 16 | | 16 | ( 8 ) |
| | 8 | $16^c$ | | 0 |
| **M. I. = b** | **8** | **16** | **8** | |

Matriz 2.3.19

Los valores de los márgenes inferior *(M. I.)* y derecho *(M. D.)* fueron calculados aplicando las Ecs. 2.3.3 y 2.3.4, de la siguiente forma:

b = c – a = 16 – 8 = 8

b = c – a = 16 - 8 = 8

a = c – b = 8 - 8 = 0

b = c – a = 16 – 0 = 16

a = c – b = 8 – 16 = -8

Luego, se procede a determinar los valores de los costos de apoyo, o sea, de las celdillas vacías que no fueron ocupadas por la solución inicial. Estos valores se muestran en la matriz 2.3.20, como sigue:

**M. D. = a**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 8 | 0 | **-8** |
| | 16 | 24 | 16 | **( 8 )** |
| | 8 | 16$^{c}$ | 8 | **0** |
| **M. I. = b** | **8** | **16** | **8** | |

Matriz 2.3.20

Los valores de los costos de apoyo *(c)* fueron calculados aplicando la Ec. 2.3.2, de la siguiente forma:

$$c = a + b = 8 + (-8) = 0$$

$$c = a + b = 8 + (-8) = 0$$

$$c = a + b = 16 + 8 = 24$$

$$c = a + b = 8 + (0) = 8$$

Después, se procede a determinar los valores de los costos mínimos: a los valores de la matriz 2.3.20 –costos modificados–, se les restan los de la matriz 2.3.18 –costos originales–, cuyos valores se muestran en la matriz 2.3.21:

Costos Modificados

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 8 | 0 |
| 16 | 24 | 16 |
| 8 | 16 | 8 |

-

Costos Originales

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 8 | 8 |
| 16 | 24 | 16 |
| 8 | 16 | 24 |

=

Costos Mínimos

| | | |
|---|---|---|
| -4 | 0 | -8 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | -16 |

Matriz 2.3.21

> Encontrados los valores de los costos mínimos, se procede a evaluarlos para verificar si cumplen con la siguiente regla: *cuando se ha hecho el análisis de obtención de los costos mínimos de la solución factible correspondiente a la tercera iteración, si los resultados de estos costos dan ceros y valores negativos, la solución es óptima; en caso contrario, se procede a realizar una nueva iteración, a fin de encontrar una nueva solución que sea factible.*

Esta regla se cumple en el ejemplo: dieron valores negativos y ceros. No será necesario hacer una cuarta iteración.

En consecuencia, para el ejemplo analizado se pueden establecer las siguientes conclusiones con respecto a la solución factible determinada.

La Junta Local de Caminos del Estado de Hidalgo tendrá que seguir este itinerario. Enviará 60 cargas de la Planta A de Pachuca con destino al Proyecto 2 con sede en Tizayuca a un costo unitario de 8 unidades monetarias. Posteriormente, tendrá que enviar 41 cargas de la Planta B de Tula con destino al Proyecto 1 con sede en Apan a un costo unitario de 16 unidades monetarias. Después, remitirá 45 cargas de la Planta B de Tula con destino al Proyecto 3 con sede en Ixmiquilpan, a un costo unitario de 16 unidades monetarias. Inmediatamente después, mandará 35 cargas de la Planta C de Tulancingo con destino al Proyecto 1 con sede en Apan, a un costo unitario de 8 unidades monetarias. Finalmente, llevará 46 cargas de la Planta C de Tulancingo con destino al Proyecto 2 con sede en Tizayuca, a un costo unitario de 16 unidades monetarias. Todas estas operaciones producen un costo total mínimo de $2,872.00 unidades monetarias.

Analizado el desarrollo y aplicación del algoritmo correspondiente al modelo de transporte en el ejemplo anterior, se resumen de manera general los pasos que contiene este algoritmo para poder obtener la solución óptima mínima dado un problema determinado:

1. Se procede a construir una tabla o matriz de transporte inicial, en donde se muestre toda la información general que todo problema determinado contiene para poder obtener su solución óptima mínima requerida.

2. Información que debe contener esta matriz de transporte inicial: nombres de las fuentes y sus capacidades; nombres de los destinos, así como los requerimientos que necesitan, de tal forma que en un caso hipotético la suma de todas capacidades contempladas sean iguales a todos los requerimientos solicitados (aunque en la práctica no siempre suele ser así); y finalmente en cada celdilla de la matriz, en la parte superior derecha, los costos unitarios (cantidades que indican cuánto cuesta transportar cada unidad de carga desde una fuente hasta un destino).

3. Contenida la información proporcionada por un problema determinado, se plantea una solución inicial, la cual se puede obtener aplicando algún método, como el de la esquina del noroeste o el del costo mínimo.

4. Luego, se procede a valorar si la solución inicial es óptima. Si no lo eso, se procede a determinar una nueva solución óptima, denominada *factible*, para que ésta pueda mejorarse. Para ello, se deben seguir estos pasos:

    a. Para determinar si la solución inicial es la mejor, se evalúa. En dicha verificación, se analiza cada una de las celdillas vacías o no disponibles, para valorar si alguna de ellas es más deseable.

    b. El propósito de realizar esta evaluación es determinar si puede darse un mejor programa de embarques desde las fuentes o plantas hacia los destinos o proyectos, desarrollando los siguientes pasos.

- Armar la matriz de transporte donde se representen las asignaciones alternas de una fuente hacia un destino.

- A esta matriz se le denomina *de punto de apoyo*, la cual se muestra en la matriz 2.3.22:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | |
| 16 | 24 | |
| | 16 | 24 |

ELEMENTOS DE MARGEN INFERIOR (M. I.)

ELEMENTOS DE MARGEN DERECHO (M. D.)

Matriz 2.3.22

**c.** Después, se colocan los costos unitarios o de embarque, llamados *de apoyo*.

**d.** De los costos anotados, se escogerá el menor de ellos. Si existen dos o más, se seleccionará el que sea, anotando entre paréntesis dicho valor en el renglón que tenga más celdillas ocupadas.

**e.** Inmediatamente después, se determinan los valores del margen derecho (M. D. = a) y los valores del margen inferior (M. I. = b) y los demás valores de los costos no utilizados o que están vacios (costo = c) de tal forma que cumplan con la siguiente relación: a + b = c.

**f.** Se deberá seleccionar el valor mayor positivo de la diagonal, ya que éste indica que el costo total irá disminuyendo si entra en la solución factible. Entonces, se asigna una cantidad ( * ) en la celdilla correspondiente de la tabla o matriz inicial, y después se le resta y suma en forma alternada de cada renglón y cada columna, hasta lograr que estas permanezcan invariables.

**g.** Obtenida la evaluación de la solución factible, se analiza si cumple con la siguiente regla: *cuando se ha hecho el análisis de obtención de los costos mínimos de una solución inicial, si los resultados de estos costos dan ceros y valores negativos, la solución es óptima; en caso contrario, se procede a realizar una nueva iteración, a fin de encontrar una nueva solución que sea factible.*

Por último, si existen algunas situaciones en este método de transporte en donde la oferta no sea igual a la demanda, para resolverlo, se debe agregar un renglón nulo o columna nula, según sea el caso, para que genere la situación de equilibrio, y después realizar todos los pasos ya explicados. Tómese en cuenta que los costos unitarios de este renglón nulo o columna nula deben ser de cero para cada una de sus celdillas.

# 2.4. Modelo de asignación

Por lo regular, los problemas que se resuelven por el método de asignación forman parte de una sub-clase específica de los problemas que se solucionan por el método de transporte.

Para que un problema se pueda resolver aplicando el método de asignación, su particularidad radica en lo siguiente:

La capacidad en cada fuente u origen y los requerimientos en cada destino deberán ser iguales a 1. Significa que el problema trata de tomar la decisión de qué origen deberá asignar a cada destino (de aquí su nombre, *de asignación*).

Los problemas de asignación se pueden aplicar a distintas situaciones: trabajadores a máquinas, equipos de trabajo a proyectos financieros, agentes hipotecarios a fraccionamientos, etcétera.

Para una mejor comprensión de cómo se aplica este método ante un problema determinado, se expondrá un ejemplo; y después se resumirán los pasos que componen el algoritmo de este método.

**Problema 2.4.1**

Una compañía dedicada al servicio de ambulancias tiene disponibles en un momento determinado 4 ambulancias en diferentes lugares de la ciudad. Además, existen 4 pacientes que requieren el servicio en diversos puntos de la ciudad. También se conocen los tiempos de traslado de cada ambulancia. Y los costos de oportunidad de estos tiempos de traslado son los siguientes[7]:

[7] Ejemplo tomado de Charles A. Gallagher y Hugh J. Watson, *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración,* México: McGraw-Hill, 1982, pp. 310-316.

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | 7 | 9 | 8 | 13 |
| Ambulancia 2 | 16 | 16 | 15 | 11 |
| Ambulancia 3 | 16 | 19 | 10 | 15 |
| Ambulancia 4 | 16 | 17 | 14 | 16 |

La empresa quiere asignar las ambulancias de modo que logre minimizar el tiempo total de traslado.

**Solución**

Para que la compañía pueda resolver este problema, tendrá que aplicar el método de asignación (también llamado *húngaro*), fundamentado en la utilización de una matriz de costos de oportunidad que permitirá obtener la asignación óptima, a la que se llega mediante los siguientes pasos.

Paso 1

Se establecerá un diagrama esquemático donde se representen las 4 ambulancias y los 4 pacientes, a fin de establecer la relación entre orígenes y destinos. Estas condiciones se representan en el diagrama esquemático 2.4.1:

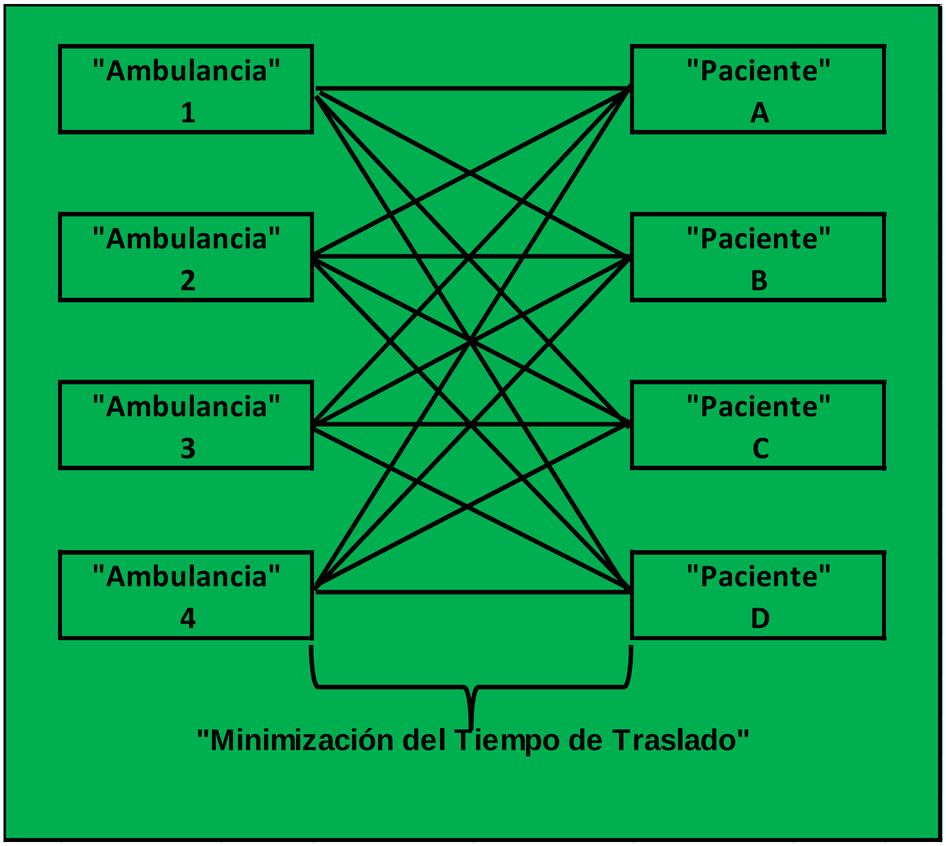



Diagrama esquemático 2.4.1

Paso 2

Realizado el diagrama esquemático, se establece la matriz de los costos de oportunidad que representan el tiempo de viaje de cada origen-destino, y se colocan en el centro de cada celdilla, ya que no se escribirá ningún dato más en la misma, pues no se requieren condiciones de frontera debido a que siempre serán igual a 1. Esto implica que los renglones y columnas pueden intercambiarse de la misma forma como se hace en el método de transporte. En este caso, la matriz de costos de oportunidad se muestra en la matriz 2.4.1, como sigue:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | 7 | 9 | 8 | 13 |
| Ambulancia 2 | 16 | 16 | 15 | 11 |
| Ambulancia 3 | 16 | 19 | 10 | 15 |
| Ambulancia 4 | 16 | 17 | 14 | 16 |

Matriz 2.4.1

Paso 3

De la matriz 2.4.1 de los costos de oportunidad, ahora se procede a llevar a cabo el método de asignación, el cual busca minimizar el costo de oportunidad, por tanto, no usa las celdillas menos costosas. Se procede entonces a desarrollar la reducción por renglón de los costos de oportunidad para cada celdilla: el costo más bajo en cada renglón se resta de cada celdilla de ese renglón. Este proceso se plantea en la matriz 2.4.2:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | (7 – 7) | (9 - 7) | (8 – 7) | (13 – 7) |
| Ambulancia 2 | (16 - 11) | (16 – 11) | (15 – 11) | (11 – 11) |
| Ambulancia 3 | (16 – 10) | (19 - 10) | (10 – 10) | (15 – 10) |
| Ambulancia 4 | (16 - 14) | (17 - 14) | (14 - 14) | (16 – 14) |

Matriz 2.4.2

Paso 4

De la reducción por renglón de la matriz 2.4.2, se obtuvieron los resultados siguientes de cada una de las celdillas para cada uno de los renglones correspondientes, como se muestra en la matriz 2.4.3:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | 0 | 2 | 1 | 6 |
| Ambulancia 2 | 5 | 5 | 4 | 0 |
| Ambulancia 3 | 6 | 9 | 0 | 5 |
| Ambulancia 4 | 2 | 3 | 0 | 2 |

Matriz 2.4.3

Paso 5

De la matriz 2.4.3, se procede a realizar una reducción por columna, donde a cada una de ellas se le resta el costo más bajo a cada una de sus celdillas, como se nota en la matriz 2.4.4:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | (0 – 0) | (2 - 2) | (1 – 0) | (6 – 0) |
| Ambulancia 2 | (5 - 0) | (5 – 2) | (4 – 0) | (0 – 0) |
| Ambulancia 3 | (6 – 0) | (9 - 2) | (0 – 0) | (5 – 0) |
| Ambulancia 4 | (2 - 0) | (3 - 2) | (0 - 0) | (2 – 0) |

Matriz 2.4.4

Paso 6

De la reducción por columna, de la matriz 2.4.4, se obtuvieron los resultados siguientes de cada una de las celdillas para cada columna correspondiente. Esto se puede apreciar en la matriz 2.4.5:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| Ambulancia 2 | 5 | 3 | 4 | 0 |
| Ambulancia 3 | 6 | 7 | 0 | 5 |
| Ambulancia 4 | 2 | 1 | 0 | 2 |

Matriz 2.4.5

Paso 7

Se procede a realizar la verificación de "optimalidad", en donde se examina la matriz de costos de oportunidad para comprobar si se puede realizar una asignación óptima.

Téngase en cuenta que una asignación óptima emplea solamente celdillas con costo cero. Para el caso del ejemplo, esta prueba se lleva a cabo con la regla del mínimo número de líneas. A partir de ésta, se encontrará el mínimo número de líneas requerido para cubrir todos los ceros de la matriz (no se permiten líneas diagonales). Si se analizan los resultados de la matriz 2.4.5, se necesitaron tres líneas. Entonces, para el ejemplo planteado esta regla no se cumple: la solución no es óptima, pues el mínimo número de líneas debe ser igual al de renglones o columnas.
Cabe mencionar que el renglón seleccionado de la matriz 2.4.5 es el primero, dado que éste contiene más ceros y los demás solamente uno. En cuanto a las columnas, dos de ellas –la tercera y cuarta– contienen dos ceros, por tanto, son las tres líneas elegidas. Con estas especificaciones, la matriz 2.4.5 queda de la siguiente forma:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | 0 | 0 | 1 | 6 |
| Ambulancia 2 | 5 | 3 | 4 | 0 |
| Ambulancia 3 | 6 | 7 | 0 | 5 |
| Ambulancia 4 | 2 | 1 | 0 | 2 |

Matriz 2.4.5

Las modificaciones de la matriz anterior, indican lo siguiente:

Para que se cumpliera con la regla del mínimo número de líneas en el caso del ejemplo, faltó seleccionar un renglón o columna y que hubiera tenido dos ceros. Así se habría encontrado la solución óptima; lo cual no ocurrió.

El renglón y las columnas marcados con una línea verde se denominan *marcados* o *seleccionados,* en consecuencia, sus celdillas se encuentran ocupadas. El resto de las celdillas no están ocupadas.

Paso 8

Como no se obtuvo la solución óptima, se realiza el proceso de revisión: encontrar el costo de oportunidad más bajo que existe de las celdillas de los renglones que no tuvieron ceros, o que no están ocupadas, y es 1. Entonces, este valor se resta en las celdillas no ocupadas y se suma en la intersección renglón-columna (que son las celdillas del renglón que fueron ocupadas). Esto se puede notar en la matriz 2.4.6:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | 0 | 0 | (1 + 1) | (6 + 1) |
| Ambulancia 2 | (5 - 1) | (3 – 1) | 4 | 0 |
| Ambulancia 3 | (6 – 1) | (7 - 1) | 0 | 5 |
| Ambulancia 4 | (2 - 1) | (1 - 1) | 0 | 2 |

Matriz 2.4.6

En este caso se consideraron los renglones, pues fue lo que faltó para poder cumplir con la regla del mínimo número de líneas.

Paso 9

Los resultados de la matriz revisada se muestran en la matriz 2.4.7:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | 0 | 0 | 2 | 7 |
| Ambulancia 2 | 4 | 2 | 4 | 0 |
| Ambulancia 3 | 5 | 6 | 0 | 5 |
| Ambulancia 4 | 1 | 0 | 0 | 2 |

Matriz 2.4.7

En la matriz anterior se puede observar que en cada uno de los renglones al menos ya existe un cero, y en las columnas también hay al menos una celdilla con cero. Se procede entonces a la prueba de "optimalidad": seleccionar las celdillas que contienen ceros pero en forma combinada, tanto para los renglones como para las columnas que formen parte de la solución óptima.

Al aplicar esta prueba al ejemplo que analizamos, las celdillas que contienen ceros, seleccionadas en forma combinada renglón-columna (es decir, los lugares que no se encuentran ubicados en el mismo renglón o en la misma columna), son 1A, 4B, 3C y 2D.

Paso 10

Al realizar la prueba de "optimalidad", se advierte que las celdillas seleccionadas y situadas en forma combinada "renglón-columna", que forman parte de la solución óptima, aparecen marcadas en color verde, ahora en la matriz 2.4.8:

| | Paciente A | Paciente B | Paciente C | Paciente D |
|---|---|---|---|---|
| Ambulancia 1 | 0 | 0 | 2 | 7 |
| Ambulancia 2 | 4 | 2 | 4 | 0 |
| Ambulancia 3 | 5 | 6 | 0 | 5 |
| Ambulancia 4 | 1 | 0 | 0 | 2 |

Matriz 2.4.8

Paso 11

La asignación queda de la forma como se muestra en la matriz 2.4.9:

| Asignación | Costo<br>Tiempo de traslado |
|---|---|
| A a 1 | 7 |
| B a 4 | 11 |
| C a 3 | 10 |
| D a 2 | 17 |
| **Total** | 45 |

Matriz 2.4.9

A partir del ejemplo analizado por el método de asignación, se pueden establecer las siguientes conclusiones.

Para minimizar el tiempo de traslado de sus 4 ambulancias disponibles para los 4 pacientes, la compañía deberá cubrir el siguiente itinerario.
La ambulancia A deberá recoger al Paciente 1, el cual le genera un costo de 7 minutos por el tiempo de traslado; la B, al Paciente 4, con un costo de traslado de 11 minutos; la C, al Paciente 3, con un costo de traslado de 10 minutos; y la D, al Paciente 2, con un costo de 17 minutos. En suma, este itinerario le permite a la empresa minimizar los tiempos de traslado con un total de 45 minutos.

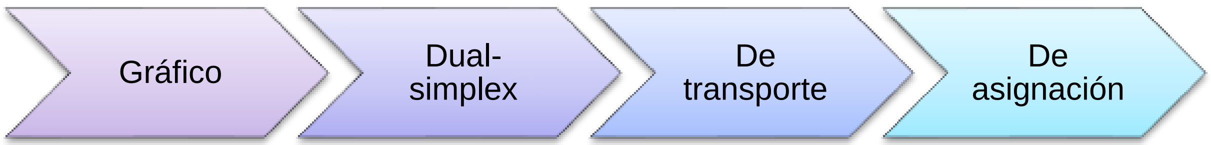
Revisado el ejemplo anterior, se puede concluir que el algoritmo del método de asignación comprende los siguientes pasos:

1. Se elabora un diagrama esquemático en el cual se pueda visualizar el problema en cuestión, con toda la información pertinente a los orígenes con respecto a los destinos.
2. Se desarrollan los costos de oportunidad para cada renglón y columna de la matriz.
3. Se realiza la prueba de “optimalidad” aplicando la regla del mínimo número de líneas.
4. Si no es óptima, se selecciona la celdilla de menor costo que no está cubierta por una línea y se emplea para ajustar a la matriz.
5. Se reiteran los pasos 3 y 4 hasta hallar la solución óptima.

En conclusión, el método de asignación –empleado en forma cotidiana por las empresas en distintas actividades profesionales de procesos y de servicios– es una particularidad del método de transporte: aplica sus mismos conceptos, reglas y principios, pero hace que los analistas tomen mejores decisiones.

# RESUMEN

Se analizó el concepto de programación lineal y se trataron los siguientes métodos de solución de problemas de programación lineal:




La programación lineal es un método de solución de problemas previamente definidos, en el cual una función objetivo debe de maximizarse o minimizarse según sea el caso, considerando una serie de restricciones que reducen el grado en el que puede perseguirse lo que se pretende de la función objetivo, tomando en cuenta la no negatividad de las variables de decisión involucradas en las restricciones que lo definen. Y es aprovechada para resolver problemas referentes a la asignación de recursos limitados. Por ello, su aparición y desarrollo constituyen uno de los avances más importantes dentro del campo de las matemáticas o métodos cuantitativos.

El nombre *de programación* se explica porque se establecen una serie de pasos lógicos que permiten procesar diferentes problemas desde un mismo principio o programa para obtener un resultado *óptimo*. Para maximizar, en forma canónica el modelo de programación lineal queda como se muestra a continuación:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

*sujeto – a- restricciones*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_{m1}$$

*y*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

*El_modelo_general_resumido_es*

$$A\bar{x} \leq \bar{b} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix}$$

Para resolver el modelo de programación lineal, el método comúnmente utilizado es el algebraico, ya que éste puede simular cualquier problemática, y con base en procesos matemáticos, determinar los puntos óptimos para el análisis en general.

En esta unidad, se abordaron los siguientes métodos de solución de problemas de programación lineal:

| | | |
|---|---|---|
| *1. Gráfico.* | Por sus características, está limitado para dos variables, las cuales se representan en un diagrama cartesiano, y de aquí se parte a través de ensayo y error. | **Su ventaja radica en la representación de los diversos comportamientos que se tengan mediante diagramas de áreas e intersecciones de rectas que ayudan a visualizar mejor el problema. Por consiguiente, con el soporte de la programación lineal, este método se reduce en complejidad.** |

| | | |
|---|---|---|
| *2. Dual-simplex.* | Se basa en desarrollar un algoritmo consistente en establecer una solución óptima derivada de un problema de programación lineal.<br>En el lenguaje matemático, se llama *solución* aquello que resuelve un problema dado. Pero en el caso de la programación lineal, hay diferentes tipos de soluciones a las cuales se les califica apropiadamente, con el propósito de identificar las respuestas que se obtengan: | *A. Factible*. Solución para la cual todas las restricciones son satisfechas. |
| | | *B. No factible*. Resuelve el modelo matemático, pero no el de programación lineal, es decir, no se cumple con algún requisito impuesto por las restricciones. |
| | | *C. Óptima*. Brinda el valor más favorable para la función objetivo. Por valor favorable u óptimo se debe entender el más grande para maximizar o el más pequeño para minimizar, que se pueden encontrar al resolver el modelo de programación lineal. Asimismo, es regular que un modelo de programación lineal cuente con una sola solución óptima, aunque también puede ocurrir que se tengan muchas (esto sucede cuando la función objetivo es paralela a la línea que define los vértices de solución optima para el modelo). |

Por otra parte, existe un problema equivalente derivado del principal o primario, denominado *problema dual*, que consiste en generar un planteamiento del problema el cual se origina tomando como referencia al planteamiento del problema principal.

Si el objetivo del problema principal es maximizar, su correspondiente problema dual será minimizar, y viceversa. Maximizar se refiere a las utilidades o beneficios esperados por la empresa; y minimizar, a los costos mínimos deseados para mejorar la situación financiera.

Cuando el modelo matemático de un problema principal se empieza a resolver en forma tabular aplicando el método simplex, se acomodan cada uno de los coeficientes que forman parte del modelo en una matriz (un arreglo conformado de renglones y columnas). Y cuando se pretende hallar el problema dual correspondiente, se obtendrá la matriz transpuesta, la cual se genera de una matriz principal, en donde los renglones de la matriz original se convierten en columnas en la matriz transpuesta.

Para poder plantear el problema dual correspondiente a un problema primario dado, se debe considerar que

- el número de variables del problema dual sea igual al número de restricciones del problema primario.
- el número de restricciones del problema dual sea igual al número de variables del problema primario.
- la función objetivo del problema dual se forme de los valores que constituyen el segundo término del problema primario.
- los valores del segundo término del problema dual sean los coeficientes de la función objetivo del problema primario.
- los coeficientes de los renglones de las restricciones del problema dual sean los coeficientes de las columnas del problema primario.
- la dirección de las restricciones del problema dual sean contrarias a las direcciones de las restricciones del problema primario.

La computadora es un elemento fundamental que ha permitido el desarrollo de la investigación de operaciones. En la actualidad, hay distintos programas informáticos (*software*) que facilitan el trabajo a los analistas al aplicar los métodos de solución revisados en esta unidad, Entre ellos, están el Manager, Solver, Lindo, Tora, Derive y Matlab.

| | |
|---|---|
| *3. Método de transporte*. | Hoy día, el problema del transporte se ha constituido como el más importante dentro de la programación lineal. Consiste en surtir una serie de puntos receptores que tienen establecida cierta demanda a partir de puntos que abastecen, dada una determinada capacidad de almacenamiento o producción. El punto de abastecimiento o abastecedor 1 enviará al punto receptor 1 una cantidad establecida "$x_{11}$" de cierto producto. Además, del mismo abastecedor se mandará al receptor 2 una cantidad "$x_{12}$,"; por tanto, es axial, pues se establece que la variable "$x_{ij}$" representa la cantidad surtida desde un punto de abasto *i* a un punto receptor *j*.<br>Cada punto de abastecimiento puede surtir a cada uno de los receptores, de modo que se pueda en principio establecer "m x n" relaciones. |

| | |
|---|---|
| *4. Método de asignación*. | Para que un problema se solvente aplicando este método, la capacidad en cada fuente u origen y los requerimientos en cada destino, deberán ser iguales a "1". Ello implica que el problema trata de tomar la decisión de qué origen deberá asignarse a cada destino.<br>Suelen emplearlo las empresas en distintas actividades profesionales de procesos, de servicios principalmente. Aunque es una variante del método de transporte –pues aplica sus mismos conceptos, reglas y principios–, lo hace de modo más específico, lo que permite a los analistas tomar mejores decisiones. |

# BIBLIOGRAFÍA

## SUGERIDA

| # | Autor | Capítulo | Páginas |
|---|---|---|---|
| 1 | Gallagher, Charles A. y Watson, Hugh J. | 8. Programación lineal: solución por el método simplex.<br>10. Programación lineal: los métodos de transporte y de asignación. | 199-238<br>281-316 |
| 2 | Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G. | 3. Programación lineal: planteamiento de modelos.<br>4. Método simplex.<br>5. Análisis de sensibilidad y Dualidad. | 63-115<br>129-170<br>185-220 |
| 3 | Camacho Quiroz, Arturo | 8. Método de transporte. | 145-169 |

# Bibliografía básica


1. **1.** Anderson R. David, Sweeney J. Dennis y Williams A. Thomas, *Métodos cuantitativos para los negocios*, 9.ª ed., México: Thompson, 2004, 822 pp.
2. **2.** Camacho Quiroz, Arturo, *Principios de investigación de operaciones para contaduría y administración*, México: Grupo ECAFSA, 1997, 304 pp.
3. **3.** Eppen, G. D. *et al., Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*, 5.ª ed., México: Prentice Hall, 2000, 755 pp.
4. **4.** Gallagher, Charles A. y Watson, Hugh J., *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración*, México: McGraw-Hill, 1982, 612 pp.
5. **5.** Hiller F. y Lieberman G. J., *Introducción a la investigación de operaciones*, México: McGraw-Hill, 2002, 855 pp.
6. **6.** Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G., *Modelos cuantitativos para administración*, 2.ª ed., México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994, 757 pp.
7. **7.** Taha A. Hamndy, *Investigación de operaciones,* 5.ª ed., México: Alfa Omega, 2000, 960 pp.
8. **8.** Wayne L. Winston, *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos,* México: Thompson, 2005, 1418 pp.


# Bibliografía complementaria


1. Bueno A. G. de. *Introducción a la programación lineal y al análisis de sensibilidad*, México: Trillas 1990, 1889 pp.
2. Daellenback H., George J. y D. Menickle, *Introducción a técnicas de investigación de operaciones,* México: CECSA, 1986, 771 pp.

# Sitios de internet

| Sitio | Descripción |
|---|---|
| http://www.investigacion-operaciones.com/Metodos_Solucion_PL.htm. | Métodos de solución de programación lineal. |
| http://www.faces.ucv.ve/eac/materias/5537/documentos/Introduccion%20IO.pdf. | Programación lineal. |

# UNIDAD 3

# Teoría de redes

# OBJETIVO PARTICULAR

El alumno aplicará los métodos y modelos de la teoría de redes para la solución de problemas.

# TEMARIO DETALLADO

## (12 horas)

**3. Teoría de redes**

| |
|---|
| 3.1. Conceptos |
| 3.2. Problema del árbol de peso mínimo |
| 3.3. Problema de la ruta más corta |
| 3.4. Problema del flujo máximo |
| 3.5. CPM |
| 3.6. PERT/costo PERT/tiempo |

# INTRODUCCIÓN

Originada a partir de las ciencias de la computación, las ciencias de las redes y la teoría de grafos, la teoría de redes es una rama de la investigación de operaciones que ha crecido de manera vertiginosa en el funcionamiento, desarrollo y crecimiento de las empresas.

Sin la teoría de redes no se podrían resolver algunos problemas que enfrentan las empresas:

| |
|---|
| Diseño y síntesis de circuitos secuenciales. |
| Diseño de contadores para diversas áreas operativas y de servicios. |
| Diseño de sistemas de apertura |
| Aplicación del dibujo computacional que se lleva a cabo en algunas áreas de la ingeniería. |
| Modelación y diseño de trayectos requeridos por algunas líneas de autobuses urbanas, troncales y foráneas, que buscan obtener caminos óptimos para el trayecto que quieran seguir de un corredor o ramal. En este caso, pueden aplicarse “algoritmos” como el de Floyd. |
| En la administración de proyectos, se emplea con la técnica PERT/CPM, método en el que se modelan los “problemas” que utilizan grafos y permiten la optimización de los tiempos para concretarlos. |

La teoría de redes también ha sido fundamental para realizar aplicaciones de problemas en las ciencias sociales, especialmente para trabajar en un concepto no metafórico denominado *red social* o *redes sociales*, que sustituye a los nodos por los actores sociales y, por consiguiente, verifica la posición, centralidad e importancia de cada actor conectado en la red o redes.

Así, este concepto permite cuantificar y abstraer una serie de relaciones complejas, lo que quiere decir que la estructura social de la red o redes puede representarse en forma gráfica y/o esquemática. Además, se puede dar el caso de que en una red se represente la estructura de poder dentro de una sociedad, y se identifiquen todos sus vínculos o aristas, así como su dirección e intensidad. Por consiguiente, permite proporcionar una idea de la forma como se transmite el poder y a quiénes se dirige.

En algunas literaturas, la teoría de redes suele llamarse *teoría de grafos* o *grafos*, debido a que este término significa “gráfica” o “esquema”. Por ello, los grafos son muy importantes en el estudio de cualquier disciplina. Por ejemplo, la biología y el hábitat ecológico resuelven problemas diversos a través de la teoría de redes. En estos casos, el vértice representa un hábitat y las “aristas” o *edges,* los senderos de los animales o migraciones. Con esta información, los científicos entienden de manera más concisa cómo puede cambiar o afectar esto a las especies en su hábitat.

En resumen, la teoría de redes trata de resolver problemas donde se deben analizar situaciones en las cuales intervienen una serie de elementos tangibles e intangibles, para hacerlos que funcionen, se desarrollen y crezcan. En consecuencia, es imprescindible para que las empresas o grupos corporativos sean competentes y tengan presencia en sus mercados respectivos.

# 3.1. Conceptos[8]

En esta unidad, se analiza la teoría de redes desde el enfoque profesional en el cual se fundamenta, es decir, en una rama de la administración conocida como administración de proyectos.

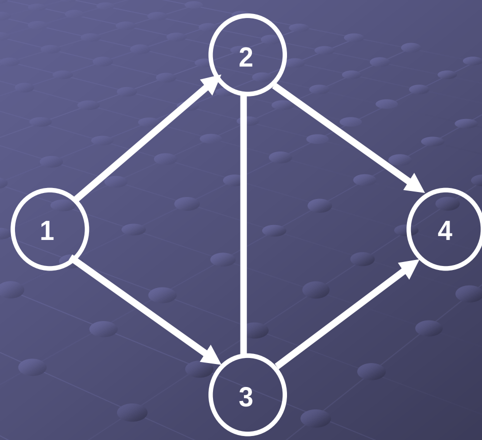
Gracias a la importancia de la teoría de redes en el campo de la investigación de operaciones, las empresas han podido tener muchos éxitos, pues han resuelto problemas industriales y administrativos diversos que las aquejan dentro del entorno en el que se desenvuelven:

- Construcción de todo tipo de presas.
- Determinación de la ruta de transporte más económica o corta entre dos puntos.
- Diseño y construcción de un avión.
- Programación óptima de una serie de actividades.
- Introducción y comercialización de un producto nuevo.

En primera instancia, hay que señalar que *red* es el conjunto de nodos conectados por una serie de arcos. Por tanto, puede considerarse que cualquier red se integra de tres elementos: nodos, arcos y flujos de arcos, como se ilustra en la siguiente figura:

---

[8] Davis Roscoe K. y Patrick McKeown G., *op. cit*., pp. 288-290.




"Figura 3.1.1"

En la imagen anterior, se observa que los círculos representan a los nodos y éstos se encuentran unidos por una serie de arcos, dirigidos y no dirigidos. Los primeros son aquellos sobre los cuales puede moverse el flujo en una sola dirección específica; y en los segundos, el flujo se puede mover en cualquier sentido sin restricción alguna.

En este caso, los arcos que ligan los nodos 1 y 2, 1 y 3, 2 y 4, 3 y 4 son dirigidos; mientras que el arco que une los nodos 2 y 3 es no dirigido.

Normalmente, a los nodos se les asigna un número; por consiguiente, los arcos se denotan por los nodos que éstos vinculan. Por ejemplo, el arco que une los nodos 2 y 4 se identificaría como 24.

Finalmente, el flujo que circula de un nodo a otro a través de un arco es un factor que se desconoce en la red y se le denota como $x_{ij}$ para el flujo entre los nodos *i* y *j*.

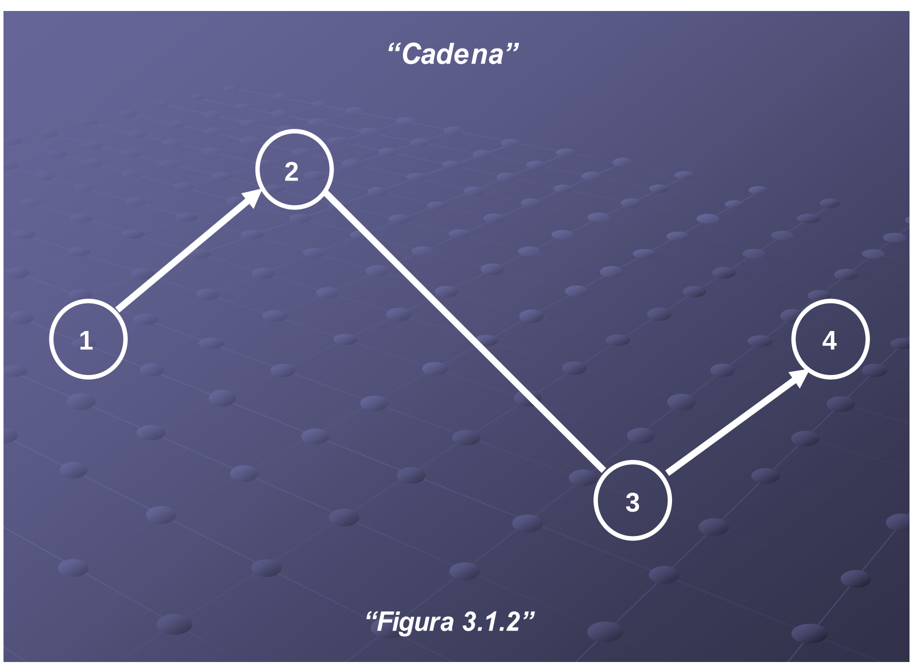
El flujo de una red se puede constituir en una serie de diversos bienes o servicios. Por ejemplo:

- Distribución de gas natural en un gasoducto.
- La asignación que las empresas realizan a la producción a periodos.

El costo unitario del flujo para cada arco se denota $c_{ij}$ para los nodos *i* y *j*.

Además, en una red podrán existir ciertas combinaciones de nodos y arcos con propiedades especiales.

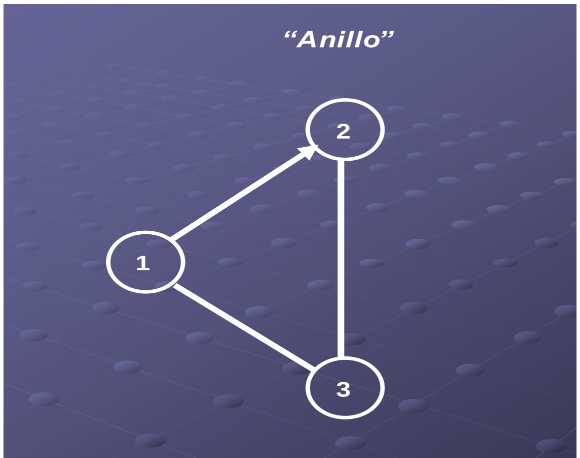
Otro concepto importante dentro de la teoría de redes es el de *cadena*: una sucesión de nodos y arcos que conectan un nodo L a un nodo K. Lo que se puede notar en la figura 3.1.2:




*"Figura 3.1.2"*

En la figura anterior se advierte que los nodos 1, 2, 3 y 4, y los correspondientes arcos de la figura 3.1.1, forman una cadena.

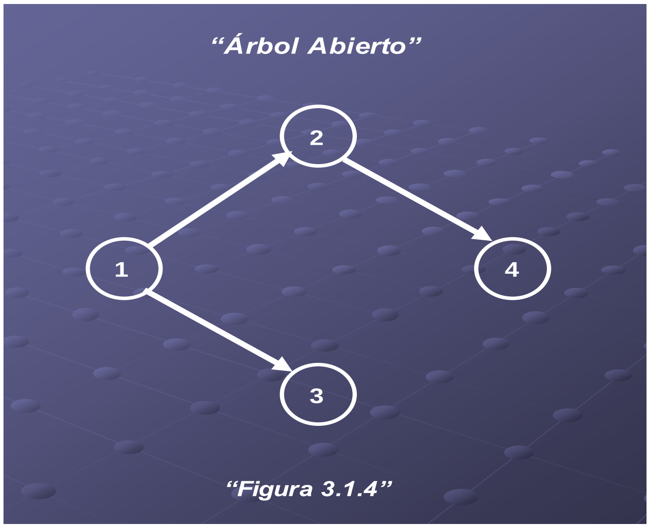
Ahora, cuando una cadena conecta a un nodo consigo mismo, se dice que es un *anillo*, como lo muestra la figura 3.1.3:



"Figura 3.1.3"

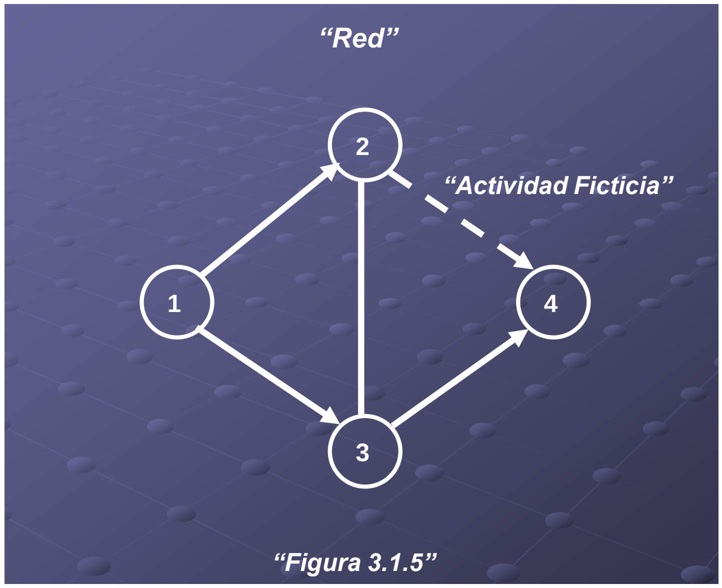
En la figura anterior, hay una cadena que forma un anillo porque el nodo 1 se conecta a sí mismo a través de los nodos 2 y 3.

Por otro lado, en la teoría de redes también existe un concepto denominado *árbol abierto*: un subconjunto de arcos de la red original que conecta todos los nodos, pero que no contiene ningún circuito. Por ejemplo:



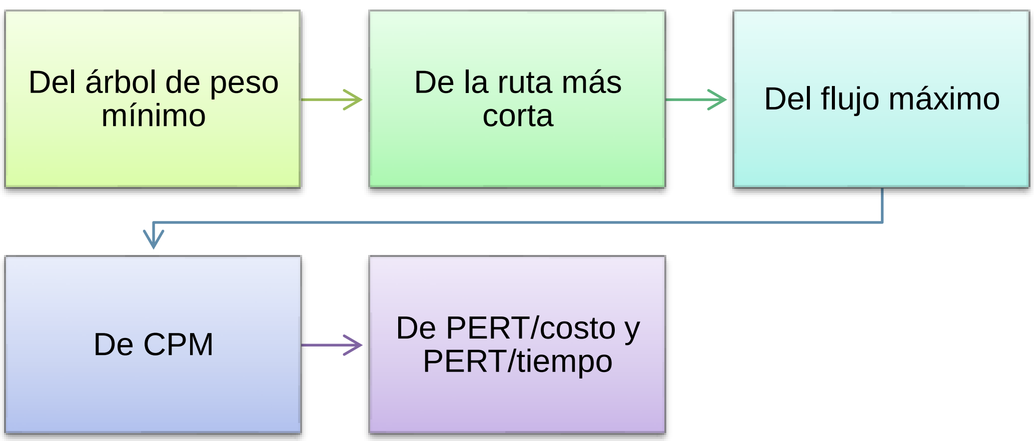

A partir de la figura 3.1.4, se puede concluir que un árbol abierto de una red es especial, debido a que corresponde en forma general a una solución básica para las restricciones de la programación lineal.

Otro concepto muy empleado en teoría de redes es el de *actividades ficticias*, aquellas que forman parte de un proyecto final, que no han sido identificadas y consumen un tiempo cero y un costo cero en recursos. Se representan con flechas punteadas, como lo muestra la figura 3.1.5:




"Figura 3.1.5"

En esta unidad, se analizarán los siguientes casos de problemas:



# 3.2. Problema del árbol de peso mínimo

El problema del *árbol de peso mínimo* es conocido también como del *árbol expandido mínimo* o *árbol de expansión mínima*. Representa una aplicación muy importante en la actualidad y consiste en lo siguiente: todos los nodos que componen una red deberán conectarse entre ellos sin que éstos conformen un bucle o *loop.* Por consiguiente, es un tipo común de redes que permite resolver toda clase de problemas, donde éstos tienen demasiada sobra y cualquier línea es muy expansiva; o problemas donde el flujo circulante a lo largo de los arcos que unen los nodos de la red es muy instantáneo. Por ejemplo, los problemas de sistemas de tránsito pueden ser resueltos por el problema del árbol del peso mínimo.

Para una mejor comprensión de cómo llevar a cabo el algoritmo que permite resolver toda clase de problemas vinculados al problema del árbol del peso mínimo, se desarrollará el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.2.1**

La Secretaría de Transportes y Vialidad (SETRAVI) del Gobierno del Distrito Federal está llevando a cabo una planificación de la construcción de la línea 4 de la Red del Sistema de Transporte Metrobús, que se unirá a la red que tiene actualmente este sistema. En este caso, los responsables del proyecto deberán considerar lo siguiente.

1. Las línea 4 de la Red del Sistema de Transporte Metrobús de la Ciudad de México deberá conectar 8 puntos importantes que comprenden centros comerciales, de trabajo y turísticos.

2. Los responsables de la obra deberán entregar a SETRAVI del gobierno del DF un conjunto de distintos servicios que ofrecerá la línea 4 que conecten a todos los centros, los cuales reflejarán un costo mínimo.

3. Los responsables de la obra deberán establecer una red que permita la existencia de una factibilidad económica para que la línea 4 pueda ser construida.

4. La SETRAVI del DF deberá obtener el mínimo costo posible de la línea 4 de la Red del Sistema de Transporte Metrobús.

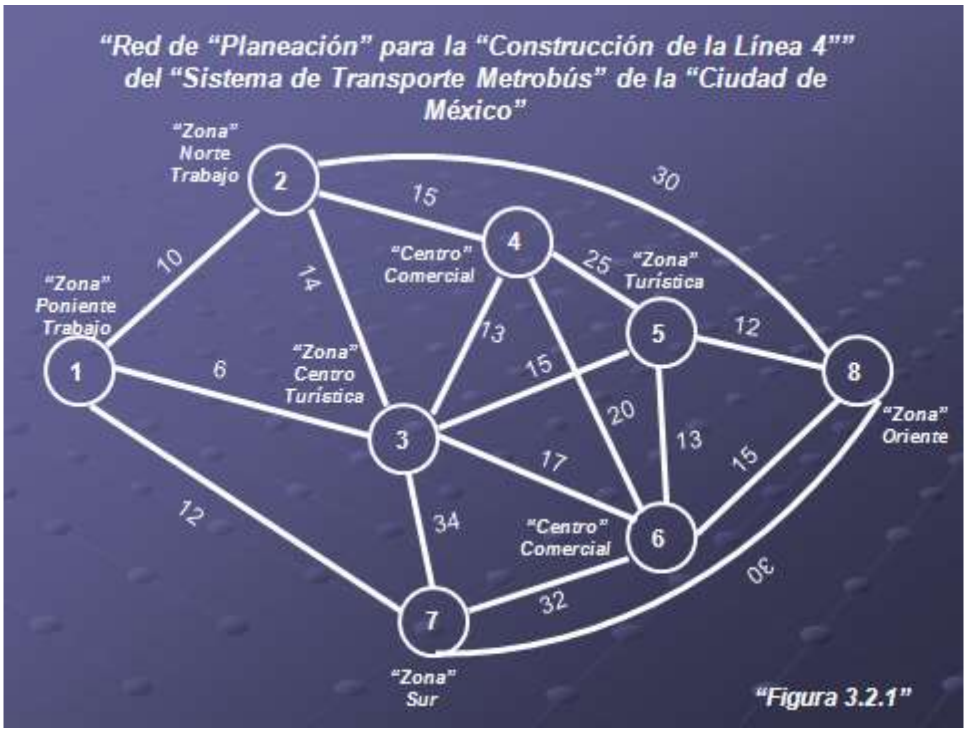
Analizadas las consideraciones, el objetivo de este proyecto consiste en que los responsables de la obra deberán presentar la red factible mínima que logre llevar a cabo la construcción de la línea 4 de la Red del Sistema de Transporte Metrobús.

Solución

Para que los responsables de la obra puedan entregar su planeación, lo primero que deberán establecer es una red en la cual se encuentren conectados todos los centros comerciales, de trabajo y turísticos, para establecer la ubicación específica de cada uno de ellos.

Como se trata de un problema de redes, cada uno de los centros (comercial, trabajo y turístico) se asignará a través de un nodo numerado. Asimismo, se ubicarán los arcos que unen a cada uno de los nodos previamente identificados, y sobre los arcos se colocarán los costos que cada uno de ellos generaría.

Por tanto, cuando los responsables de la obra realizaron estas acciones por los corredores posibles, encontraron que la red que permitirá la construcción de la línea 4 de la Red del Sistema de Transporte Metrobús quedó compuesta como se muestra la figura 3.2.1:




La figura anterior muestra cómo los responsables han definido el proyecto de construcción de la línea 4 de la Red del Sistema de Transporte Metrobús. Luego, se procederá a darle una solución que permita resolver el problema del proyecto; es decir, obtener el árbol de peso mínimo que posibilite obtener el mínimo costo de la línea. Se puede hallar la solución a partir de los siguientes algoritmos: de Dijkstra, de Kruskal y de Prim, el más flexible. Este último es el que utilizaremos.

Para que el lector pueda comprender mejor cómo se resolverá este ejemplo, en primera instancia, se explicará la manera como se lleva a cabo el procedimiento de la solución del algoritmo de Prim. Luego, se dará solución al ejemplo a través de este procedimiento.

El algoritmo de Prim fue creado y desarrollado originalmente por el matemático Vojtech Jarnik en 1930 y, posteriormente, por el científico computacional Robert C. Prim, en 1957. Finalmente, fue rediseñado en 1959 por Dijkstra. Por ello se le denomina también como algoritmo DJP, pues toma como referencia la primera letra de los apellidos de cada uno de sus creadores.

Este algoritmo tiene como objetivo principal determinar el árbol de peso mínimo, y toma como base de funcionalidad la teoría de grafos. El árbol de peso mínimo se determinará, precisamente, con un grafo conexo.

En el grafo conexo, se establece la condición de que para cada par de nodos, éstos se encuentran conectados por un camino o dirección. Es decir, si dado un par de nodos, 1 y 2, entonces existirá por lo menos un camino o dirección posible desde 2 hacia 1. Y este grafo a su vez es *no dirigido*.

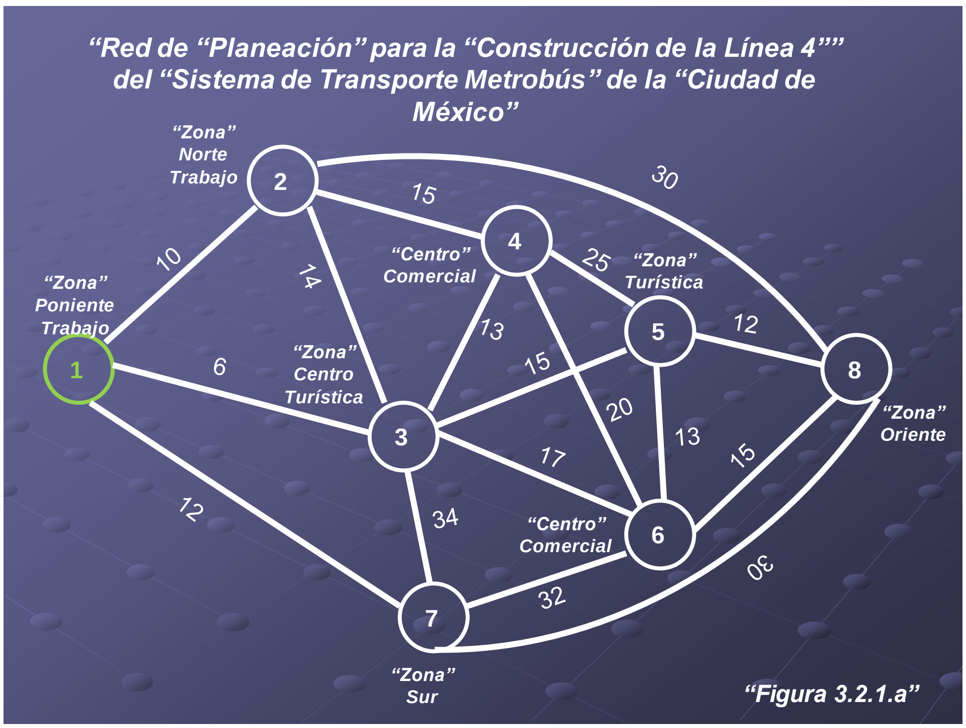
Una vez que se ha establecido la posible existencia de un camino o dirección, se procede a analizar la situación de sus aristas, que deberán estar etiquetadas.

Lo anterior nos lleva a concluir que el algoritmo de Prim logra la obtención de un subconjunto de aristas, de modo que éstas formen un árbol con todos los vértices, donde el peso de todas las aristas en el árbol sea el mínimo posible. Pero si el grafo no es conexo, el algoritmo obtendrá un árbol recubridor mínimo para uno de los componentes conexos que forman parte de dicho grafo no conexo (éste es aquel donde hay nodos que no pueden ser conectados a través de un camino o dirección).

Explicado el procedimiento que lleva a cabo el algoritmo de Prim, ahora se procederá a llevarlo a cabo para determinar la solución al ejemplo 3.2.1, desarrollando los siguientes pasos.

Paso 1

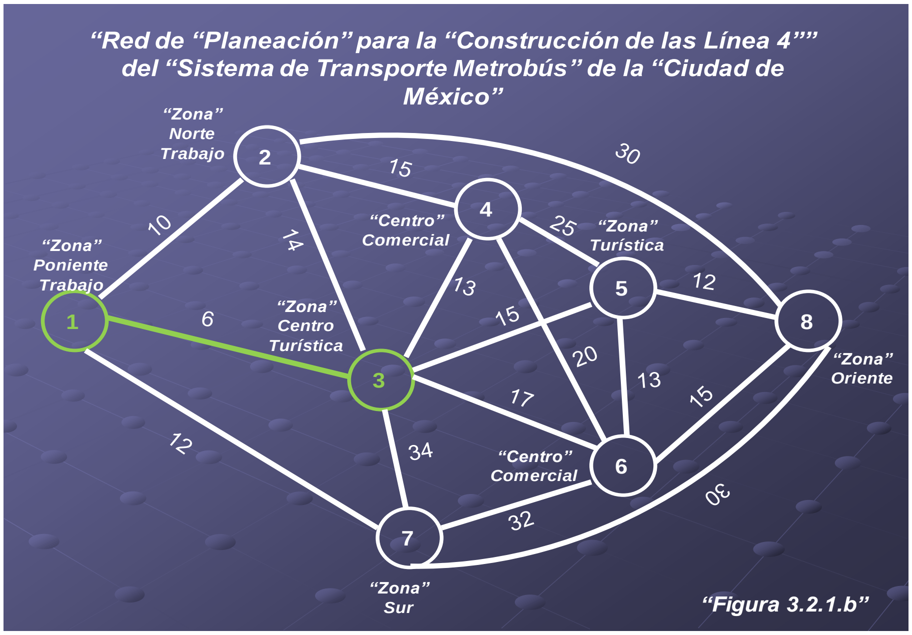
Se escoge el nodo con el que se iniciará la obtención del árbol de peso mínimo, y se marca. En este caso, supóngase que será el 1, como lo indica la figura 3.2.1.a:



"Figura 3.2.1.a"

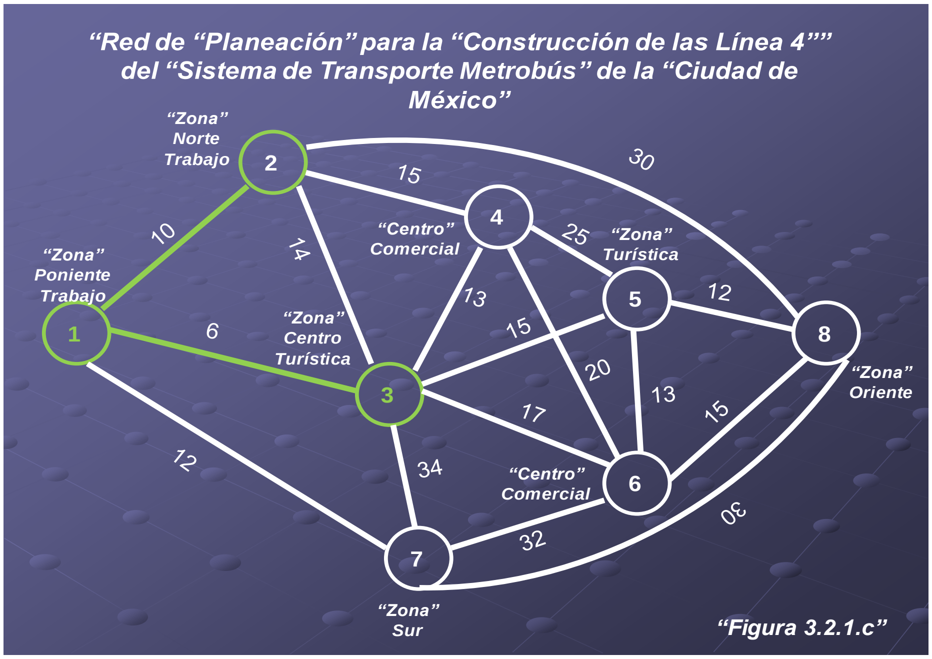
Paso 2

Se procede a analizar las aristas del nodo escogido, en este caso, el 1. De éste salen tres aristas: (1, 2); (1, 3) y (1, 7). Y de ellas se escoge la de menor valor incidente, (1, 3) = 6, y se marca, así como el otro nodo en el que incide, el 3, como lo presenta la siguiente figura:



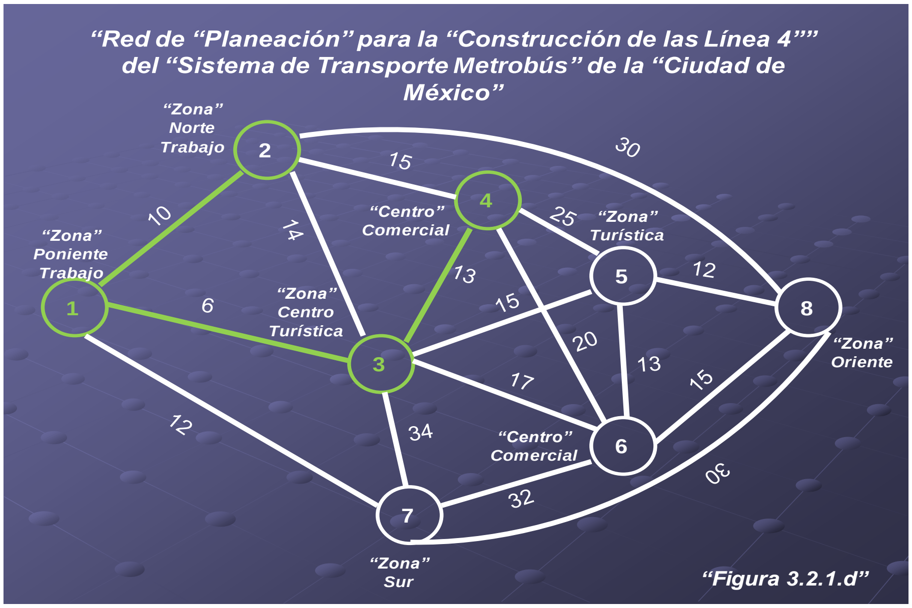

Paso 3

Se escoge la arista con un menor valor incidente, en un nodo marcado y en otro que no lo esté. Para este caso, se tienen tres opciones: (1, 2); (3, 2) y (3, 7); por tanto, la de menor valor incidente es (1, 2) = 10, y se marca. A su vez, se marca el nodo no marcado, o sea, el 2, como se presenta en la figura 3.2.1.c:




Paso 4

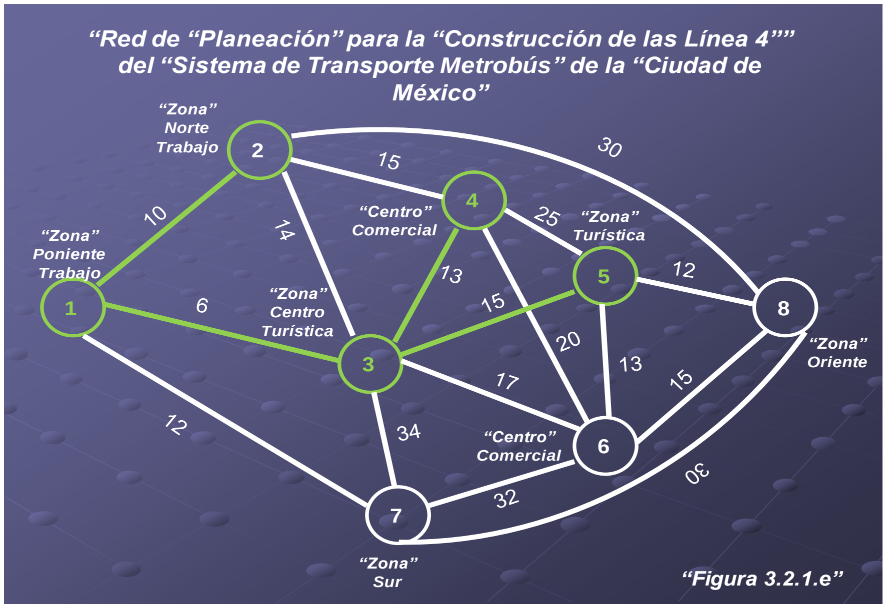
Se selecciona la arista que tenga un menor valor incidente en un nodo marcado y en otro que no lo esté. En este caso, se tienen cinco opciones: (2, 4); (3, 4); (3, 5); (3, 6) y (3, 7). Por tanto, la de menor valor incidente es la (3, 4) = 13, y se marca. Así también se marca el nodo no marcado, el 4, de la siguiente manera:




Paso 5

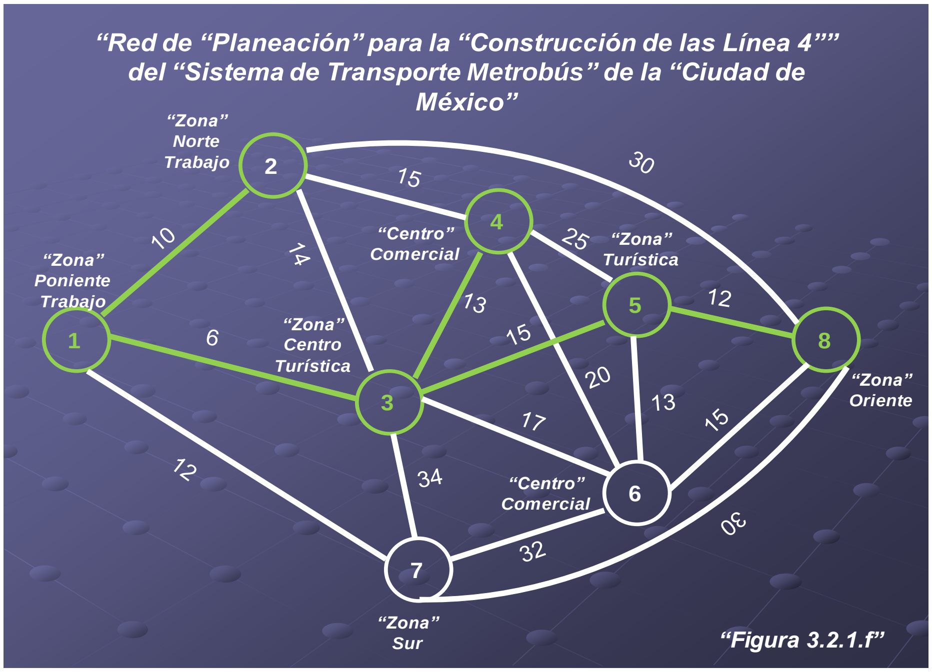
Ahora se escoge la arista que tenga un menor valor incidente, en un nodo marcado y en otro que no lo esté.

Se tienen cuatro opciones: (4, 5); (3, 5); (3, 6) y (3, 7). Luego, la de menor valor incidente es (3, 5) = 15, y se marca. También se marca el nodo no marcado, el 5, como lo presenta la figura 3.2.1.e:



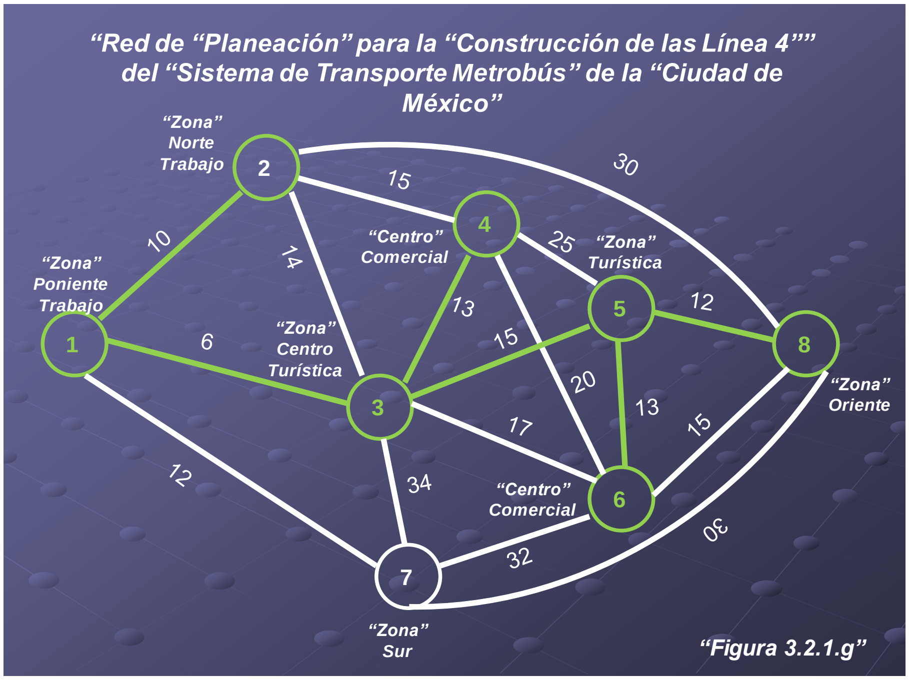

Paso 6

Se selecciona la arista con un menor valor incidente, en un nodo marcado y en otro que no lo esté. Se tienen, entonces, cuatro opciones: (5, 8); (5, 6); (3, 6) y (3, 7). Luego, la de menor valor incidente es (5, 8) = 12, y se marca. De igual forma, se marca el nodo no marcado, o sea, el 8, como lo expresa la figura 3.2.1.f:



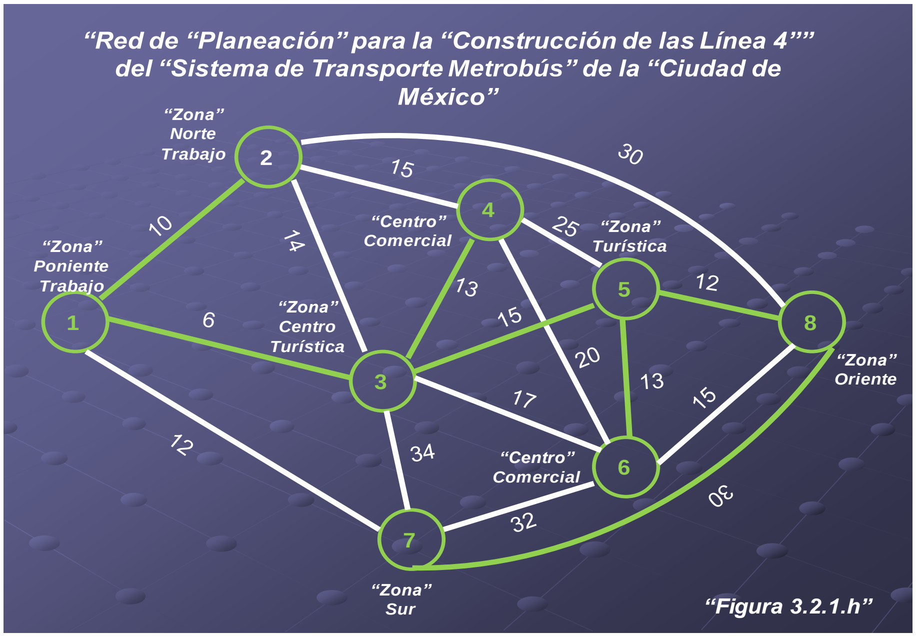

Paso 7

Se escoge la arista que tenga un menor valor incidente, en un nodo marcado y otro que no lo esté. Se tienen cinco opciones: (3, 6); (3, 7); (5, 6); (8, 6) y (8, 7). Entonces, la de menor valor incidente es (5, 6) = 13, y se marca. De igual manera, se marca el nodo no marcado, es decir, el 6, como lo indica la figura 3.2.1.g:



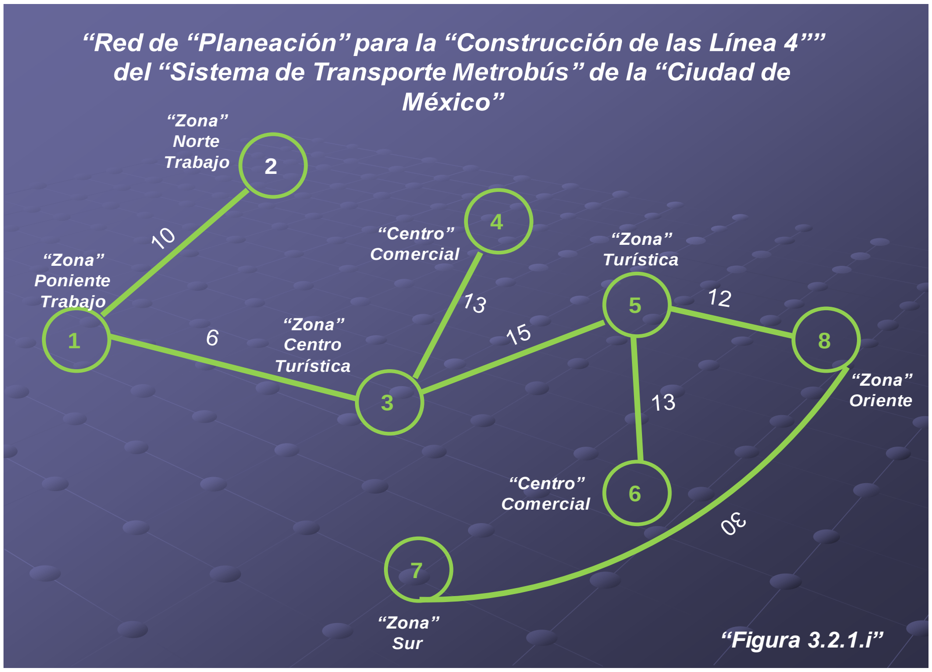

Paso 8

Se elige la arista con menor valor incidente, en un nodo marcado y en otro que no lo esté. Se tienen dos opciones: (6, 7) y (8, 7). Entonces, la de menor valor incidente es (8, 7) = 30, y se marca. De igual manera, se marca el nodo no marcado, o sea, el 7, como lo muestra la figura 3.2.1.h:




Paso 9

A partir de las acciones de los pasos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, se observa que todos los nodos han quedado marcados, así como las aristas que tienen los menores valores incidentes de cada uno de ellos. Por consiguiente, tanto los nodos como las aristas marcados formarán la solución del árbol de peso mínimo buscado para el ejemplo 3.2.1, consistente en la construcción de la Línea 4 que formará parte de la Red del Sistema de Transporte Metrobús. Así lo expresa la figura 3.2.1.i:




De la solución obtenida para el ejemplo 3.2.1 del proyecto consistente en la construcción de la Línea 4 de la Red del Sistema de Transporte Metrobús de la ciudad de México, se pueden concluir que la construcción cubrirá lo siguiente:

1. Una línea principal que irá del nodo 1 hacia el nodo 7, pasando por los 3, 5 y 8.
2. Tres líneas alimentarias:
   a. Primera: cubrirá del nodo 1 al 2.
   b. Segunda: cubrirá del nodo 1 al 4, pasando por el 3.
   c. Tercera línea: cubrirá del nodo 1 al 6, pasando por los 3 y 5.

Por otro lado, esta propuesta fue la que resultó, de acuerdo con las consideraciones establecidas en forma previa, y que los responsables del proyecto entregarían a la Secretaria de Transportes y Vialidad del Gobierno del Distrito Federal para que diera el visto bueno del inicio de la obra.

Finalmente, se puede deducir que el problema del árbol del peso mínimo es una herramienta muy práctica para tomar toda clase de decisiones en el ámbito de sistemas de transporte. En el caso de la ciudad de México, es aprovechada en los siguientes sistemas de transporte:

- METRO
- Metrobús
- Tren Ligero y Trolebuses
- Red de Transporte Popular (RTP)
- Transporte concesionado: autobuses, microbuses y combis
- Taxis y sitios

Y en proyectos nacionales e internacionales, en los sistemas de transporte aéreo, marítimo, terrestre y ferroviario, en pasajeros y carga.

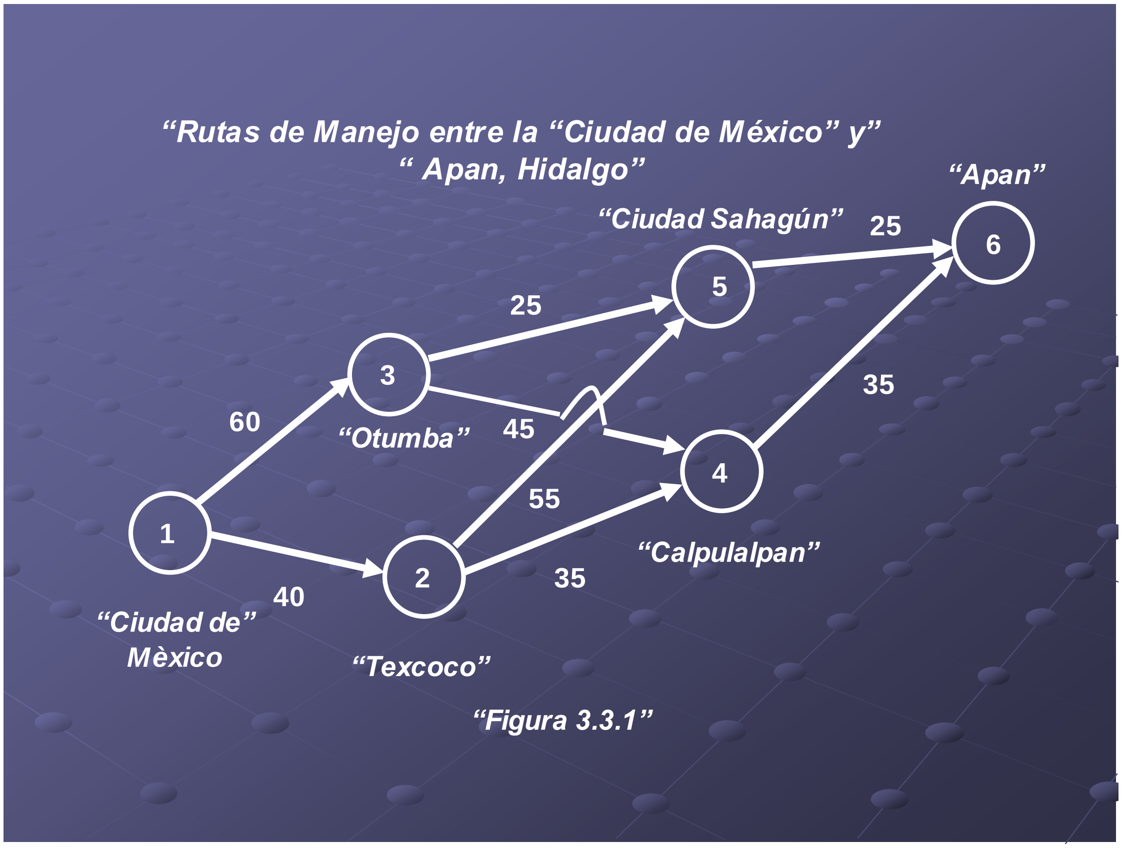
# 3.3. Problema de la ruta más corta[9]

Cuando en un momento determinado se define una red de tal forma que los coeficientes de cada arco sean no negativos, ello implica que el analista del proyecto se interesa en hallar la ruta más corta entre dos nodos de la red. Este tipo de problemas se conoce como *de la ruta más corta*. Para ilustrarlo, se presenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.1**

Un vehículo desea realizar un viaje entre la ciudad de México y la población de Apan, municipio ubicado al sur en el estado de Hidalgo, en el tiempo más corto, dentro de lo legal. Las carreteras que enlazan ambas poblaciones forman la red mostrada en la figura 3.3.1:

[9] *Ibíd.*, pp. 294-297.




En la figura anterior, se advierte con precisión que las distancias son los tiempos de viaje en vehículo expresados en minutos. Véase, asimismo, que con el objeto de plantear la situación en forma de problema de costo mínimo, se podrá elegir en cualquier nodo sólo el camino a través de un arco. Ello implica que será necesario tener los siguientes flujos en los arcos, a través de esta proposición:

$$x_{ij} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{1} \;\; \boldsymbol{Si\ se\ viaja\ a\ trav\acute{e}s\ de\ carretera\ entre\ la\ ciudad\ i\ y\ la\ ciudad\ j} \\ \mathbf{0} \;\; \boldsymbol{De\ otra\ manera} \end{matrix} \right\}$$

Entonces, mediante la proposición anterior se puede afirmar lo siguiente:

Si se recorre la ruta *(i, j)*, no puede utilizarse ninguna otra ruta que parta de la ciudad *i*: Por ejemplo, si se viaja por la carretera que une a la ciudad de México con Texcoco, el flujo entre esas ciudades será igual a 1 y, por tanto, $x_{13}$ será 0.

Luego, existe la posibilidad de que se satisfagan las condiciones usando en la red un flujo imaginario de una unidad: lo que quiere decir que este flujo parte del nodo de salida u origen, en este caso, la ciudad de México, y llega al nodo final o terminal, Apan, Hidalgo.

En otras palabras, existe un suministro de una unidad en el origen y una demanda de una unidad en el nodo terminal. En este caso, habría un suministro de una unidad u oferta en la ciudad de México; y una demanda por esa misma unidad en la población de Apan, Hidalgo.

Contestada la proposición anterior, se procede a realizar el siguiente cuestionamiento: ¿qué costos deben utilizarse en este problema de flujo mínimo?

Para responder este cuestionamiento, véase que si $x_{ij} = 1$, significa que será necesario viajar de los nodos *i* al *j*. Por tanto, si se denotan las distancias mediante $d_{ij}$, el costo para esa ruta se convierte en $d_{ij} \times x_{ij}$. Dado que $x_{ij}$ es *0* o *1*, el costo para cualquier ruta se transforma en $d_{ij}$ o *0*. Por esta razón, se pueden usar distancias $d_{ij}$ como los costos para el problema de flujo de costo mínimo. Luego, para plantear el problema que permita resolver el ejemplo 3.3.1, quedaría modelado de la siguiente manera:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Minimizar: | $40x_{12} + 60x_{13} + 35x_{24} + 55x_{25} + 45x_{34} + 25x_{35} + 35x_{46} + 25x_{56}$ | | |
| Sujeto a: | | | |
| Cd. de México | $x_{12} + x_{13}$ | = | 1 |
| Texcoco | $x_{12} \quad -x_{24} - x_{25}$ | = | 0 |
| Otumba | $x_{13} \quad - \quad x_{34} - x_{35}$ | = | 0 |
| Calpulalpan | $x_{24} + x_{34} - x_{46}$ | = | 0 |
| Cd. Sahagún | $x_{25} - x_{35} \quad x_{56}$ | = | 0 |
| Apan | $x_{46} + x_{56}$ | = | 1 |
| Donde: | $x_{ij} >= 0$ para toda i y toda j | | |

Modelo 3.3.1

Ahora, para resolver el problema con fines de análisis, se anotará con qué ciudad se relaciona cada una de las restricciones que lo constituyen. La restricción de la ciudad de México establece que puede usarse la carretera que va a Texcoco o la que se dirige a Otumba; no ambas. También se sabe que las soluciones de problemas de programación lineal aplicadas a problemas de redes son enteras. Así, se tiene la seguridad de que $x_{12} = 1$ o 0; y que $x_{13} = 1$ o 0; al tiempo que la restricción impone que $x_{12} = 1$ o $x_{13} = 1$; mas no ambas.

Todas las restricciones de Texcoco, Otumba, Calpulalpan y Ciudad Sahagún requieren que el flujo que llega a esos nodos o ciudades sea igual al flujo que sale, puesto que no existe demanda en ninguno de ellos. Además, la restricción de Apan, Hidalgo, exige llegar a esta población, ya sea por Ciudad Sahagún o Calpulalpan, obligando a que la suma de los flujos sea igual a uno.

Para el ejemplo 3.3.1, la solución se basa en el siguiente presupuesto: dado que se está intentando minimizar el costo que permitirá que el vehículo pueda realizar el viaje entre la ciudad de México y Apan, población ubicada al sur del estado de Hidalgo, lo cual se podrá hacer a través de $x_{16}$, a este arco se le asigna el valor de 1 y se le otorgan costos de cero a los demás arcos de la red.

Entonces, utilizando estas consideraciones, la solución del problema aplicando el método simplex de programación lineal es:

Arco 3 – 5” ($x_{35}$) = 0

Arco 1 – 2 ($x_{12}$) = 1

Arco 1 – 3 ($x_{13}$) = 0

Arco 2 – 4 ($x_{24}$)= 1.

Arco 2 – 5 ($x_{25}$) = 0

Arco 4 – 6 ($x_{46}$) = 1

Ahora bien, aplicando el método simplex de programación lineal se requieren 6 iteraciones para obtener el costo mínimo del ejemplo 3.3.1, cuyo tiempo mínimo es de 110 minutos, que se generan siguiendo en este orden los arcos $x_{12}$, $x_{24}$ y $x_{46}$.

De la solución obtenida del ejemplo 3.3.1, se puede concluir que el vehículo que efectuará el viaje entre la ciudad de México –nodo 1–, y Apan, población situada al sur del estado de Hidalgo –nodo 6–, requerirá realizarlo en un tiempo mínimo de 110 minutos, con este itinerario: primero, tendrá que viajar por el arco 1 – 2, que une a la ciudad de México con Texcoco en el Estado de México; posteriormente, tomará el arco 2 – 4, que une a Texcoco con Calpulalpan, en el estado de Tlaxcala; y finalmente tomará el arco 4 – 6, el cual une Calpulalpan con Apan.

Este tipo de problemas también son una alternativa para resolver asuntos de transporte: como existe una oferta-demanda entre los distintos nodos que conforman la red, se obtiene el costo mínimo, así como el itinerario a seguir.

Como se puede notar, la solución ha requerido el empleo de algoritmos especiales que poseen algunos paquetes o programas de computación.

## 3.4. Problema del flujo máximo[10]

Este problema no se caracteriza por determinar los valores generados a través de cierto flujo que pasa por una red, sino que busca precisar el flujo máximo que atraviesa una red (de aquí su nombre, *de flujo máximo*).

[10] *Ibíd.*, pp. 294-297.

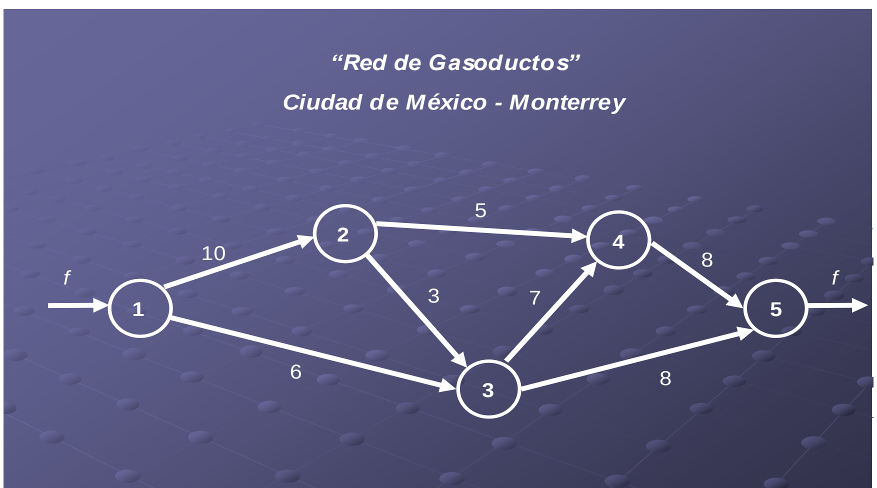
Para estudiar este tipo de problemas, es necesario suponer que existen restricciones de capacidad en los arcos. De lo contrario, el flujo máximo que pasaría a través de la red sería infinito.

Como ejemplos de este tipo de problemas podemos mencionar los referentes a gasoductos y a líneas de trasmisión.

Para comprender el desarrollo y solución de esta clase de problemas, se plantea el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.4.1**

Una compañía debe enviar gas natural desde uno de sus campos ubicado en la ciudad de México con destino a Monterrey, a través de una red de gasoductos, cuyos valores encerrados en semicírculos en cada arco representan las restricciones de capacidad en millones de pies cúbicos por hora, de la siguiente manera:




*"Figura 3.4.1"*

Solución

Para determinar el flujo máximo óptimo que deberá enviarse por la red de gasoductos entre las ciudades de México y Monterrey, a partir de la figura anterior, se puede notar que se muestra una cantidad desconocida de flujo *f* que entra en el gasoducto en el nodo 1, que en referencia es el campo de gas ubicado en la ciudad de México y que sale del gasoducto en el nodo 5 con terminal en Monterrey.

Entonces, usando este flujo *f* como referencia, el problema del ejemplo 3.4.1 se puede plantear como se expresa en el modelo 3.4.1:

Minimizar: $f$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} &= f \\
x_{12} - x_{23} - x_{24} &= 0 \\
x_{13} - x_{23} - x_{34} - x_{35} &= 0 \\
x_{24} + x_{34} - x_{45} &= 0 \\
x_{35} - x_{45} &= f
\end{aligned}
$$

$$x_{12} =< 10, \quad x_{13} =< 6, \quad x_{23} =< 3, \quad x_{24} =< 5$$

Donde: $x_{ij} >= 0$ para toda i y toda j

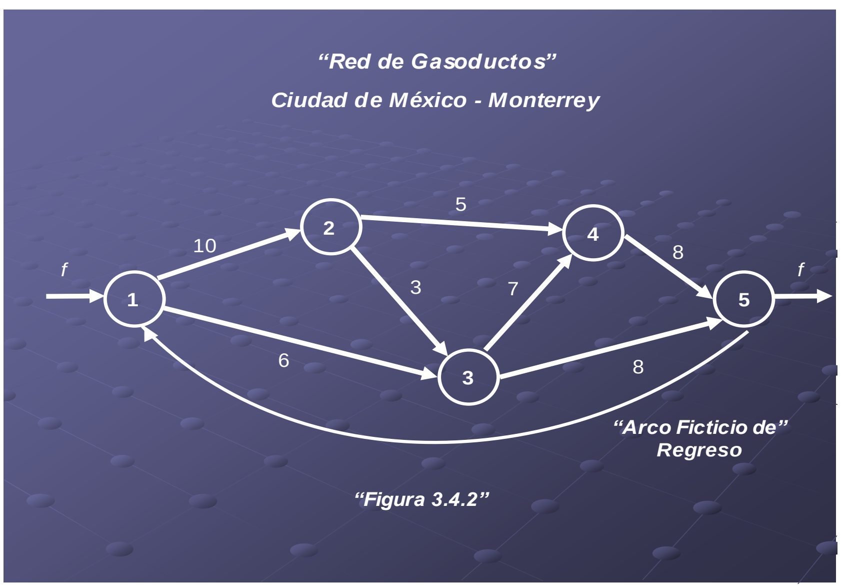
Modelo 3.4.1

Por otra parte, dado que el modelo anterior es un planteamiento que no se ajusta a una formulación estándar de programación lineal de flujo de costo mínimo, pues el flujo *f* que se desconoce se muestra como variable de la función objetivo en forma de valor del lado derecho de las restricciones. Por consiguiente, si este modelo se planteara de esta manera, sería imposible utilizar el método del flujo de costo mínimo para solucionarlo.

Para evitar esta dificultad, primero se eliminará el flujo *f* y se incorporará un arco artificial o arco ficticio que conecte los nodos 5 y 1. Esto permitirá establecer que el objetivo sea maximizar el flujo que regresa del nodo 5 al 1.

Entonces, maximizar el flujo que regresa del nodo 5 al 1 por un arco ficticio sin capacidad dará la cantidad de flujo que va del nodo 1 al 5 a lo largo de la red de capacidades.

A partir de la figura 3.4.1, en donde se muestra la red de gasoductos, se obtendrá un planteamiento modificado. Luego, la red modificada queda como se presenta en la figura 3.4.2:




En la figura anterior se puede visualizar que el objetivo es maximizar $x_{51}$. Por tanto, el modelo modificado se expresa en el modelo 3.4.2, así:

Minimizar: $x_{51}$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
X_{51} - x_{12} - x_{13} & & & & & & & & = & f \\
x_{12} & - x_{23} & - x_{24} & & & & & & = & 0 \\
x_{13} & + x_{23} & & - x_{34} & - x_{35} & & & & = & 0 \\
& & x_{24} & + x_{34} & & - x_{45} & & & = & 0 \\
& & & & x_{35} & - x_{45} & & & = & f
\end{array}
$$

$x_{12} =< 10$, $x_{13} =< 6$, $x_{23} =< 3$, $x_{24} =< 5$, $x_{34} =< 7$, $x_{35} =< 8$, $x_{45} =< 8$

Donde: $x_{ij} >= 0$ para toda i y toda j

Modelo 3.4.2

Una vez que el problema ha quedado planteado y homologado a la forma estándar de programación lineal de redes –con la salvedad de que aquí no existen ofertas ni demandas–, se procede a resolverlo a través de algoritmos especiales.

Para el ejemplo 3.4.1, la solución se basa en el siguiente criterio: dado que se está intentando maximizar el flujo que pasa a través de *x51*, a este arco se le asigna el valor de –1 y se le otorgan costos de cero a los demás arcos de la red.

Además, los arcos reales de la red tienen cotas, y el arco artificial no, por lo que se asigna una cota artificialmente alta de 100 para el arco 5 – 1.

Por tanto, la solución del problema es la siguiente:

Arco 1 – 2 ($x_{12}$): 8 millones de pies cúbicos

Arco 1 – 2 ($x_{12}$): 8 millones de pies cúbicos

Arco 2 – 3 ($x_{23}$): 3 millones de pies cúbicos

Arco 2 – 4 ($x_{24}$): 5 millones de pies cúbicos

Arco 3 – 4 ($x_{34}$): 1 millones de pies cúbicos

Arco 3 – 5 ($x_{35}$): 8 millones de pies cúbicos

Arco 4 – 5 ($x_{45}$): 6 millones de pies cúbicos

Arco 5 – 1 ($x_{51}$): 14 millones de pies cúbicos

De la solución dada en el ejemplo 3.4.1, se puede concluir que el flujo que circula por el arco de regreso 5 – 1 representa el flujo máximo que puede enviarse a través de la red de gasoductos entre las ciudades de México y Monterrey; y los flujos señalan la cantidad enviada a través de cada una de las ramas que conforman el gasoducto.

A este tipo de problemas se les denomina *redes circulares*, y para solucionarlos se requieren algoritmos especiales contenidos en algunos paquetes o programas de computación.

## 3.5. CPM [11]

**Generalidades**

El CPM (Critical Path Method) o método de la ruta crítica fue desarrollado por la compañía Dupont, en conjunto con la división UNIVAC de la Remington Rand, para controlar el mantenimiento de proyectos referidos a plantas químicas de la compañía Dupont. Hoy día, es una de las dos técnicas de redes aplicadas en la administración de proyectos.

Actualmente, esta técnica se encuentra asociada al método PERT (Programs Evaluation and Review Tecnique), pues ambos tienen como objetivo principal

[11] *Ibíd.*, pp. 294-297.

analizar el factor de incertidumbre y los intercambios de tiempos y costos. De ahí que algunos autores se refieren a la designación común CPM/PERT.

**Aspectos generales de CPM/PERT**

Aunque el método CPM fue desarrollado de manera independiente del PERT; por su estructura, se encuentra estrechamente relacionado con éste, debido a que se enfoca a analizar los intercambios entre el costo de un proyecto y su fecha de terminación. Lo que significa que pretende reducir el tiempo necesario para concluir una actividad, utilizando más empleados y/o recursos, lo que en la mayoría de las situaciones implicaría mayores costos.

Con el método CPM se puede suponer con certidumbre el tiempo necesario para terminar diversas actividades de un proyecto, al igual que la cantidad de recursos que se invertirán. Por ello, el método CPM no se ocupa de tiempos inciertos de diversas actividades como sí lo hace el PERT, sino que se fundamenta en el intercambio entre tiempos y costos.

El PERT fue creado y diseñado en la década de 1950 y se usó de manera frecuente en la administración de proyectos militares de investigación y desarrollo de los Estados Unidos, cuyo proyecto más importante fue el referente a los misiles Polaris para la armada estadounidense. Así, fue implantado por el Departamento de la Defensa de los Estados Unidos de Norteamérica con el fin de apoyar en lo que respecta a la planeación, programación y control de diversas actividades militares asociadas al proyecto.

El método PERT también lo han aprovechado muchas empresas industriales.

Una de las principales características del método PERT es su capacidad de identificar los programas y planes requeridos para las actividades en las cuales se puedan manejar las incertidumbres que existen en los pronósticos de tiempos para terminar diversas actividades.

**Procedimiento para llevar a cabo el método CPM/PERT**

Una red CPM/PERT describe la secuencia de un conjunto de actividades que resulten necesarias para desarrollar y llevar a cabo todo un proyecto en cuestión.

Para construir el trazo y desarrollo de una red CPM/PERT hay que seguir estos pasos[12]:

i. Llevar a cabo un análisis profundo donde se enunciarán con detalle todas las operaciones y métodos de trabajo –incluidas sus limitantes– que se deberán seguir para la realización del proyecto. En éste se establecerá la secuencia lógica de cada una de las operaciones que incluye.

ii. Definir la matriz de secuencias, que puede llevarse a cabo mediante dos opciones:

   **a.** *Opción 1*. Se les preguntará a los responsables de las operaciones del proyecto cuáles serán las actividades que deberán quedar terminadas para poder ejecutar cada una de las que se enumeran en la lista. Esto implica la confirmación de que todas y cada una de las actividades tengan al menos una de antecedente (en la actividad inicial, la antecedente será cero).

[12] Arturo Camacho Quiroz, *op. cit.,* pp. 193-205.

**b.** *Opción 2.* Se les preguntará a los responsables de la ejecución del proyecto cuáles serán las actividades que deberán realizarse al terminar cada una de las que aparecen enumeradas en la lista. Para esto, se deberá presentar la matriz de secuencias de tal forma que inicie con la actividad cero, la cual será útil para indicar el punto de partida con respecto a todas las demás.

Será importante tomar en cuenta esta información de cada una de las actividades enumeradas sin pasar por alto ninguna.

iii. Definir los tiempos más próximo y más lejano.

**a.** *Tiempo más próximo*. Lapso estimado en el que sucederá el evento si las actividades que le preceden comienzan lo más pronto posible. Estos "tiempos" se obtienen al realizar un paso hacia adelante a través de la red, iniciando con los primeros eventos y trabajando hacia adelante en el tiempo, hasta los últimos eventos. Y de esa manera se va determinado en forma sucesiva el tiempo en el cual sucederá cada uno, si el precedente inmediato ocurre en su tiempo más próximo y cada actividad que interviene ocupa exactamente su periodo estimado.

**b.** *Tiempo más lejano.* Este tiempo se refiere al último momento, también en forma estimada, en el que puede suceder un "evento" sin que se retrase la terminación del proyecto, el cual va más allá de su tiempo más próximo.

En esta situación, los tiempos más lejanos se fijan en forma sucesiva para los eventos al efectuar ahora un movimiento hacia atrás a través de toda la red, iniciando con los últimos eventos y trabajando hacia atrás en el tiempo hasta llegar a los primeros. Y determinando el tiempo final en el que puede suceder un evento de tal forma que los que le sigan sucedan en su tiempo más lejano si cada una de las actividades que se involucran ocupan exactamente su tiempo estimado.

Para comprender mejor este procedimiento, se expondrá el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.5.3.1**

Una empresa se dedica a construir casas de interés social, para lo cual lleva a cabo una lista en la cual se enumeran el conjunto de actividades que intervendrán y se ejecutarán, así como los tiempos de realización para cada una de ellas.

El conjunto de actividades que conforman toda la secuencia lógica del proyecto se muestra en la matriz 3.5.3.1:

| No. Actividad | Descripción de la Actividad |
|---|---|
| 1 | Inicio |
| 2 | Excavación |
| 3 | Cimientos |
| 4 | Obra negra |
| 5 | Plomería exterior |
| 6 | Colado de techos |
| 7 | Plomería interior e instalación eléctrica |
| 8 | Recubrimiento exterior |
| 9 | Recubrimiento interior |
| 10 | Pintura exterior |
| 11 | Colocación de pisos |
| 12 | Pintura interior |
| 13 | Acabados interiores y acabados exteriores |

Matriz 3.5.3.1

Los tiempos de realización del conjunto de actividades que intervendrán en toda la secuencia lógica del proyecto se muestran en la matriz 3.5.3.2:

| Matriz de secuencia y tiempos de ejecución de cada actividad | | | |
|---|---|---|---|
| **No. Actividad** | **Secuencia** | **Tiempo** | **Observaciones** |
| 1 | 2 | 0 | |
| 2 | 3 | 2 | |
| 3 | 4 | 4 | |
| 4 | 5, 6, 7 | 10 | De 4 a 7 requiere 7 días |
| 5 | 7, 8 | 4 | De 5 a 8 es una “Actividad ficticia” |
| 6 | 8 | 6 | |
| 7 | 9 | 5 | |
| 8 | 10 | 7 | |
| 9 | 11, 12 | 8 | |
| 10 | 13 | 9 | De 10 a 13 requiere 2 días |
| 11 | 12 | 4 | De 11 a 12 es una “Actividad ficticia” |
| 12 | 13 | 5 | |
| 13 | - | 6 | Final |

Matriz 3.5.3.2

El objetivo que persigue la empresa es determinar el tiempo requerido que necesita el proyecto para la conclusión de la casa de interés social.

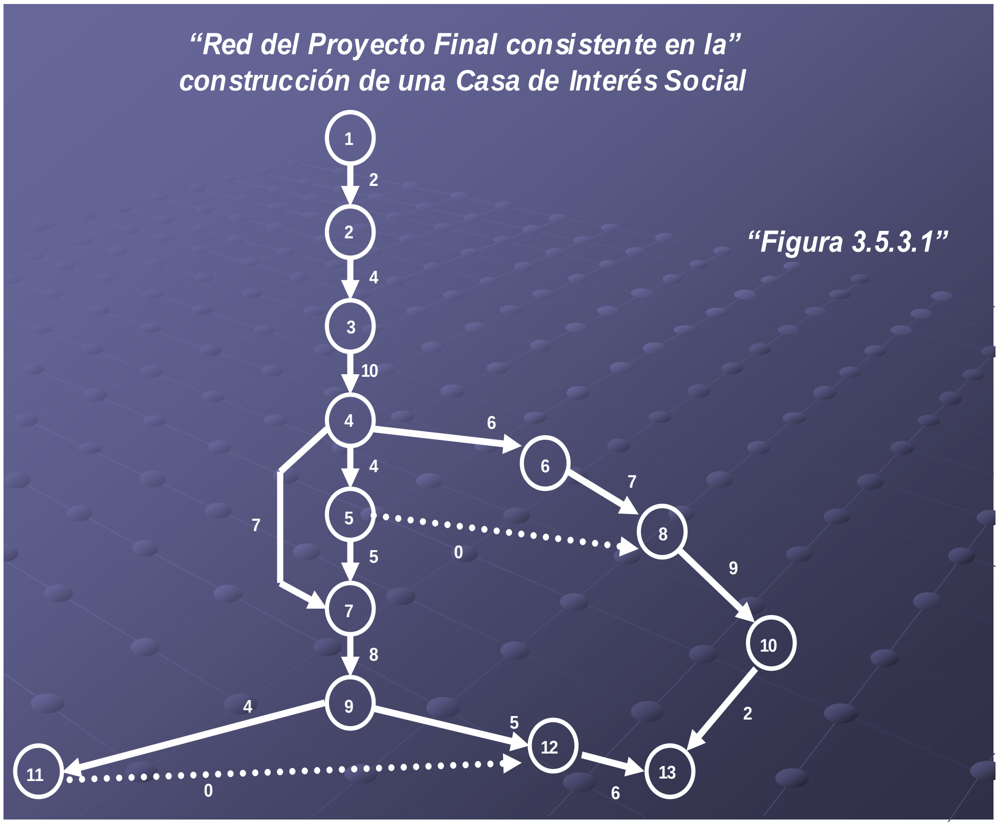
Solución

Para determinar el tiempo requerido para llevar a cabo la obra y conclusión de la construcción de la casa de interés social, se llevarán a cabo los siguientes pasos.

Paso 1

Se establece el diseño y composición de la red en forma gráfica en el proyecto final, de modo que los responsables de las operaciones y su ejecución tengan una visión lo más amplia posible del mismo.

Para el ejemplo 3.5.3.1, la red del proyecto final –consistente en la construcción de una casa de interés social– se muestra en la figura 3.5.3.1:




En la red del proyecto final se notan todas las actividades que la conforman, así como los tiempos de ejecución de las mismas. De igual manera, se pueden observar con puntualidad las dos actividades ficticias requeridas para su ejecución.

Paso 2

Se procede a determinar el tiempo más próximo máximo que requiere el proyecto final para llevarse a cabo, el cual se va determinando desde los eventos iniciales hasta los finales, siempre yendo hacia adelante.

Este tiempo más próximo máximo se expresa en la matriz 3.5.3.3:

| Matriz para determinar el tiempo más próximo máximo para llevar a cabo el proyecto final consistente en la Construcción de una casa de interés social | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número secuencial del Evento | Evento inmediatamente precedente | Tiempo más próximo | + | Tiempo de la actividad | = | Tiempo más próximo máximo |
| 1 | - | - | | - | | 0 |
| 2 | 1 | 0 | | 2 | | 2 |
| 3 | 2 | 2 | | 4 | | 6 |
| 4 | 3 | 6 | | 10 | | 16 |
| 5 | 4 | 16 | | 4 | | 20 |
| 6 | 4 | 16 | | 6 | | 22 |
| 7 | 4<br>5 | 16<br>20 | | 7<br>5 | | 25 |
| 8 | 5<br>6 | 20<br>22 | | 0<br>7 | | 29 |
| 9 | 7 | 25 | | 8 | | 33 |
| 10 | 8 | 29 | | 9 | | 38 |
| 11 | 9 | 33 | | 4 | | 37 |
| 12 | 9<br>11 | 33<br>37 | | 5<br>0 | | 38 |
| 13 | 10<br>12 | 38<br>38 | | 2<br>6 | | 44<br>44 |

Matriz 3.5.3.3

Como se distingue en la matriz anterior, al ser determinado, el tiempo más próximo máximo para el proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social dio un total de 44 días.

Paso 3

Se procede a precisar el tiempo más lejano mínimo que el proyecto final requiere para llevarse a cabo, el cual se va determinando desde los eventos finales hasta los eventos iniciales; siempre yendo hacia atrás.

Este tiempo más lejano mínimo está determinado en la matriz 3.5.3.4:

| Matriz para determinar el tiempo más lejano mínimo para llevar a cabo el Proyecto final consistente en la Construcción de una casa de interés social | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número secuencial del Evento | Evento inmediatamente siguiente | Tiempo más lejano | - | Tiempo de la actividad | = | Tiempo más lejano mínimo |
| 13 | - | - | | - | | 44 |
| 12 | 13 | 44 | | 6 | | 38 |
| 11 | 12 | 38 | | 0 | | 38 |
| 10 | 13 | 44 | | 2 | | 42 |
| 9 | 12<br>11 | 38<br>38 | | 5<br>4 | | 33 |
| 8 | 10 | 42 | | 9 | | 33 |
| 7 | 9 | 33 | | 8 | | 25 |
| 6 | 8 | 33 | | 7 | | 26 |
| 5 | 8<br>7 | 33<br>25 | | 0<br>5 | | 20 |
| 4 | 7<br>6<br>5 | 25<br>26<br>20 | | 7<br>6<br>4 | | 16 |
| 3 | 4 | 16 | | 10 | | 6 |
| 2 | 3 | 6 | | 4 | | 2 |
| 1 | 2 | 2 | | 2 | | 0 |

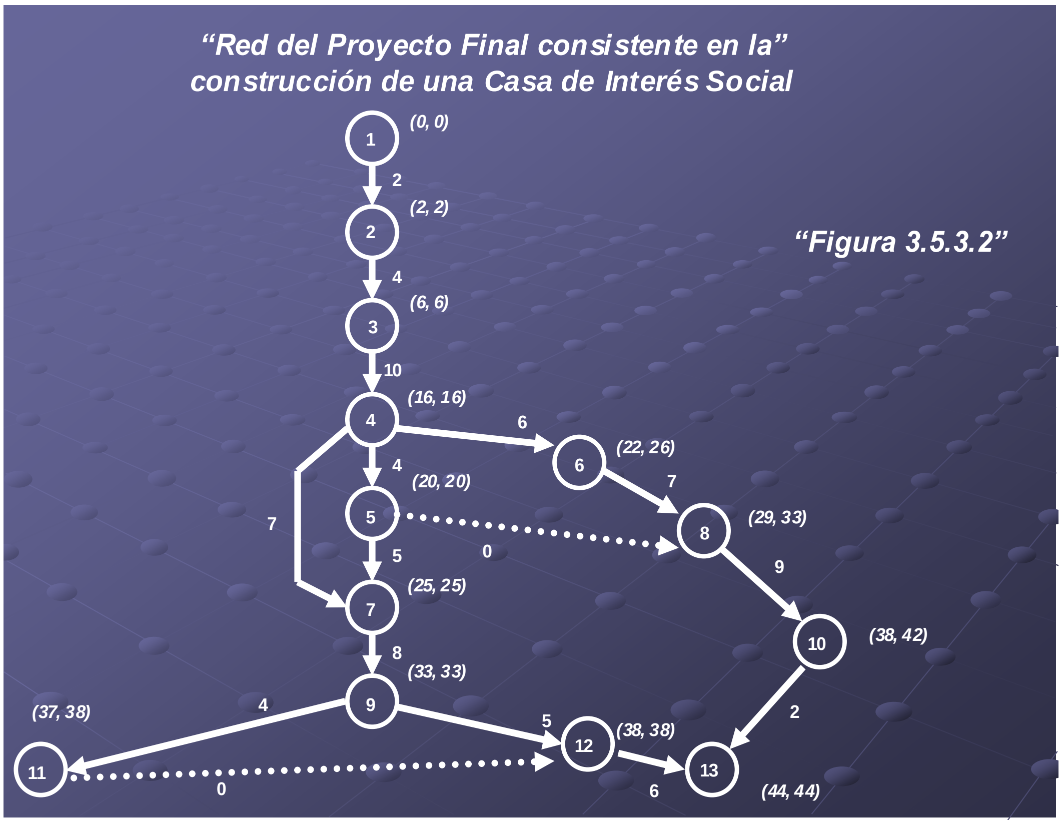
Matriz 3.5.3.4

Nuevamente, como se puede observar en la matriz anterior, al ser determinado, el tiempo más lejano mínimo para el proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social dio un total de 44 días.

Hasta este paso se puede hacer la siguiente conclusión parcial: para llevar a cabo este proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social se requieren 44 días, dado que este lapso es el resultante entre el tiempo más próximo y el más lejano para poder terminarlo.

Paso 4

Determinados el tiempo más próximo máximo y el más lejano mínimo para el proyecto final, éstos se muestran como si fueran un par de coordenadas en cada una de las distintas actividades que las conforman (estas coordenadas se denominan *eventos*). Esto se puede apreciar en la figura 3.5.3.2:




En la figura 3.5.3.2, se nota que, efectivamente, se requieren en total 44 días para poder llevar a cabo el proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social.

Paso 5

Posteriormente, se determinan las holguras correspondientes, sabiendo de antemano que la holgura de un evento se obtiene de la diferencia entre su tiempo más lejano y su tiempo más próximo. Entonces, la holgura para una determinada actividad (i, j) está dada por la diferencia entre el tiempo más lejano *i* del evento y el tiempo más próximo *i*, más el tiempo calculado para la actividad.

Por tanto, si se considera que todo marcha en orden, la holgura para un evento indica cuánto retraso se puede aceptar para llegar a ese evento sin que se demore la conclusión del proyecto final. A su vez, la holgura para una determinada actividad indicará lo mismo respecto a un retraso en la conclusión de esa misma actividad.

Así, las holguras para cada uno de los eventos que conforman el proyecto final se muestran en la matriz 3.5.3.5, de la siguiente forma:

| Matriz para determinar las Holguras de los eventos para llevar a cabo el proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Número secuencial del Evento | Holgura del evento | | | | |
| | Tiempo más lejano | - | Tiempo más próximo | = | Valor de la holgura |
| 1 | 0 | | 0 | | 0 |
| 2 | 2 | | 2 | | 0 |
| 3 | 6 | | 6 | | 0 |
| 4 | 16 | | 16 | | 0 |
| 5 | 20 | | 20 | | 0 |
| 6 | 26 | | 22 | | 4 |
| 7 | 25 | | 25 | | 0 |
| 8 | 33 | | 29 | | 4 |
| 9 | 33 | | 33 | | 0 |
| 10 | 42 | | 38 | | 4 |
| 11 | 38 | | 37 | | 1 |
| 12 | 38 | | 38 | | 0 |
| 13 | 44 | | 44 | | 0 |

Matriz 3.5.3.5

En forma análoga, las holguras para cada una de las actividades que conforman el mismo proyecto final se muestran en la matriz 3.5.3.6:

| Matriz para determinar las Holguras de las actividades para llevar a cabo el proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Número secuencial Actividad | Holgura de la actividad | | | | |
| | Tiempo más lejano | - | T.L. más T.E. | = | Valor de la holgura |
| (1, 2) | 2 | | (0 + 2) | | 0 |
| (2, 3) | 6 | | (2 + 4) | | 0 |
| (3, 4) | 16 | | (6 + 10) | | 0 |
| (4, 5) | 20 | | (16 + 4) | | 0 |
| (4, 6) | 26 | | (16 + 6) | | 4 |
| (4, 7) | 25 | | (16 + 7) | | 2 |
| (5, 7) | 25 | | (20 + 5) | | 0 |
| (6, 8) | 33 | | (22 + 7) | | 4 |
| (7, 9) | 33 | | (25 + 8) | | 0 |
| (8, 10) | 42 | | (29 + 9) | | 4 |
| (9, 11) | 38 | | (33 + 4) | | 1 |
| (9, 12) | 38 | | (33 + 5) | | 0 |
| (10, 13) | 44 | | (38 + 2) | | 4 |
| (12, 13) | 44 | | (38 + 6) | | 0 |

Matriz 3.5.3.6

Paso 6

Obtenidas las holguras tanto de los eventos como de las actividades se procede a determinar la ruta crítica del proyecto final. Por *ruta crítica* se entiende la ruta a seguir de todas las actividades cuyas holguras resultantes fueron cero. Es decir, se incluyen tanto “eventos” como “actividades” cuyo valor de su holgura es cero.

Para el caso del ejemplo 3.5.3.1, si se verifican los valores de las holguras obtenidos en la matriz 3.5.3.6, las actividades que tienen como holgura cero del proyecto final son las que conformarán la ruta crítica a seguir:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 13$$

En lenguaje coloquial, esta ruta crítica quiere decir lo siguiente: si se quiere evitar retrasos en la conclusión del proyecto, a esta secuencia de actividades cuya holgura resultó ser cero se le deberá poner atención en forma estricta con respecto a sus tiempos.

Además hay otro tipo de proyectos –o este mismo– que pueden tener más de una ruta crítica y que exigen una atención especial de los responsables. La única forma de hacerlo es mediante la información proporcionada por los tiempos más cercanos y los más lejanos, las holguras y la ruta crítica. Estas herramientas ayudan a investigar los efectos que pueden suceder en el proyecto final, así como las mejoras de éste, para llegar a una planeación adecuada y cumplir el objetivo: mantenerse a tiempo y evaluar el impacto de los retrasos.

## 3.6. PERT/costo PERT/tiempo[13]

Desde sus orígenes hasta nuestros días, el método PERT ha tomado dos enfoques:

- PERT/costo
- PERT/tiempo

Estos enfoques hacen que el analista tenga una mayor visión tanto de los costos como de los tiempos cuando se está resolviendo un problema.

[13] *Ibíd.*, pp. 294-297.

**Método PERT/costo**

Cuando nació el método PERT, así como el CPM, ambos estaban enfocados sólo a la variable tiempo, lo que significó que los administradores de proyectos desarrollaran y crearan diversos algoritmos de tiempos, fundamentados en la planeación y monitoreo de toda clase proyectos complejos.

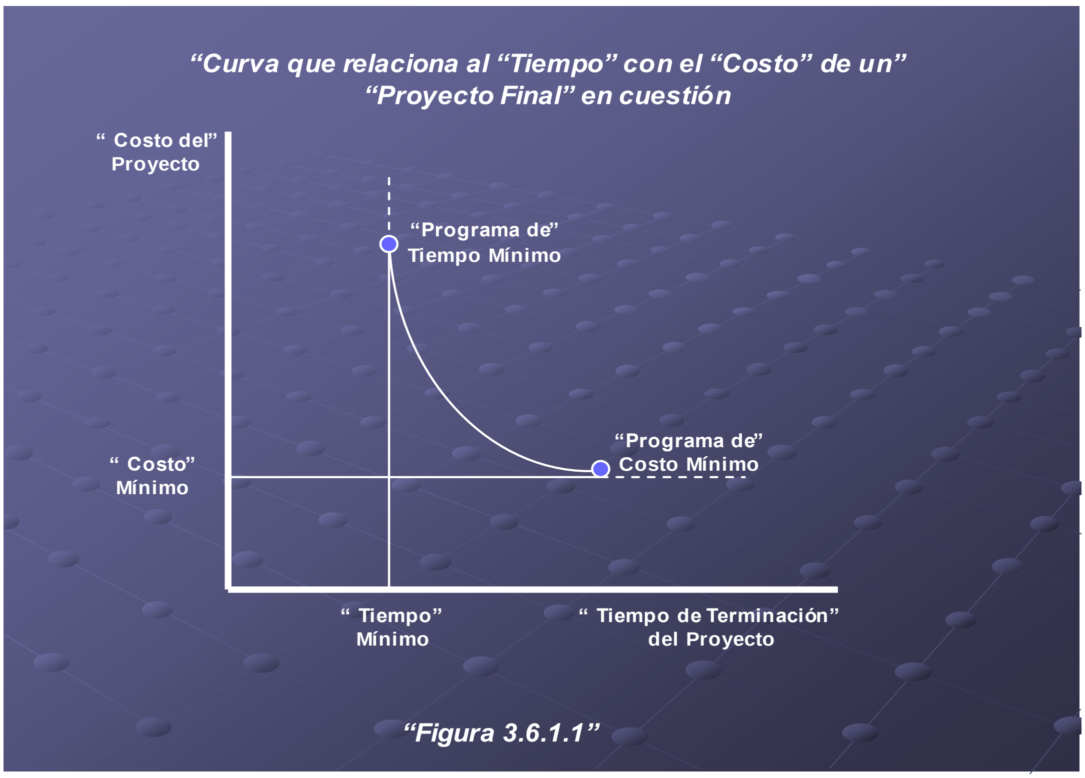
Por obvia razón, en ninguna circunstancia se había considerado al costo como otra variable de importancia. Sin embargo, el método CPM en su concepto incluyó los términos de costos directos, indirectos y contingentes; pero éstos no se tomaban como una variable importante.

Entonces, la base del enfoque PERT/costo se fundamenta en la medición y control de los costos mediante grupos de actividades, las cuales representan las partes clave del proyecto en cuestión; por tanto, la responsabilidad es determinada fácilmente.

También se ha de considerar que los gerentes de las empresas deben tener el conocimiento de los montos de los gastos que se van a requerir para cada una de las actividades con respecto a la duración planeada del proyecto. Por ello, existe una relación crucial entre el costo de los recursos asociados y el cumplimiento de la fecha específica de terminación del proyecto final. De otra manera, significa que los costos se relacionan en una reducción de la fecha de conclusión.

Por tanto, muchas actividades de una red determinada pueden reducirse en su conclusión con sólo aumentar los costos. Sin embargo, estas actividades no se disminuirán más allá de cierto límite, sin importar la cantidad de recursos monetarios adicionales necesarios. Por eso hay un tope mínimo respecto del tiempo total para terminar un proyecto; y más allá de este límite, el costo por concepto se incrementará sin que se logre reducir el tiempo total para la terminación del proyecto final.

En la figura 3.6.1.1, se muestra un diagrama cartesiano en la cual se observa cómo se relacionan el tiempo de terminación y el costo de un proyecto final, de la siguiente manera:




En la figura anterior se advierte que cada uno de los puntos que forman parte de la curva permite establecer un programa factible para el proyecto final. Entonces, la trayectoria que sigue esta curva indica que existe un programa de tiempo mínimo y uno de costo mínimo. Solamente este programa factible aparecerá sobre cualquier punto situado sobre la curva, así como en sus dos puntos extremos.

Ahora, para definir una función que permita establecer una relación entre el tiempo y el costo, se inicia considerando la siguiente suposición:

El programa de costo mínimo del proyecto final en cuestión puede concluirse en un tiempo menor, lo que significa que la reducción en el tiempo de terminación necesita que se disminuyan algunos tiempos de las actividades e implica un requerimiento de recursos monetarios adicionales. Pero esto no quiere decir que deban aminorarse los tiempos en todas las actividades en forma simultánea, sino que se realizará en forma secuencial, para así lograr la máxima reducción por unidad monetaria invertida.

Ahora bien, quienes desarrollaron el método PERT/CPM denominaron a este proceso *reducción de los tiempos de las actividades* o *tiempos de urgencia*.

Para determinar la reducción de los tiempos de las actividades, se considerará cuál actividad deberá reducirse y en cuánto. Para llevarlo a cabo, es necesario establecer los siguientes criterios:

- Conocer el valor del costo esperado asociado con cada tiempo esperado de actividad.
- Conocer el tiempo más corto posible para cada una de las actividades, siempre y cuando se aplique el máximo de recursos.
- Conocer el costo esperado para la actividad y asociado al tiempo más breve posible para tal actividad.

Con base en estos criterios, se pueden establecer las siguientes relaciones funcionales, mostradas en las Ecs. 3.6.1.1 y 3.6.1.2:

$$\boldsymbol{t_D = t_n - t_c} \qquad \text{Ec. 3.6.1.1}$$

Donde: $\boldsymbol{t_D}$ = Reducción máxima de tiempo para cada actividad

$t_n$ = Tiempo normal (valor esperado) para la actividad

$t_c$ = Tiempo reducido: el valor menor de tiempo posible para poder terminar la actividad; es decir, la reducción máxima

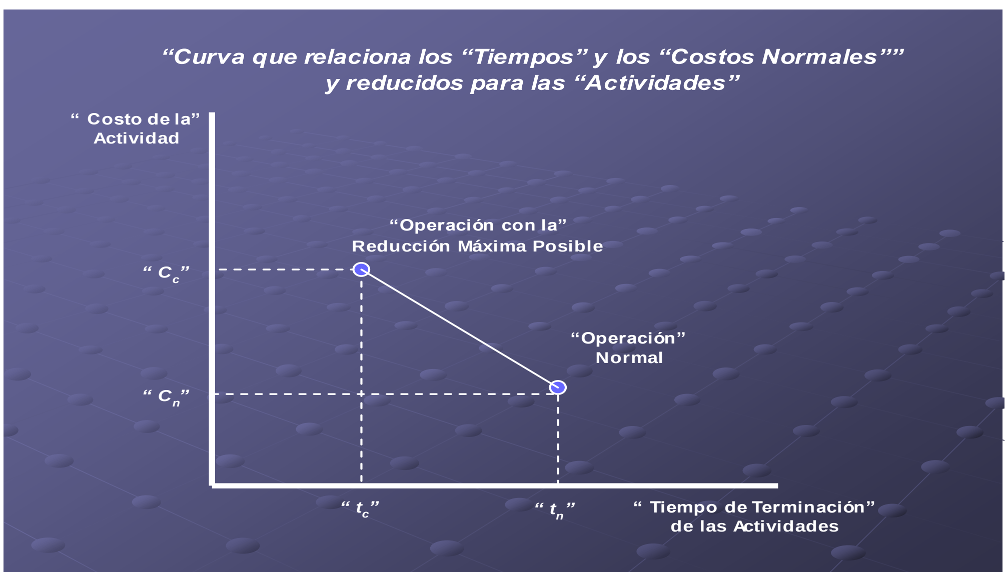
$$S = \frac{Costo_{emergencia} - Costo_{normal}}{Tiempo_{normal} - Tiempo_{emergencia}} = \frac{c_c - c_n}{t_n - t_c} = \frac{c_c - c_n}{t_D} \qquad \text{Ec. 3.6.1.2}$$

Donde: $S$ = Costo de reducción por unidad de tiempo

$c_n$ = Costo asociado con el tiempo normal de la actividad

$c_c$ = Costo de reducción: el costo asociado con el menor de tiempo posible para la actividad

Cuando son evaluadas las Ec. 3.6.1.1 y 3.6.1.2, éstas permiten establecer una relación funcional entre el costo de la actividad y su tiempo de terminación. Dicha relación se muestra en el diagrama cartesiano de la figura 3.6.1.2:



"Figura 3.6.1.2"

Finalmente, este enfoque del modelo PERT/costo permite comprobar que siempre existirá un programa de tiempo mínimo y, por consiguiente, uno de costo mínimo.

**PERT/tiempo**

En lo que respecta a la incertidumbre de los tiempos de las actividades, al aplicar el método de CPM/PERT a diversos proyectos de los sectores de la construcción y mantenimiento, cabe la posibilidad de contar con una serie de cantidades de carácter estimativo lo suficientemente precisas en relación con los tiempos de las actividades que conforman el proyecto final, dado que las empresas normalmente poseen información de esta índole de carácter histórico que, por la tecnología que utilizan, suele estar estable.

Pero no todos los proyectos suelen tener estas ventajas, dado que también existen proyectos referidos a la investigación y desarrollo en los que la tecnología es menos estable. En consecuencia, los productos no son muy comunes, por lo cual no es fácil llegar a estimaciones puntuales sobre los tiempos de las actividades.

Entonces, para tomar en cuenta estas situaciones de incertidumbre, originalmente, los creadores del método PERT permitieron a los usuarios usar tres tipos de estimaciones para los tiempos de cada una de las actividades:

| | |
|---|---|
| *Tiempo más probable ($t_m$).* | • Tiempo requerido para terminar la actividad en condiciones normales. |
| *Tiempo pesimista ($t_p$).* | • Tiempo máximo que se necesitaría para terminar la actividad si se encontraran retrasos considerables en el proyecto final. |
| *Tiempo optimista ($t_o$).* | • Tiempo mínimo requerido para finalizar una actividad si todo sucede como se visualizó. |

Por tanto, el método PERT puede usar estas estimaciones para determinar el valor de un concepto denominado *tiempo esperado* para el cual puede durar una actividad, aplicando la siguiente expresión algebraica que se muestra en la Ec. 3.6.2.1:

$$t_e = \frac{t_o + 4t_m + t_p}{6} \qquad \text{Ec. 3.6.2.1}$$

Donde: $t_e$ = Tiempo estimado

$t_o$ = Tiempo optimista

$t_m$ = Tiempo más probable

$t_p$ = Tiempo pesimista

4 y 6 = Constantes de una distribución beta

Para que se entienda mejor el uso de la Ec. 3.6.2.1, referido a la determinación del tiempo esperado, se seguirá utilizando el caso del ejemplo 3.5.3.1, en el que se presenta a continuación.

**Ejemplo 3.6.2.1**

En la empresa dedicada a la construcción de casas de interés social, los responsables de los proyectos proporcionan tres estimaciones de los tiempos requeridos para concluir cada una de las actividades del proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social. Utilizando en este caso como referencias "valores históricos", éstos se muestran en la matriz 3.6.2.1:

| Matriz en la cual se muestran las estimaciones de los tiempos (optimista, más probable y pesimista) para cada una de las actividades del proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social | | | |
|---|---|---|---|
| Número de Actividad | Tiempo optimista $t_o$ | Tiempo más probable $t_m$ | Tiempo pesimista $t_p$ |
| 1 | 1 | 1.5 | 3.5 |
| 2 | 3.5 | 4 | 6 |
| 3 | 6.5 | 9.5 | 13 |
| 4 | 2 | 3.5 | 5.5 |
| 5 | 3.5 | 5 | 6.5 |
| 6 | 3 | 6.5 | 8 |
| 7 | 4.2 | 7.3 | 9 |
| 8 | 6.5 | 9 | 11 |
| 9 | 2 | 3.5 | 5 |
| 10 | 0.5 | 1.5 | 3.2 |
| 11 | 1.8 | 3.5 | 4.7 |
| 12 | 0.7 | 1.4 | 2.5 |
| 13 | 3.9 | 5.5 | 7 |

Matriz 3.6.2.1

Luego, de la información proporcionada en la matriz 3.6.2.1 se procede a aplicar la Ec. 3.6.2.1 para cada una de las actividades que conforman el proyecto final, cuyos tiempos esperados están determinados en la matriz 3.6.2.2:

| **Matriz en la cual se muestra determinado el tiempo estimado para cada una de las actividades del proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social** | |
|---|---|
| Número de Actividad | Determinación del tiempo estimado $t_e$ |
| 1 | 1.750000 |
| 2 | 4.250000 |
| 3 | 9.583333 |
| 4 | 3.583333 |
| 5 | 5.000000 |
| 6 | 6.166667 |
| 7 | 7.066667 |
| 8 | 8.916667 |
| 9 | 3.500000 |
| 10 | 1.616667 |
| 11 | 3.416667 |
| 12 | 1.466667 |
| 13 | 5.483333 |

Matriz 3.6.2.2

Los valores de los tiempos estimados, determinados mediante la Ec. 3.6.2.1, son cantidades derivadas de ponderaciones de los que desarrollaron el método PERT, basadas en una aproximación de la distribución beta de probabilidad.

Se eligió esta distribución porque es unimodal; es decir, tiene un solo valor más alto y, por tanto, posee puntos finales finitos y no negativos, por lo que no es necesariamente simétrica. En consecuencia, hay una probabilidad latente de que estas características se presenten en la distribución de los tiempos de actividad.

Por eso en la mayoría de las aplicaciones del método PERT/CPM las actividades no se repiten un gran número de veces, y sí una sola. De ahí que ($t_e$) siga siendo el mejor estimador único del tiempo que se requiere para una actividad y es el único utilizado convencionalmente.

Determinado el tiempo esperado para cada una de las actividades del proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social, se deben plantear estas preguntas: ¿cuál es el beneficio que se obtiene al realizar estas tres estimaciones? ¿Por qué no se efectúan por simplicidad los cálculos que permiten determinar el tiempo estimado y se aplican los cálculos de CPM/PERT para conocerlos?

Como respuesta a esas dos interrogantes, se debe tener en cuenta qué tan confiables son los valores calculados obtenidos para estas estimaciones, y si el tiempo requerido para terminar una actividad es muy variable. Lo que significa que si el intervalo de dicha actividad es muy grande, se tendrá menos confianza en el tiempo probable, que si su intervalo fuera menor.

Cuando se tienen las tres estimaciones de tiempos, se puede encontrar la dispersión de los tiempos para cada una de las actividades que conforman el proyecto final, y esta medida se usará para evaluar la incertidumbre de que el proyecto se termine según el programa establecido.

Cabe hacer hincapié que en el método CPM/PERT, de la misma forma que en otros problemas de aplicación estadística común, se usa la varianza como una medida que permite describir la dispersión o variación de las estimaciones de los tiempos de las actividades. Por tanto, para determinar el valor de la varianza de los tiempos de actividad, se tomará la Ec. 2.6.2.2, de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \left(\frac{t_p - t_o}{6}\right)^2 \qquad \text{Ec. 3.6.2.2}$$

Donde: $\sigma^2{}_t$ = Varianza de los tiempos de actividad

$t_o$ = Tiempo optimista

$t_p$ = Tiempo pesimista

6 = Constantes de una distribución beta

Entonces, al aplicar la Ec. 3.6.2.2 a la información que proporciona la matriz 3.6.2.1 del proyecto final, es posible determinar los valores de la dispersión para cada una de las actividades que lo conforman. Así, la varianza para cada una de las actividades se muestra ya determinada en la matriz 3.6.2.3:

| **Matriz en la cual se muestra determinado el valor de la varianza para cada una de las actividades del proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social** | |
|---|---|
| Número de Actividad | Determinación de la varianza ($\sigma^2{}_t$ ) |
| 1 | 0.562500 |
| 2 | 2.506944 |
| 3 | 10.562500 |
| 4 | 1.562500 |
| 5 | 2.777778 |
| 6 | 3.361111 |
| 7 | 4.840000 |
| 8 | 8.506944 |
| 9 | 1.361111 |
| 10 | 0.380278 |
| 11 | 1.173611 |
| 12 | 0.284444 |
| 13 | 3.300278 |

Matriz 3.6.2.3

Luego, a partir de esta información obtenida y presentada en la matriz 3.6.2.3, se concluye que del conjunto de actividades evaluadas que forman parte del proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social, se puede observar que la actividad 1 presenta un menor grado de incertidumbre, al tener una varianza de 0.562500, en comparación con la actividad 13, la cual posee mayor grado de incertidumbre, con una varianza de 3.300278.

Esta situación es verificable porque, al examinar la matriz 3.6.2.1, el intervalo de la actividad 1 es de 1 a 3.5; mientras que el de la actividad 13, de 3.9 a 7. Luego, el único fin de la varianza es proporcionar una medida de certidumbre en las estimaciones de cada una de las actividades que conformen un proyecto final determinado.

Ahora, si se desea conocer el valor de variabilidad en la fecha de terminación de un proyecto final determinado, se puede plantear la siguiente pregunta: ¿cómo se obtendría el valor de la variabilidad en la fecha de conclusión de un proyecto final? Y se llega a la siguiente respuesta: cuando se determinó la ruta crítica del proyecto final, consistente en la construcción de una casa de interés social, se obtuvo con base en los tiempos esperados de duración para los tiempos de las actividades. Este valor alcanzado fue una duración esperada para el proyecto, lo que significa que es probable que cada una de las actividades varíe en duración en vez de ser fija.

Por tanto, el tiempo de terminación del proyecto final será variable; y en algún caso, muy específico si existieran variaciones considerables en las actividades de la ruta crítica. Lo que no significa necesariamente que el periodo de terminación del proyecto final se extienda o amplíe.

Además, si las variaciones en los tiempos de las actividades que conforman la ruta crítica dan como resultado que uno o más tiempos sean mayores a lo esperado, la culminación del proyecto final será mayor que el valor obtenido en forma previa.

Pero también se debe considerar la situación de cuando la variabilidad de las actividades de la ruta crítica que conforman un proyecto final determinado cambia y, en consecuencia, da como resultado valores menores al esperado. Entonces, hay posibilidad de que la fecha de terminación del proyecto final ocurra antes del valor calculado previamente obtenido.

En ambas situaciones se usó como referencia el concepto de *posibilidad* o *valor probable* debido a que las variaciones en el resto de las actividades del proyecto final que no forman parte de su ruta crítica podrían provocar una demora lo suficientemente grande y, por consiguiente, obligar a determinar una nueva ruta crítica que dé como resultado un valor cuya duración rebase a la obtenida en la anterior.

Por ello, se utiliza la varianza de una actividad como medida importante en el proyecto final, en tanto se refiere a la variación de la incertidumbre de la misma. Por eso puede aplicarse para obtener la variación total en el tiempo esperado para la terminación requerida por el proyecto final. Para lograrlo, se toman las varianzas de todas las actividades que forman parte de la ruta crítica que se haya determinado en un proyecto final y se suman. Y en cuanto al valor obtenido, se afirma lo siguiente: cuando la varianza total tenga un valor mayor, existe más posibilidad de que el tiempo real de terminación de un proyecto final difiera del tiempo esperado previamente alcanzado.

Aplicando lo anterior al caso del ejemplo 3.6.2.1, un proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social, se puede encontrar lo siguiente.

Se tiene la ruta crítica obtenida para este proyecto:

$$\mathbf{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 13}$$

Entonces, el valor de la varianza del proyecto es el siguiente:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2 + \sigma_7^2 + \sigma_9^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2$$

$$\sigma^2 = 0.562500 + 2.506954 + 10.562500 + 1.562500 + 2.777778 + 4.840000 + 1.361111 + 0.28444 + 3.300278$$

$$\sigma^2 = 27.75 \text{ días}$$

También se puede conocer el valor de la desviación estándar de este valor extraído de la varianza total del proyecto final, y que es igual a la raíz cuadrada de la varianza:

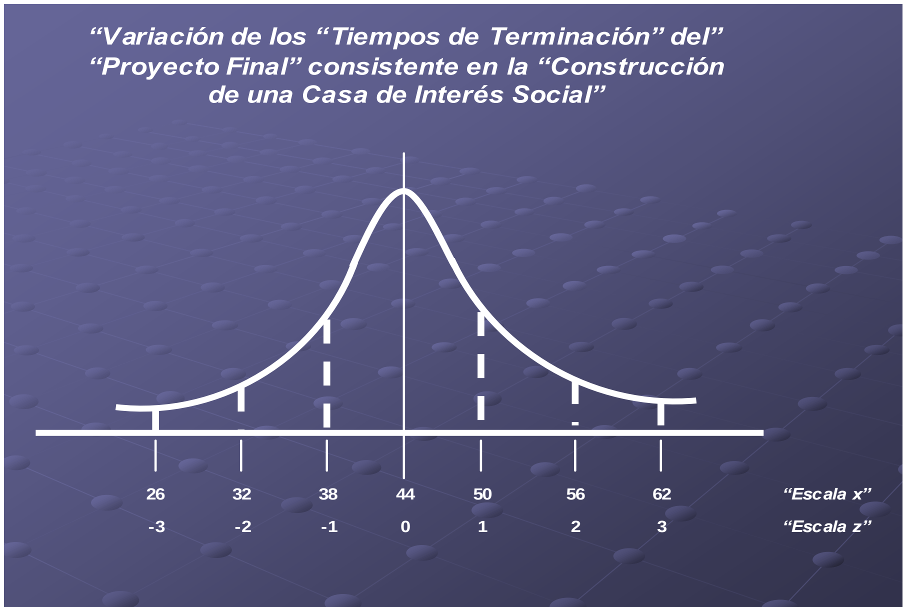
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{27.75} = 5.2685$$

Por consiguiente, la desviación estándar para que se concluya el proyecto final es de 5.26 días o aproximadamente 6 días.

Como la desviación estándar da como resultado 6 días, con respecto a los 44 días –que fue el valor esperado obtenido previamente–, existe una relación de carácter intrínseco con la variabilidad del proyecto en sí.

Ahora, si se quiere saber la relación entre la desviación estándar y el valor esperado con la distribución de probabilidad que describe los tiempos reales del proyecto en cuestión, se puede aplicar lo que se explica a continuación.

Quienes desarrollaron originalmente el método PERT utilizaron como referencia una distribución beta para describir las variaciones de las actividades que conforman un determinado proyecto final de probabilidad y estadística. Pero se conoce muy bien que los tiempos de terminación de un proyecto en cuestión no están descritos por una distribución beta, sino por una distribución normal, mejor conocida como campana de Gauss, que para el caso del ejemplo 3.6.2.1, de acuerdo con los valores obtenidos su distribución normal, se muestra en la figura 3.6.2.1:



"Figura 3.6.2.1"

Como se nota en la figura anterior, la variación del tiempo total del proyecto final consistente en la construcción de una casa de interés social sigue una distribución normal, la cual tuvo como referencia la aplicación de la ecuación que permite obtener el valor de *Z*, donde $\mu$ = 44 días y $\sigma$ = 6 días. Ecuación que se expresa a través de la Ec. 3.6.2.3 de la siguiente manera:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad \text{Ec. 3.6.2.3}$$

Por último, la aplicación de un escenario de probabilidades se puede realizar utilizando la Ec. 3.6.2.3 con respecto a una fecha de terminación más específica, la cual se fija en referencia con una fecha objetivo concreta de conclusión, con la probabilidad de concluir antes o después.

Por ejemplo, para el caso del ejemplo 3.6.2.1, supóngase que los responsables del proyecto final han comentado que se planea terminar el proyecto 12 días después del “valor esperado”. Entonces, para determinar el valor de su probabilidad, primero se tendrá que concretar el valor de *Z* empleando la Ec. 3.6.2.3 como sigue.

Si $\mu$ = 44 días, x = 56 días y $\sigma$ = 6 días; entonces el valor de *Z* es:

$$\boldsymbol{Z = \frac{56 - 44}{2} = 2}$$

Ahora, si se emplea Z = 2 en una tabla de distribuciones de probabilidad normal, se puede obtener que la probabilidad para dicho valor es de 0,9772, es decir, del 97.72%. Por tanto, la probabilidad de que el proyecto final se concluya en 56 días o “menos” es de 97.72%. Luego, los responsables deben tener la certeza de que el proyecto final se cubrirá en esa fecha.

Para ver más ejemplos, se sugiere revisar el Anexo 3.

# RESUMEN

La teoría de redes es un procedimiento que ayuda a las empresas para llevar a cabo una correcta toma de decisiones en su entorno interno y externo.

Las *redes* son el conjunto de nodos, arcos y flujos que pasan por los nodos, a través de los arcos, y se pueden conformar de distintas maneras, como cadenas, anillos, actividades ficticias y árboles abiertos.

El procedimiento general que se aplicó a lo largo de esta unidad fue el *problema de flujo de costo mínimo*, cuyo propósito es lograr la minimización del costo a un determinado nivel de flujo de entrada y a un determinado nivel de flujo de salida, a través de los arcos que unen en forma sistemática un conjunto de nodos. Y se utilizó en distintos problemas vinculados directamente con la teoría de redes: árbol de peso mínimo, ruta más corta, flujo máximo, CPM y PERT/costo y PERT/tiempo.

El problema del árbol de peso mínimo es conocido también como del árbol *expandido mínimo* o *árbol de expansión mínima*, y es uno de los más importantes en la actualidad. Consiste en que todos los nodos que componen una red deberán conectarse entre ellos, sin que conformen un bucle o *loop*. Por ello, permite resolver toda clase de problemas donde se tiene demasiada sobra de cualquier línea (muy expansiva); o donde el flujo que existe y circula a lo largo de los arcos que unen los nodos de la red es muy instantáneo.

Cuando en un momento determinado se define a una red de tal forma que los coeficientes de cada arco sean no negativos, el analista del proyecto quiere encontrar la ruta más corta entre dos nodos de la red. Por eso a esta clase de problemas se les denomina *de la ruta más corta*.

Los problemas de flujo máximo no se caracterizan por determinar los valores generados a través de cierto flujo que pasa por una red, sino, por el contrario, buscan el flujo máximo que atraviesa una red. Para analizar este tipo de problemas es necesario suponer que existen restricciones de capacidad en los arcos. De lo contrario, el flujo máximo que pasaría a través de la red sería infinito. Como ejemplos de este tipo de problemas se tienen los referentes a gasoductos y líneas de trasmisión.

Por su parte, el método CPM o de la ruta crítica es una de las dos técnicas de redes más empleadas en la administración de proyectos. Muchos autores lo asocian al método PERT o de evaluación y revisión de programas, pues ambos tienen el objetivo principal de analizar el factor de incertidumbre y los intercambios de tiempos y costos; y lo designan de una sola manera como CPM/PERT.

Desde sus orígenes hasta nuestros días, el método PERT ha tomado dos enfoques, el PERT/costo y el PERT/tiempo. Ambos permiten que el analista tenga una mayor visión cuando se está resolviendo un problema, ya que estudian tanto los costos como los tiempos.

La base del enfoque PERT/costo se apoya en la medición y control de los costos mediante grupos de actividades, las cuales representan las partes fundamentales del proyecto, lo que permite determinar puntualmente las responsabilidades.

En cuanto a la incertidumbre de los tiempos de las actividades al aplicar el método CPM/PERT a diversos proyectos referidos a los sectores de la construcción y mantenimiento, puede ocurrir que se tenga una serie de cantidades de carácter estimativo lo suficientemente precisas con respecto a los tiempos de las actividades que conforman el proyecto final, dado que las empresas suelen contar con información de carácter histórico, y por la tecnología que utilizan ésta suele estar estable.

# BIBLIOGRAFÍA

## SUGERIDA

| # | Autor | Capítulo | Páginas |
|---|---|---|---|
| 1 | Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G. | 6. Modelos de PERT/CPM.<br>7. Modelos de redes de programación lineal (PL). | 237-273<br>281-324 |
| **2** | Camacho Quiroz, Arturo | 10. Administración de proyectos. Análisis de redes (PERT y CPM). | 195-214 |

## Bibliografía básica


1. Anderson R. David, Sweeney J. Dennis y Williams A. Thomas, *Métodos cuantitativos para los negocios*, 9.ª ed., México: Thompson, 2004, 822 pp.
2. Camacho Quiroz, Arturo, *Principios de investigación de operaciones para contaduría y administración*, México: Grupo ECAFSA, 1997, 304 pp.
3. Eppen, G. D. *et al., Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*, 5.ª ed., México: Prentice Hall, 2000, 755 pp.
4. Hiller F. y Lieberman G. J., *Introducción a la investigación de operaciones*, México: McGraw-Hill, 2002, 855 pp.
5. Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G., *Modelos cuantitativos para administración*, 2.ª ed., México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994, 757 pp.
6. Taha A. Hamndy, *Investigación de operaciones,* 5.ª ed., México: Alfa Omega, 2000, 960 pp.
7. Wayne L. Winston, *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos,* México: Thompson, 2005, 1418 pp.


## Bibliografía complementaria


1. Bueno A. G. de. *Introducción a la programación lineal y al análisis de sensibilidad*, México: Trillas 1990, 1889 pp.
2. Daellenback H., George J. y D. Menickle, *Introducción a técnicas de investigación de operaciones,* México: CECSA, 1986, 771 pp.

# Sitios de internet

| Sitio | Descripción |
|---|---|
| http://www.slideshare.net/FreddOc/modelos-de-redes-investigacin-de-operaciones. | Modelos de redes. |
| http://gemini.udistrital.edu.co/comunidad/profesores/jgmedina/tema1.html. | Teoría general de redes. |

# UNIDAD 4

# Modelo de inventarios

# OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá los modelos para la solución de problemas relacionados con los inventarios.

# TEMARIO DETALLADO

## (12 horas)

**4. Modelo de inventarios**

| |
|---|
| 4.1. Problema general de un modelo de inventario |
| 4.2. Modelo de lote económico clásico |
| 4.2.1. Propiedades del modelo |
| 4.2.2. Caso con faltantes |
| 4.2.3. Caso con ventas perdidas |
| 4.2.4. Caso con tasa de producción finita |
| 4.2.5. Caso con descuentos por cantidad |

# INTRODUCCIÓN

Una de las partes medulares de las empresas como parte de su estructura organizacional es lo referente al manejo y aplicación de inventarios. De aquí la importancia de los métodos cuantitativos, pues ayudan en la solución y análisis de los inventarios.

La teoría referente a los modelos de inventarios para las organizaciones tiene su origen en 1915, cuando F. W. Harris diseñó y desarrolló el modelo que actualmente se denomina *modelo de la cantidad económica de pedido* (CEP), utilizado para determinar la cantidad óptima de materiales o artículos que deben adquirirse o fabricarse.

Posteriormente, F. E. Raymond, a principios de la década de 1930, modificó y amplió el modelo de Harris. Así, a partir de las aportaciones de estos dos investigadores, la teoría de los inventarios ha ido creciendo hasta la actualidad.

Entre los enfoques fundamentales que han fortalecido y aplicado los modelos de inventarios en el campo empresarial hasta nuestros días, se pueden mencionar los siguientes:

- **a.** Cantidad económica de pedido
- **b.** Puntos óptimos de re-orden
- **c.** Pedidos retroactivos
- **d.** Equilibramiento de los inventarios
- **e.** Descuentos por cantidad

Por otra parte, los modelos de inventarios también han sido un tema fundamental en la investigación de operaciones, ya que son un elemento estructural en su funcionamiento, operación y desarrollo.

Dentro de la administración del capital de trabajo, con frecuencia la administración de los inventarios es el concepto de mayor relevancia que aparece en el estado de situación financiera que reporta en forma periódica las empresas. Por consiguiente, es una de las partidas que forman parte de sus activos. Normalmente, esta partida representa del 35 al 45% de sus activos totales.

Este impacto de los inventarios dentro del estado de situación financiera de las empresas obliga a que éstas utilicen las herramientas que ofrecen los métodos cuantitativos, a fin de obtener una reducción de los inventarios disponibles, en cualquier cantidad porcentual por muy pequeña que sea. Esta reducción se traduce en distintas cantidades de unidades monetarias de ahorro altamente significativas, independientemente de su magnitud.

El propósito de ahorrar recursos monetarios del inventario por parte de las empresas tiene asimismo como intención alcanzar la maximización de sus clientes a los que les venden sus productos o servicios. Por obvia razón, es normal que las entidades no pueden reducir sus inventarios para disminuir la inversión de sus activos; y tampoco mantener sus inventarios en un tamaño elevado a fin de satisfacer la demanda de sus clientes. Por tanto, el manejo de los inventarios está en función del escenario económico en el que se encuentren respecto de la oferta existente y la demanda requerida. Es decir, la empresa pretende llegar al equilibrio entre la satisfacción de sus clientes y las inversiones en todo el activo mediante una buena administración de los inventarios, con base en modelos prácticos, con el propósito de lograr una buena administración de su capital de trabajo.

Esta unidad se desarrolla en forma sistemática, de modo que el estudiante conozca los conceptos fundamentales referentes a los modelos de inventarios y su administración, para que los identifique y aplique en distintas facetas que pueden presentarse en el campo profesional.

Los modelos que se analizarán son de carácter determinístico.

# 4.1. Problema general de un modelo de inventario

Para que una empresa pueda resolver las distintas situaciones del manejo de sus inventarios y tomar decisiones, tendrá que usar los modelos básicos que le ofrecen los modelos de inventarios.

En primer lugar, es necesario comprender los principales términos y conceptos utilizados en los modelos de inventarios, para facilitar el análisis de cualquier problema en cuestión. Por ello, en este apartado se definirá el concepto de inventarios, y después se expondrá lo referente a cómo se estudian los problemas de inventarios, considerando los siguientes aspectos:[14]

- Funciones de los inventarios
- Características más representativas de los modelos de inventarios
- Criterios de los costos en los modelos de inventarios

**Definición de los inventarios**

Para las empresas u organizaciones los inventarios son una parte estructural muy importante dentro de las partidas principales que conforman sus activos totales. Por tanto, para que la entidad pueda manejar bien sus inventarios, debe obtener una máxima ganancia, pero a un costo mínimo de almacenaje. Y para ello es

[14] Davis Roscoe K. y Patrick McKeown G., *op. cit.,* pp. 485-490.

fundamental que tenga un equilibrio, el cual depende de la velocidad con que mueva los inventarios.

Con base en lo anterior, se puede afirmar que un inventario son los recursos que tiene una empresa de acuerdo con su giro y sector económico, que son utilizables y se encuentran almacenados en algún punto determinado del tiempo.

Ejemplos

1. Si la empresa pertenece a un sector fabril, su inventario incluirá todo lo referente a materias primas, artículos semiprocesados y productos terminados.

2. Si la empresa es del sector comercial, su inventario tendrá todo el conjunto de artículos y productos disponibles para su venta tanto al menudeo como al mayoreo. Estos inventarios pueden incluir activos no físicos como el dinero en efectivo, cuentas por cobrar, etcétera.

3. Si la empresa corresponde al sector del papel, sus inventarios comprenderán las materias primas, así como toda la gama de productos terminados que tendría disponibles para sus intermediarios, que son las empresas comerciales, encargadas de vender el producto al consumidor.

## Funciones de los inventarios[15]

Para que se puedan manejar de manera eficiente, los inventarios deben tener una serie de funciones, como el desglose, tipo de inventario por manufactura y tipo de inventario por ventas al detalle.

El desglose es una función que permite a la empresa u organización separar todas las actividades de producción, distribución y comercialización.

En tanto, la manufactura es una función que los inventarios realizan según su modalidad:

*De materias primas*.

- Inventarios cuya función es poder tomar decisiones sobre la producción a corto plazo de manera independiente con respecto a la actividad del mercado de materiales. Por ejemplo, suele suceder que se acumulen las materias primas por los descuentos de éstas en el precio.

*De materiales en proceso*.

- Permiten su desglose de todas las etapas de producción, lo que significa que los diversos departamentos de producción operan sin que haya una dependencia directa referente al programa de producción de los departamentos anteriores.

*De artículos terminados*.

- Posibilitan la separación de la función de producción y la demanda de sus clientes. Como ejemplo de estos inventarios, se tiene la demanda estacional o demanda variable de un producto, la cual es conocida, por lo que resultará más favorable mantener los inventarios en vez de permitir que oscile el nivel de producción.

---
15 *Ibíd.,* pp. 485-486.

En lo que respecta a las ventas al detalle, es una función que se les aplica a los inventarios cuando, por ejemplo, un comprador espera a que el comerciante tenga los productos que desea adquirir. Si en ese instante el producto no se encuentra disponible, el comerciante pierde al comprador en lo que se refiere a ese producto; y por una situación posible también lo perdería en productos futuros. Entonces, para absorber todas las fluctuaciones en la demanda, la mejor forma de dar un buen servicio a los compradores es que los comerciantes conserven su inventario, para que los comerciantes eviten compensar la variabilidad de los tiempos de la entrega por parte de sus proveedores.

**Características más representativas de los modelos de inventarios[16]**

Para realizar el análisis de un problema de inventarios, es necesario establecer, en primera instancia, qué modelo se apega más a su análisis, a fin de darle solución y, por consecuencia, conduzca a tomar la decisión acorde a su resultado. Y para que los analistas puedan llevar a cabo lo anterior, es necesario que conozcan las características del problema y elijan el modelo más adecuado a esas cualidades.

Entre las características más representativas de los diferentes modelos de inventario, se tienen las siguientes:

1. *Modelos comerciales comparados con modelos de producción*. Existen modelos comerciales cuya cualidad principal es que los inventarios de reabastecimiento se obtienen de proveedores externos a la firma; y además suponen un reabastecimiento inmediato. Pero también hay modelos de producción cuyo rasgo central es que los inventarios para reabastecimiento se fabrican en la empresa, con la salvedad de que éstos suponen un

[16] *Ibíd.,* pp. 486-488.

reabastecimiento lento. Así, la diferencia clave entre ambos modelos está en la manera de cómo se reabastecen los inventarios.

2. *Demanda*. Se da cuando se sabe el valor de la demanda con certidumbre, y se establece que el tiempo es constante. Ello significa que el modelo a aplicar es determínistico. Esto no implica que la demanda en esta clase de modelos siempre sea constante; al contrario, puede mostrar un efecto de variabilidad en el modelo, sin que éste deje de ser determinístico.

3. *Tiempo de adelanto (demora en la entrega)*. Se refiere al tiempo transcurrido entre el comienzo de la actividad de reabastecimiento –ya sea por pedido o por producción– y la recepción del reabastecimiento de los inventarios. Este periodo puede ser fijo, y su determinación, realizarse con certidumbre o por efectos probabilísticos. Aunque también se supone que existen las condiciones para establecer modelos con el tiempo de adelanto variable.

4. *Políticas de pedidos*. Consiste en que la empresa debe establecer siempre con puntualidad en los sistemas de inventarios dos decisiones clave:
    - ¿Qué cantidad debe pedirse?
    - ¿Cuándo debe pedirse?

    Para responder lo anterior, se recurre al sistema de pedidos, que ofrece dos modalidades:

    **a.** *Punto de orden*. Se les denomina también *sistemas de inventarios perpetuos*, puesto que manejan un registro perpetuo de los inventarios, revisados continuamente.

    Cuando el inventario llega a tener un límite predeterminado, se dice que existe un punto de re-orden, y en éste comienza un pedido de reabastecimiento para una magnitud fija de productos terminados. Este sistema se utiliza normalmente cuando la cantidad de productos terminados solicitada es muy alta, y por obvia razón los “costos” para mantener este tipo de inventarios son también muy elevados.

**b.** *Revisión periódica*. En este sistema, los inventarios no son revisados continuamente, sino que de forma periódica se realizan evaluaciones a intervalos fijos predeterminados. Luego, los inventarios de reabastecimiento que se piden pueden variar, lo que permite establecer una comparación entre el inventario disponible y el deseado: la diferencia entre ambas magnitudes es la cantidad pedida o fabricada.

**5.** *Agotamientos (falta de existencias)*. Los inventarios tienden a agotarse cuando la demanda excede a la cantidad disponible. Los agotamientos pueden darse en forma accidental o planeada. Esto da como consecuencia que se establezca una “política” que aborde el “problema” y le dé “solución”.

Con frecuencia, hay un modelo que se utiliza cuando ocurren este tipo de situaciones, el de *pedidos retroactivos*, que consiste en establecer una compensación en una fecha posterior de los agotamientos.

Por otra parte, cabe mencionar que se utilizan con regularidad los modelos que no consideran los agotamientos, los llamados *de ventas pérdidas*.

**6.** *Estructura del sistema*. Se refiere a que los sistemas de inventarios pueden presentar las siguientes formas:

**a.** *De etapa única*. Se caracteriza porque sus inventarios se utilizan en forma directa para poder satisfacer la demanda.

**b.** *De etapa múltiple*. Se distingue porque tiene bancos múltiples de inventarios o puntos múltiples de almacenamiento. Esta clase de sistema se derivó de los de etapa única, pues en realidad son de una etapa, pero se hicieron de etapas múltiples ante la amplitud del problema y el grado de complejidad del mismo.

**7.** *Horizonte de tiempo del modelo*. Este horizonte puede ser finito o infinito. Es finito cuando se conoce el término del horizonte; e infinito cuando se toma en cuenta un horizonte de tiempo infinito.

## Criterios de los costos en los modelos de inventarios[17]

Los criterios de los costos también tienen una gran importancia cuando se analizan los inventarios, ya que al hacerlo es necesario considerar una serie de variables como el rendimiento sobre la inversión, rotación de activos, ciclo de vida del producto, entre otras. Todas estas variables siempre se estudian de manera contable y financiera, en forma “continua”, es decir, considerando intervalos de tiempo continuos. Pero el análisis de los inventarios tendría que echar mano de modelos más complejos.

Así, la mayoría de los modelos de inventarios dentro del campo de la investigación de operaciones se fundamentan en las compensaciones de los costos como criterio básico de su análisis. En este orden, hay cuatro variables de costos:

- De pedido o preparación
- De mantenimiento o conservación
- De agotamiento o de falta de existencias

[17] *Ibíd.*, pp. 488-490.

- De adquisición o de producción

A continuación se explican las características esenciales de cada uno de estos costos, a fin de que el alumno los pueda entender y comprender para poder aplicarlos en el resto de los subtemas de la presente unidad.

1. *Costo de pedido o preparación*. Se caracteriza por generarse en cualquier instante en que sucede alguna actividad consistente en el reabastecimiento de los inventarios. Si el reabastecimiento de los inventarios ocurre en un modelo comercial, entonces, a éste se le denomina *costo de pedido*; y por consiguiente, está referido específicamente a los costos administrativos y a los costos de oficina, vinculados a todas las secuencias y a todas las actividades que deban seguirse desde que comienza la requisición de compra hasta el instante en que se recibe el pedido, el cual se pone en el inventario y se liquida.

   Algunos parámetros considerados en este tipo de costo:

   - Procesamiento y manejo de las órdenes de compra
   - Transporte
   - Recepción
   - Inspección
   - Colocación del inventario
   - Contabilidad del inventario
   - Auditoría del inventario
   - Pago al proveedor del inventario

   Suele establecerse que los costos de pedido serán independientes del tamaño del lote, pues con frecuencia se utiliza un cargo fijo por pedido.

Ahora, si el reabastecimiento de los inventarios ocurre en un modelo de producción, a éste se le denomina *costo de preparación*, pues se refiere a los costos administrativos y a los de oficina, vinculados en el apoyo a la producción.

Algunos parámetros que se consideran en este tipo de costo:

- Requisiciones de los inventarios
- Recepción del inventario
- Inspección del inventario
- Colocación en el inventario
- Contabilización del inventario
- Mano de obra y materiales que se vinculan mucho con la preparación de la maquinaria para la producción

En los modelos que se expondrán en esta unidad, se considera que el costo de pedido o preparación permanecerá constante, lo que significa que el costo será independiente de la cantidad de unidades que se pidan o autoricen para producir.

**2.** *Costo de conservación o de mantenimiento*. Es cuando se tiene un determinado nivel de inventarios durante un tiempo específico. Por tanto, este costo considera tanto a los costos explícitos como a los implícitos vinculados con el mantenimiento y propiedad de los inventarios.

Algunos parámetros en este tipo de costo:

- Costo de oportunidad del dinero invertido en los inventarios
- Costo de almacenamiento. Incluye renta, calefacción, iluminación, refrigeración, conservación de registros, seguridad, etcétera
- Depreciación del inventario
- Impuestos del inventario
- Seguros del inventario
- Deterioro del inventario
- Obsolescencia de los productos

En los modelos que se expondrán en esta unidad, se considerará que el costo de conservación o costo de mantenimiento permanecerá proporcional a la cantidad promedio de unidades del inventario.

**3.** *Costo de agotamiento o por falta de existencias*. Ocurre cuando el inventario disponible no satisface la demanda. Lo que implica recurrir a realizar pedidos retroactivos, cuya magnitud variará en función a ellos.

Si en el inventario se autorizan los pedidos retroactivos, habrá una pérdida permanente en las ventas de los productos que se estén demandando y que en ese instante no se encontraban disponibles. Y los costos vinculados al agotamiento serán los costos administrativos y de oficina referidos a esta actividad.

Algunos parámetros en este tipo de costo:

- Costo de esfuerzos especiales en estas áreas
- Tiempo extra para el inventario
- Manejo de personal del inventario

- Manejo del transporte especial del inventario
- Seguimiento del inventario

Para evitar un *agotamiento* en los *inventarios*, las empresas manejan y mantienen un inventario de seguridad a fin tenerlo como protección. Lo anterior porque los agotamientos que utilizan los pedidos retroactivos pueden caer en la pérdida de clientes. Lo que daría como resultado incurrir en un costo de buena voluntad.

Ahora bien, para determinar el costo de agotamiento o costo por falta de existencias, se procede en forma distinta, según la situación que en ese instante se esté presentando. En una situación común, se considera un costo fijo por agotamiento, sin que se tome en cuenta su magnitud o tiempo de duración. Entre otras opciones, se debe suponer un costo de agotamiento por unidad; mientras que en otras se opta por suponer el costo de agotamiento referido a la cantidad de unidades que no se incluyen como parte de la duración del agotamiento.

Estas situaciones han provocado que se establezcan convenios en donde se impongan castigos por agotamiento. Por consiguiente, para determinar el valor de este costo es necesario aplicarle también este factor.

**4.** *Costo de adquisición o costo de producción*. Se caracteriza según el tipo de modelos al que se aplica. Si es en los modelos comerciales, este costo estará referido al costo de compra o adquisición del producto; mientras que para los modelos de producción, se vinculará al costo de producción del producto.

Ahora, cuando se analice una situación en común siempre se supondrá que el costo unitario permanecerá constante sin importar la cantidad de unidades que se compren o fabriquen. Pero no siempre este supuesto se llega a dar, pues hay distintos escenarios económicos que pueden ocurrir y generar rupturas o cambios fuertes tanto en la cantidad como en el precio.

- En los modelos que se expondrán en esta unidad, se considera que el costo de adquisición o producción permanecerá en forma unitaria y constante del inventario.

# 4.2. Modelo de lote económico clásico[18]

El modelo de lote clásico, también conocido como *clásico de la cantidad económica de pedido* (CEP), se fundamenta en suponer que está especificado al establecimiento de una función denominada *función comercial*. Ésta analiza el ámbito exterior de una compañía, en donde se consideran dos variables importantes a seguir:

1. *Compras*. Se refiere a cómo la empresa adquiere todo lo referente a su sistema productivo o de servicio, según sea el caso. Para esto deberá tener un amplio conocimiento de lo que requiere su sistema, con el propósito de comprar lo que cada proveedor pueda ofrecerle, en función de una serie de parámetros a ponderar, como el comportamiento comercial, cumplimiento de las fechas de entrega, cumplimiento de la cantidad a entregar, tipo de calidad de los productos entregados, precio a pagar por la entrega, condiciones de cómo se va pagar la entrega, forma como de deberá inventariar los productos comprados, etcétera.

[18] *Ibíd.*, pp. 490-498.

2. *Ventas.* Consiste en que la empresa deberá tener un amplio conocimiento sobre su segmento de mercado con la intención de que pueda colocar los productos que ha “adquirido” o producido. Esto conlleva el saber con detalle lo que desea el cliente, así como las características de los productos, gustos, condiciones de pago, etcétera. Este conocimiento le permitirá a la empresa establecer y programar las ventas según esas cualidades.

Los inventarios forman parte de esta función comercial en donde la empresa siempre está en contacto continuo con su medio exterior. El modelo clásico de la cantidad económica de pedido (CEP), entonces, se basa en esta función comercial de la empresa.

## 4.2.1. Propiedades del modelo

1. Se tiene conocimiento de la demanda con certidumbre y, por tanto, ésta permanecerá constante con el tiempo.

2. El valor del tiempo de adelanto o tiempo de espera es de cero, lo que significa que un pedido se recibe en el instante cuando se solicita.

3. Para su uso, este modelo emplea un sistema de punto de re-orden, y por consecuencia los inventarios son revisados continuamente.

4. El inventario se reabastecerá cuando éste haya llegado en forma precisa al nivel de cero. Por tanto, no se utilizará la existencia de seguridad y no se permitirán agotamientos.

5. Cuando se lleve a cabo el reabastecimiento de los inventarios, se realizará en forma inmediata. Es decir, el pedido total se recibirá en un solo lote.

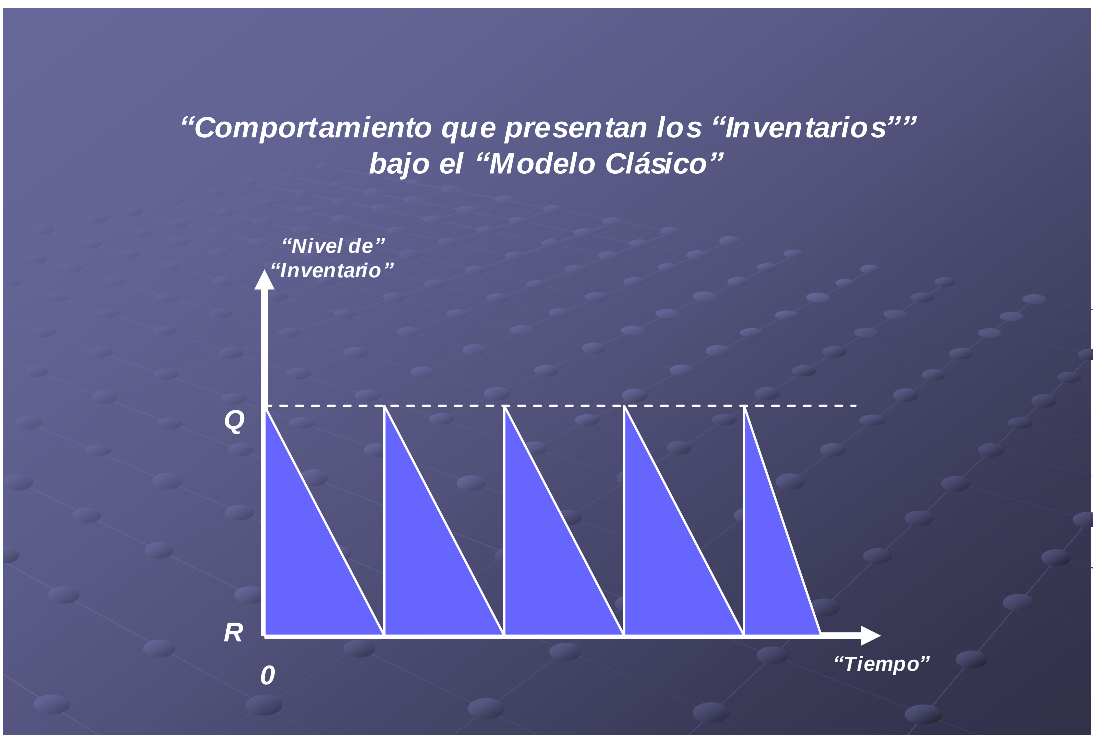
6. La cantidad de pedido permanecerá constante en cada orden.

7. Este modelo considera a un problema que implicará un sistema de etapa única.

8. Considerará un horizonte de tiempo infinito y de forma continua.

9. Tomará en cuenta que todos los costos permanecerán en forma constante en el horizonte de tiempo infinito.

Estas propiedades básicas se pueden observar en la figura 4.2.1.1, un diagrama cartesiano que muestra el comportamiento de los inventarios según el modelo clásico de la cantidad económica de pedido:



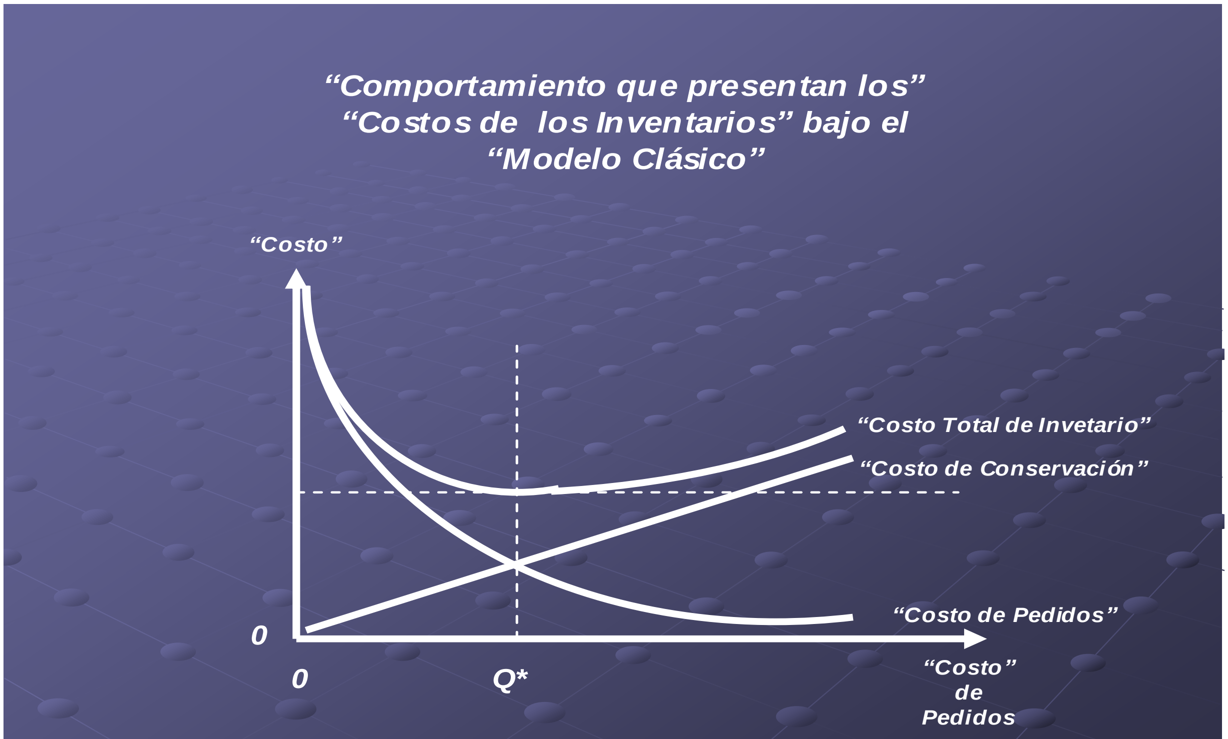
"Figura 4.2.1.1"

De la figura anterior, se puede concluir que la línea que va descendiendo hacia la derecha indica que el inventario se va reduciendo con el tiempo al valor de una tasa constante. Lo que significa que también la demanda permanece constante. Asimismo, se advierte que el tiempo de adelanto es igual a cero, y el reabastecimiento del inventario es de forma inmediata; entonces, el punto de re-orden se determina de forma automática. A su vez, cuando el inventario alcance el valor de cero, la cantidad que se pide en cada punto de reabastecimiento es “Q”.

Ahora, de acuerdo con las consideraciones básicas de la figura 4.2.1.1, se procede a desarrollar el planteamiento del modelo, cuyo objetivo principal es determinar la cantidad óptima de pedido (Q*) y el punto de re-orden (R*), de tal forma que logren minimizar los costos totales de los inventarios.

De antemano se dedujo en forma lógica que el punto óptimo de re-orden (R*) es cero, entonces, el objetivo queda enfocado solamente a determinar el valor de la cantidad económica de pedido (Q*). Además, dentro de las consideraciones básicas, se mencionó que no hay agotamientos, es decir, su costo es cero y, en consecuencia, se tendrá que minimizar la suma de costos de pedido y mantenimiento.

Luego, para realizar el modelo, será fundamental analizar las relaciones entre los costos de pedido y de mantenimiento. Relación que se puede notar en forma gráfica en la figura 4.2.1.2:




“Figura 4.2.1.2”

En la figura anterior se visualiza el comportamiento de cada uno de los costos de los inventarios, de lo que se puede concluir que si aumentara la cantidad de pedido, resultarían menos pedidos, y los costos estarían disminuyendo. Desde otra perspectiva, si el tamaño de pedido aumentara, también lo harían los inventarios. Lo anterior debido a que los costos de pedido y los de mantenimiento se comportan en forma contraria; o sea, el costo de pedido tiende a disminuir, mientras que el de mantenimiento a aumentar. Así, la cantidad óptima de pedido (Q*) será el punto en donde los costos de pedido serán iguales a los costos de mantenimiento: el punto donde las dos funciones se interceptan.

Este punto de intercepción de “Q*” también permite observar cómo se cumple el objetivo del inventario: minimizar su costo total. Es decir, a medida que la cantidad de pedido (Q*) sube el costo total baja, por causa de la reducción de los costos de pedido. De igual manera se puede observar que el costo total tiende a aumentar posteriormente debido al crecimiento de los costos de mantenimiento.

En conclusión, el punto mínimo de la función costo total *($C_{T\ mín}$)* será aquel en que los costos de pedido sean iguales a los de mantenimiento.

### 4.2.2. Caso con faltantes[19]

El caso con faltantes es la aplicación más general que utiliza el modelo clásico de cantidad económica de pedido. Como su nombre lo dice, su objetivo básico es estar cubriendo en forma periódica los faltantes que tenga el *stock* de la empresa; por eso es muy recurrente por todas las empresas en general.

Para que se entienda mejor este caso, en primera instancia se procederá a desarrollar su planteamiento mediante un modelo matemático del modelo clásico. Después, se expondrá cómo se soluciona este modelo matemático. Y por último, se mostrará y solucionará un ejemplo donde pueda visualizarse, para así entender y comprender el uso y aplicación de este modelo clásico a través de este caso.

[19] *Ibíd.*, pp. 498-501.

**Planteamiento del modelo matemático del modelo clásico**

Para obtener el comportamiento de la función costo total de los inventarios del caso por faltantes, es necesario definir sus parámetros y variables a través de la siguiente notación:

$C_0$ = Costo por pedido que se coloca
$C_c$ = Costo de mantenimiento por unidad y por periodo
$C_T$ = Costo total del inventario por periodo
Q = Cantidad económica de pedido o tamaño del pedido
D = Número de unidades que se piden por periodo

En el modelo clásico, la variable de decisión que dará solución es la cantidad económica de pedido *(Q)*, cuyo objetivo es minimizar el costo total de los inventarios. Mientras que los parámetros $C_T$, $C_0$ y $C_c$ son constantes que permiten determinar los costos total, de pedido y de mantenimiento para varios tamaños.

Así, un planteamiento general del modelo clásico es como se muestra en la Ec. 4.2.2.1:

Minimizar:

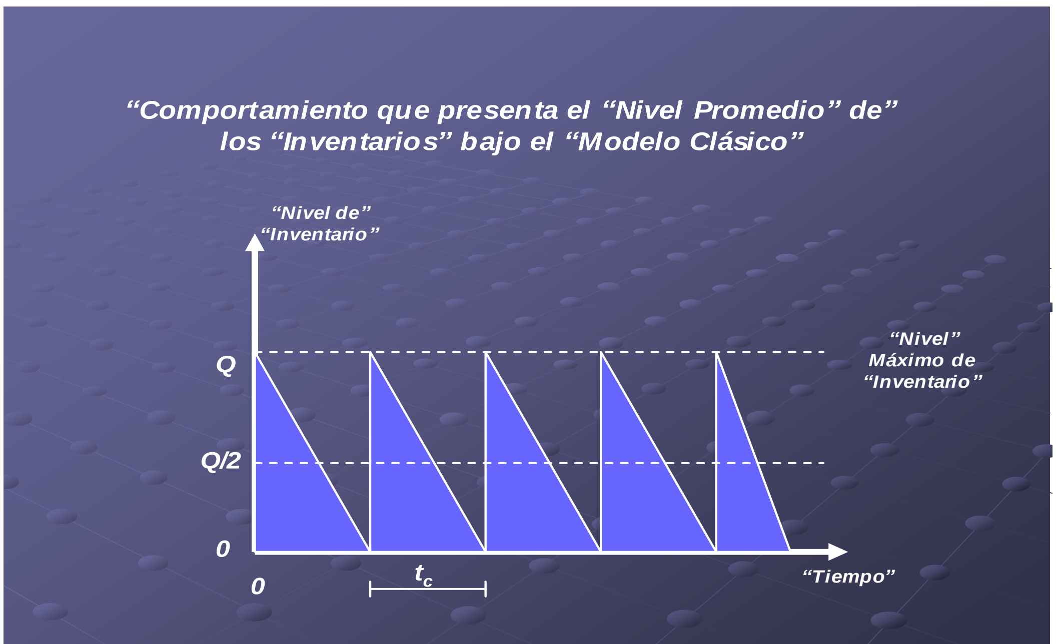
$$\textit{\textbf{Costo total del inventario}} = \textit{\textbf{Costo de pedidos}} + \textit{\textbf{costo de mantenimientos}} \qquad \text{Ec. 4.2.2.1}$$

Ahora, se sabe que el costo de pedidos es el costo de cada uno ellos *($C_0$)*, el cual se multiplica por el número de pedidos, realizados por cada periodo. Esto debido a que la demanda del periodo se conoce; entonces, el número de pedidos es igual a la cantidad económica de pedido entre el tamaño del pedido. Así, para determinar el costo de pedidos, se aplica la Ec. 4.2.2.2:

$$\textbf{Costo de pedidos} = C_0 x \left(\frac{D}{Q}\right)$$ Ec. 4.2.2.2

Luego, para obtener el costo de mantenimiento, éste será igual al costo de mantenimiento por unidad de periodo *($C_c$)*, el cual se multiplica por la cantidad promedio de unidades que se mantienen en el inventario.

A la cantidad promedio de unidades mantenidas en el inventario también se le denomina *inventario promedio*. Y para determinarlo, se partirá de la información que se presenta en la figura 4.2.2.3, como sigue:



"Figura 4.2.1.3"

De la figura 4.2.2.3, se puede observar que para determinar el inventario promedio se calculará a través de la E. 4.2.1.3:

$$\textbf{Inventario promedio} = \left(\frac{\text{Área bajo una línea de inventario}}{\text{Longitud del período}}\right.$$ Ec. 4.2.2.3

En la figura 4.2.2.3 se puede observar que el inventario promedio es *Q/2*, o sea, el área bajo la línea de inventarios dividida entre la longitud del periodo $(t_c)$. Así, la Ec. 4.2.2.3 modifica su expresión, como se refleja en la Ec. 4.2.2.4:

$$\boldsymbol{Inventario\ promedio} = \left(\frac{\frac{1}{2}\,x\ altura\ x\ base}{t_c}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.2.4}$$

En la Ec. 4.2.2.4 se aprecia que la altura es igual a *Q;* y la *base*, a $t_c$. Entonces, la Ec. 4.2.2.4 se modifica y queda expresada a través de la Ec. 4.2.2.5:

$$\boldsymbol{Inventario\ promedio} = \left(\frac{\frac{1}{2}\,x\ Qxt_c}{t_c}\right) = \left(\frac{Q}{2}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.2.5}$$

Así, el costo de mantenimiento se determinará a través de la Ec. 4.2.2.6:

$$\boldsymbol{Costo\ de\ mantenimiento} = C_c x \left(\frac{Q}{2}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.2.6}$$

Finalmente, el planteamiento del problema expuesto en la Ec. 4.2.2.1 queda modificado y expresado a través de la Ec. 4.2.2.7 de la siguiente manera.

Minimizar:

$$C_T = C_0 x \left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x \left(\frac{Q}{2}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.2.7}$$

**Solución al planteamiento del modelo matemático del caso por faltantes**

Para resolver el modelo matemático expresado a través de la Ec. 4.2.2.7, en la figura 4.2.2.2, se puede observar que la cantidad óptima de pedido *(Q*)* se ubica en el punto de intersección donde los costos de pedidos son iguales a los de mantenimiento.

Entonces, utilizando las herramientas de la derivada del cálculo diferencial, se puede decir que para conocer el valor mínimo de una función, se procederá a obtener la derivada de la función costo total. O sea, obteniendo la derivada de la Ec. 4.2.2.7 e igualando el resultado de la derivada a cero, el valor de *Q** quedará expresado como se indica en la Ec. 4.2.2.8.g.

Entonces, derivando $C_T$ con respecto a $Q$, resulta:

$$\frac{dC_T}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left\{\frac{C_0}{1} x \left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x \left(\frac{Q}{2}\right)\right\}$$ Ec. 4.2.2.8.a

$$\frac{dC_T}{dQ} = \frac{-C_0 D}{Q^2} + \frac{C_c}{2}$$ Ec. 4.2.2.8.b

Ahora, si se iguala a cero la Ec. 4.2.2.8.b, debido a que el valor de la pendiente de la función $C_T$ es de cero en el punto mínimo, resulta:

$$0 = \frac{-C_0 D}{Q^2} + \frac{C_c}{2}$$ Ec. 4.2.2.8.c

Finalmente, se procede a despejar el valor de *(Q*)*:

$$\frac{C_0 D}{Q^2} = \frac{C_c}{2}$$ Ec. 4.2.2.8.d

$$\frac{C_0 D}{C_c} = \frac{Q^2}{2}$$ Ec. 4.2.2.8.e

$$\frac{2C_0 D}{C_c} = Q^2$$ Ec. 4.2.2.8.f

Y se tiene:

$$\boldsymbol{Q}^{*} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2C_0D}}{\boldsymbol{C_c}}} \qquad \text{Ec. 4.2.2.8.g}$$

El resultado de la Ec. 4.2.2.8.g permite obtener el valor de *Q**, donde se sabe que *(Q*)* es la cantidad óptima de pedido. Entonces, se puede verificar en forma clara que los costos de mantenimiento deberán ser iguales a los de pedidos para dicho valor de *Q**.

Normalmente, los administradores también buscan determinar el número de pedidos por periodo, y este valor debe estar sujeto a una política óptima y al tiempo que transcurre entre dos periodos sucesivos. Asimismo, se determinará el costo total en el cual se incurre al usar la política óptima de pedidos. Estos valores se alcanzan de la siguiente forma:

**a.** Tomando como referencia la cantidad óptima de pedido, el número óptimo de pedidos por periodo *(N*)* se obtiene al dividir el valor de la demanda *(D)* entre el valor de la cantidad óptima de pedido *(Q*)*. A este valor de *N** se llega a partir de la Ec. 4.2.2.9, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{N}^{*} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{DC_c}}{\boldsymbol{2C_0}}} \qquad \text{Ec. 4.2.1.9}$$

**b.** El tiempo transcurrido entre dos periodos sucesivos también se denomina *ciclo del inventario (tc)*, y se refiere al inverso del número óptimo de pedidos *(N*)*. Así, el valor de *N** se obtiene de la Ec. 4.2.2.10, como sigue:

$$\boldsymbol{t_c} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2C_0}}{\boldsymbol{DC_c}}} \qquad \text{Ec. 4.2.2.10}$$

**c.** Para determinar el costo asociado con la política óptima de pedidos, sólo se debe sustituir el valor de *Q** en la Ec. 4.2.2.7. Y este valor de *(Q*)* se obtiene a partir de la Ec. 4.2.2.11.c:

$$\boldsymbol{C *_T = C_0 x \left(\frac{D}{Q^*}\right) + C_c x \left(\frac{Q^*}{2}\right)} \qquad \text{Ec. 4.2.2.11.a}$$

Donde:

$$\boldsymbol{Q^*} = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_c}} \qquad \text{Ec. 4.2.2.8.g}$$

Sustituyendo, la Ec. 4.2.2.8.g en la Ec. 4.2.2.11.a, se tiene:

$$\boldsymbol{C *_T = C_0 x \left(\frac{D}{\sqrt{\frac{2C_0D}{Cc}}}\right) + C_c x \left(\frac{\sqrt{\frac{2C_0D}{Cc}}}{2}\right)} \qquad \text{Ec. 4.2.2.11.b}$$

Y resulta:

$$\boldsymbol{C_T} = \sqrt{\boldsymbol{2C_0C_cD}} \qquad \text{Ec. 4.2.2.11.c}$$

Se puede concluir que, con las ecuaciones desarrolladas a lo largo del modelo clásico, se resuelven distintos problemas prácticos que cumplan con sus propiedades o condiciones.

Para que el alumno analice cómo se utilizan estas ecuaciones, se expone a continuación un caso en el ejemplo 4.2.2.1.

**Ejemplo 4.2.2.1**

Una empresa se dedicada a la distribución de antenas universales que se utilizan en minicomponentes y componentes de electrónica y comunicaciones. La demanda es de 2,500 piezas anuales; el costo de pedido, \$5.00; y el costo de almacenamiento anual por unidad, \$2.00.

De acuerdo con esta información, se pide determinar:

1. Valor de la cantidad óptima de pedido
2. Valor del costo total si el costo por unidad es de \$3.50
3. Número de pedidos por año
4. Tiempo entre pedidos.
5. Costo total asociado con la política óptima de *Q**
6. Conclusiones

Solución

Para obtener la solución completa del Ejemplo 4.2.2.1, se darán los siguientes pasos.

1. Para conocer el valor de la cantidad óptima de pedido *(Q*)*, se aplicará la Ec. 4.2.2.8.g:

$$\boldsymbol{Q}^{*} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2C_0D}}{\boldsymbol{Cc}}} \qquad \text{Ec. 4.2.2.8.g}$$

   Se sabe que $C_0$ = *\$5.00,* $C_n$ = *\$2.00* y *D* = *2,500* unidades. Entonces, sustituyendo estos valores en la Ec. 4.2.2.8.g, se obtiene el valor de *Q**:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(5)(2500)}{2}} = \sqrt{\frac{(25000)}{2}} = \sqrt{12500} = 111.8033 \; \textit{Unidades por pedic}$$

**2.** Para determinar el costo total, se utilizará la Ec. 4.2.2.7, pero agregando el costo anual del inventario; modificación que permitirá obtener el costo total del inventario. Esto se observa en la Ec. 4.2.2.12:

$$C_T = CostoAnual + CostodePedido + CostodeMantenimiento \qquad \text{Ec. 4.2.2.12}$$

Se sabe que $C_u$ = *3.50,* $C_0$ *= $5.00,* $C_n$ *= $2.00 y D = 2,500 unidades.* Luego, se obtienen cada uno de los costos que involucran a la Ec. 4.2.2.12 y después se sustituyen en ella para obtener el valor de $C_T$. Y se tiene lo siguiente.

- *Costo anual.* Este costo se obtiene al multiplicar el valor de $C_u$ por la demanda anual de piezas. En este caso, se multiplicará el valor de $3.50 por las 2,500 piezas que representan la demanda anual, y resulta:

$$C_{Anual} = C_u x D = \$3.50x2,500 = \$8,750.00$$

- *Costo de pedido.* Se determina utilizando la Ec 4.2.2.2:

$$C_{Pedido} = C_0 x \left(\frac{D}{Q^*}\right) = \$5.00x = \left(\frac{2,500}{111.8033}\right) = \$111.8033$$

- *Costo de mantenimiento.* Se obtiene utilizando la Ec. 4.2.2.6:

$$C_{Mantenimiento} = C_{0d}x\left(\frac{Q^*}{2}\right) = \$2.00x = \left(\frac{111.8033}{2}\right)$$
$$= \$111.8033$$

Finalmente, el costo total se obtendrá al sustituir los tres costos determinados en forma separada en la Ec. 4.2.2.12, y resulta:

$$C_T = \$8,750.00 + \$111.8033 + \$111.8033 = \$8,973.6059$$

**3.** Para determinar el número de pedidos por año, se aplica la Ec. 4.2.2.9:

$$N = \frac{D}{Q^*} = \frac{2500}{111.8033} = 22.3606\ Pedidos\ al\ año$$

**4.** Para calcular el tiempo entre pedidos, se utiliza la Ec. 4.2.2.10:

$$t_c = \frac{Q^*}{D} = \frac{111.8033}{2500} = 0.0447\ Años = 16.3232\ Días$$

**5.** Para obtener el valor del costo total asociado con la política óptima de *Q**, se aplica la Ec. 4.2.2.11.c:

$$C_T = \sqrt{2C_0C_cD} = \sqrt{2x5x2x2500} = \sqrt{50000} = \$223.6067$$

**6.** Finalmente, del ejemplo 4.2.2.1 se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- Para que no se encuentre en dificultades de colocar sus productos entre su clientela, la empresa dedicada a la distribución de antenas universales para todo tipo de mini-componentes y componentes en electrónica y en comunicaciones, deberá tener un *stock* en existencia de una cantidad óptima de pedido, que oscila en 111.8033 unidades.

- Esta cantidad óptima de pedido generará un costo total de $8,973.6059 que le permitirá realizar 22.3606 pedidos anuales.
- Estos pedidos tendrán un tiempo de 16.3232 días entre cada uno de ellos. El costo total asociado con la política óptima de *Q** fue de $ 223.6067.

En este caso por faltantes, el modelo presenta una particularidad: el punto de re-orden y el tiempo de adelanto son diferentes a cero.

## 4.2.3. Caso con ventas perdidas[20]

Este caso es una aplicación del modelo clásico de cantidad económica de pedido, caracterizado por cumplir con todas las condiciones o propiedades básicas, excepto con la referente a los agotamientos, que este caso sí toma en cuenta, pues normalmente en los modelos de inventarios no se permiten agotamientos. Por eso el caso de ventas perdidas también es denominado *modelo clásico de cantidad económica de pedido con agotamientos*, ello significa que no se permiten los pedidos retroactivos.

Existen dos clases de modelos por agotamientos:

**a.** En donde se consideran los agotamientos como demanda perdida o ventas perdidas; es decir, cuando la demanda no ha sido satisfecha.

**b.** En donde los agotamientos se satisfacen con base en los pedidos retroactivos.

[20] *Ibíd.*, pp. 510-517.

Sin considerar cuál de los modelos por agotamientos se aplique, en ambos se cae en costos por falta de producto. Lo que implica que para el modelo de agotamiento por ventas perdidas, los costos se ven reflejados en utilidades no obtenidas; mientras que para el modelo por agotamiento por pedidos retroactivos, los costos se encuentran asociados a una serie de esfuerzos especiales administrativos, de oficina, tiempo extra, expedición, transporte especial y seguimiento.

Como se puede concluir, el caso de ventas perdidas resulta contradictorio: ¿por qué un empresario tendría que tomar una política de llevar a cabo la realización de pedidos retroactivos si esta acción le genera costos adicionales? Para responder, en primera instancia, el analista deberá considerar el siguiente supuesto.

Cuando se solicitan pedidos cuya finalidad sea cumplir la satisfacción de la demanda atrasada, un empresario establece normalmente una demora de sus pedidos al proveedor, lo que significa que puede reducir su costo, pues no necesita realizar demasiados pedidos. Por consiguiente, el empresario mantendrá niveles inferiores de inventario, porque por cada uno de los pedidos que él solicita se asignan en forma instantánea a una demanda atrasada que deberá cumplir.

Luego, si los inventarios resultan chicos, también los costos de pedido y mantenimiento podrán disminuir. Esta política le permite al empresario equilibrar los costos de agotamiento que por obvia razón aumentarán con respecto al decrecimiento de los costos de pedido y los de mantenimiento, como parte de la decisión que por las necesidades de su empresa está llevando a cabo.

Finalmente, el caso por ventas perdidas tiene como objetivo central cubrir en forma periódica los faltantes que requiera el *stock* de la empresa, con la finalidad de que esté entregando los diferentes pedidos para satisfacer una demanda atrasada que le hagan sus clientes y que tenga que cumplir.

Para que el estudiante comprenda mejor el caso por ventas perdidas, se procederá a desarrollar su planteamiento mediante un modelo matemático del modelo clásico. Después, se expondrá cómo se soluciona este modelo matemático. Y por último, se presentará y solucionará un ejemplo.

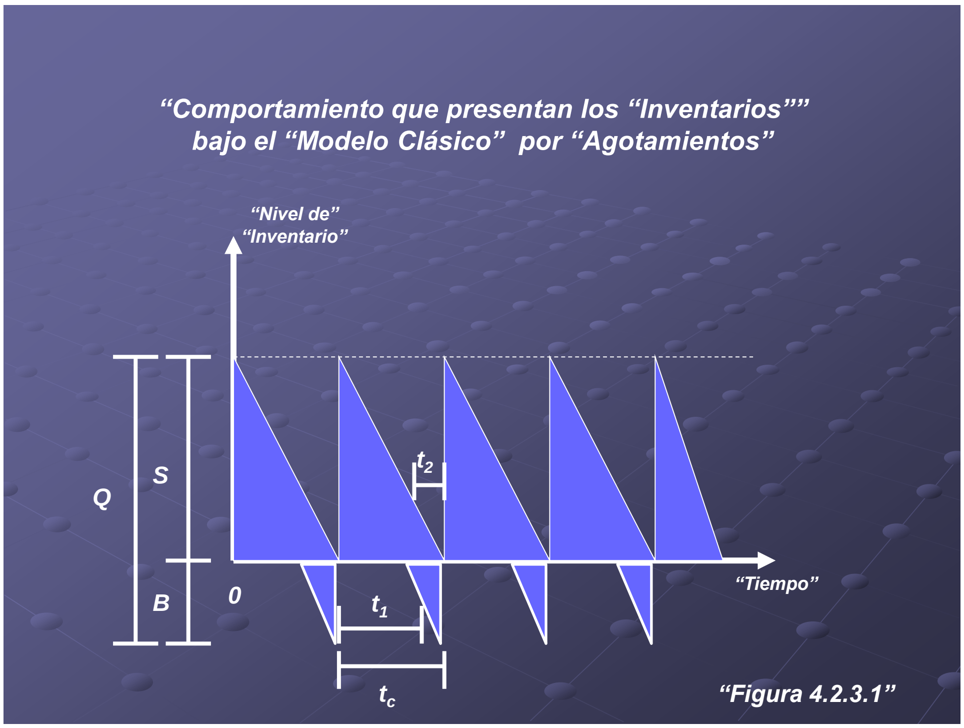
**Planteamiento del modelo matemático del modelo por ventas pérdidas**

Para obtener el comportamiento de la función costo total de los inventarios del caso por ventas perdidas, se toma como referencia el modelo de agotamientos por pedidos retroactivos, pues la finalidad es satisfacer la demanda atrasada. Y para lograrlo, es necesario definir sus parámetros y variables a través de la siguiente notación:

$C_0$ = Costo por pedido que se coloca
$C_c$ = Costo de mantenimiento por unidad y por periodo
$C_s$ = Costo por agotamiento por unidad y por periodo
$C_T$ = Costo total del inventario por periodo
Q = Cantidad económica de pedido o tamaño del pedido
D = Número de unidades que se piden por periodo
B = Tamaño del pedido retroactivo
S = Nivel máximo de inventario

En el caso por ventas perdidas, todas las consideraciones básicas del modelo clásico se cumplen, con excepción de la referente a que ocurran los agotamientos en el inventario. Por tanto, las variables de decisión que darán la solución son la cantidad económica de pedido *(Q)* y el nivel máximo de inventario *(S)*, cuyo objetivo es lograr la minimización del costo total de los inventarios. Y para alcanzar este propósito, este caso supone que la demanda es conocida y permanecerá constante con un tiempo de adelanto de cero. Asimismo considera que el reabastecimiento de inventario es inmediato y su cantidad de pedido permanecerá constante; además de que se realizará en un sistema de una sola etapa y a un horizonte de tiempo continuo e infinito.

El caso por ventas perdidas se plantea en la figura siguiente:




En la figura anterior, se distingue que en el caso de ventas perdidas se permiten pedidos retroactivos: el nivel de inventario puede caer a cantidades inferiores a cero.

El tamaño del pedido retroactivo *(B)* se refiere al número de unidades que se solicitaron en forma retroactiva por cada ciclo del inventario. Por consiguiente, este tamaño de pedido retroactivo siempre será inferior a la cantidad de pedido *(Q)*, pues solamente se están enviando pedidos atrasados al solicitar los pedidos retroactivos.

El nivel máximo de inventario *(S)*, entonces, se obtiene de la diferencia entre *Q* y *B,* es decir, *(Q – B)*. Además, el tiempo del ciclo del inventario *($t_c$)* se fracciona en dos tiempos:

$t_1$ = Tiempo del “ciclo” en el que existe “inventario” disponible

$t_2$ = Tiempo del “ciclo” en el que existen los “agotamientos”

Finalmente, los parámetros $C_T$, $C_0$, $C_c$ y $C_s$ son constantes que permiten determinar el costo total, de pedido, de mantenimiento y por agotamiento para varios tamaños.

Un planteamiento general del modelo clásico es como se muestra en la Ec. 4.2.3.1.

Minimizar:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Costo\ total\ del\ inventario}\\&\quad = \boldsymbol{Costo\ de\ pedidos + costo\ de\ mantenimientos}\\&\quad + \boldsymbol{costo\ de\ agotamiento}\end{aligned} \qquad \text{Ec. 4.2.3.1}$$

De la misma forma que en el caso con faltantes del modelo clásico, el costo de pedidos es el costo de cada uno ellos *($C_0$)*, el cual se multiplica por el número de pedidos realizados por cada periodo. Esto porque la demanda del periodo se conoce; entonces, el número de pedidos es igual a la cantidad económica de pedido entre el tamaño del pedido. Luego, el costo de pedidos se obtiene a través de la Ec. 4.2.3.2:

$$\boldsymbol{Costo\ de\ pedidos = C_0 x \left(\frac{D}{Q}\right)} \qquad \text{Ec. 4.2.3.2}$$

Así, al obtener el costo de mantenimiento, éste será igual al costo de mantenimiento por unidad de periodo *($C_c$)*, el cual se multiplica por la cantidad promedio de unidades mantenidas en el inventario. Sin embargo, en el caso de ventas perdidas, el inventario promedio es diferente al empleado en el caso de faltantes; o sea, en el primero, el inventario promedio representa un inventario promedio para solamente una determinada porción del ciclo de inventario.

A partir de la figura 4.2.3.1, se puede determinar el inventario promedio por ciclo, a través de la Ec. 4.2.3.3, de la siguiente forma:

$$\textbf{Inventario promedio por ciclo} = \left(\frac{\textbf{Área bajo la línea de Demanda cuando existe el inventario}}{\textbf{Longitud del ciclo}}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.3}$$

Ahora, en la figura 4.2.3.1 también se puede observar que el inventario promedio es S/2, o sea, el área bajo la línea de inventarios dividida entre la longitud del periodo *($t_c$)*. Entonces, la Ec. 4.2.3.3 modifica su expresión, como se muestra en la Ec. 4.2.3.4:

$$\textbf{Inventario promedio por ciclo} = \left(\frac{\frac{1}{2}\,x\ altura\ x\ base}{t_c}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.4}$$

En la Ec. 4.2.3.4, se puede notar que la altura es igual a *S*; y la base, a $t_1$. Y como se advierte en la figura 4.2.3.1, entonces la Ec. 4.2.3.4, se modifica y queda expresada a través de la Ec. 4.2.3.5:

$$\textbf{Inventario promedio por ciclo} = \left(\frac{\frac{1}{2}\,x\ S\ x\ t_1}{t_c}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.5}$$

Ahora, volviendo a la figura 4.2.3.1, se nota que si se aplica una propiedad geométrica de semejanza de triángulos entre el triángulo mayor y el menor, que relacionan *Q* y *S*, a través de la Ec 4.2.3.6, se advierte lo siguiente:

$$\frac{t_1}{S} = \left(\frac{t_1 + t_2}{Q}\right) = \frac{t_c}{Q} \qquad \text{Ec. 4.2.3.6}$$

De la Ec. 4.2.3.6, se procede a despejar el tiempo del ciclo en el que existe inventario disponible *($t_1$)*, y da como resultado la Ec. 4.2.3.7*,* de la siguiente forma:

$$t_1 = \frac{(t_c)(S)}{Q} \qquad \text{Ec. 4.2.3.7}$$

Sustituyendo la Ec 4.2.3.7 en la Ec. 4.2.3.5, se tiene que el inventario promedio por ciclo se determina mediante la Ec. 4*.2.*3.8, de la siguiente forma:

$$\textit{Inventario promedio por ciclo} = \left(\frac{\frac{1}{2} xSx\left(\frac{t_c xS}{Q}\right)}{t_c}\right) = \frac{t_c xS^2}{2xQxt_c} = \frac{S^2}{2x} \qquad \text{Ec. 4.2.3.8}$$

Normalmente, el comportamiento de los inventarios es frecuente, entonces, el inventario promedio para un número alto de ciclos será el valor que se determinará mediante la Ec. 4.2.3.8. Por consiguiente, el costo de mantenimiento se conocerá a través de la Ec. 4.2.2.9:

$$\textit{Costo de mantenimiento} = C_c x\left(\frac{S^2}{2xQ}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.2.9}$$

El costo por agotamiento se obtiene al multiplicar el costo de agotamiento *($C_S$)* por el número promedio de unidades que no se tienen disponibles. Y para determinar este número, se realiza el procedimiento utilizado para precisar el inventario promedio por ciclo. Luego, en la figura 4.2.3.1 encontramos que para encontrar el número promedio de unidades faltantes por ciclo se aplica la Ec. 4.2.3.10:

$$Número\ promedio\ de\ unidades\ faltantes\ por\ ciclo = \left(\frac{Área\ bajo\ la\ línea\ durante\ el\ agotamiento}{Longitud\ del\ ciclo}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.10}$$

En la figura 4.2.3.1, se puede observar que el número promedio de unidades faltantes por ciclo es B/2. Entonces, el número promedio de unidades faltantes por ciclo será el área bajo la línea de agotamientos dividida entre la longitud del periodo *($t_c$)*. Por eso, la Ec. 4.2.3.10 modifica su expresión, como lo muestra la Ec. 4.2.3.11:

$$Número\ promedio\ de\ unidades\ faltantes\ por\ ciclo = \left(\frac{\frac{1}{2}\ x\ altura\ x\ base}{t_c}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.11}$$

En la Ec. 4.2.3.11, se puede observar que la altura es igual a *B*; y la base, a $t_2$. Y como se advierte de la figura 4.2.3.1, la Ec. 4.2.3.11 se modifica y queda expresada a través de la Ec. 4.2.3.12:

$$Número\ promedio\ de\ unidades\ faltantes\ por\ ciclo = \left(\frac{\frac{1}{2}\ x\ B\ x\ t_{21}}{t_c}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.12}$$

Volviendo a la figura 4.2.3.1, se distingue que si se aplica una propiedad geométrica de semejanza de triángulos entre el triángulo mayor y el menor, que relacionan *Q* y *B*, a través de la Ec. 4.2.3.13, se nota que:

$$\frac{t_2}{B} = \left(\frac{t_1 + t_2}{Q}\right) = \frac{t_c}{Q} \qquad \text{Ec. 4.2.3.13}$$

De la Ec. 4.2.313, se procede a despejar el tiempo del ciclo en el que existen los agotamientos disponibles *($t_2$)*, y da como resultado la Ec. 4.2.3.14, de la siguiente forma:

$$t_2 = \frac{(t_c)(B)}{Q} \qquad \text{Ec. 4.2.3.14}$$

Sustituyendo la Ec 4.2.3.14 en la Ec. 4.2.3.12, se tiene que el número promedio de unidades faltantes por ciclo se determina mediante la Ec. 4.2.3.15:

$$\boldsymbol{Inventario\ promedio\ por\ ciclo} = \left(\frac{\frac{1}{2}\ xBx\ \left(\frac{t_c xB}{Q}\right)}{t_c}\right) = \left(\frac{t_c xB^2}{2xQxt_c}\right) = \frac{B^2}{2xQ} \qquad \text{Ec. 4.2.3.15}$$

En forma análoga a como sucedió en el comportamiento de los inventarios, también es frecuente que el número promedio de unidades faltantes por ciclo para un número alto de ciclos sea el valor que se determinará mediante la Ec. 4.2.3.14. Por consiguiente, el costo de agotamiento se determinará a través de la Ec. 4.2.3.16, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{Costo\ de\ agotamiento} = C_s x \left(\frac{B^2}{2xQ}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.16}$$

Por último, el planteamiento del problema expresado en la Ec. 4.2.3.1 queda modificado y expresado a través de la Ec. 4.2.3.17 de la siguiente manera.

Minimizar:

$$C_T = C_0 x \left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x \left(\frac{S^2}{2xQ}\right) + C_s x \left(\frac{B^2}{2xQ}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.17}$$

Pero como se mencionó, B = Q – S, entonces, esta afirmación se sustituye en la Ec. 4.2.3.17, la cual queda re-expresada en la Ec. 4.2.3.18 de la siguiente forma:

Minimizar:

$$C_T = C_0 x \left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x \left(\frac{S^2}{2xQ}\right) + C_s x \left(\frac{(Q-S)^2}{2xQ}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.18}$$

**Solución al planteamiento del modelo matemático del caso por ventas perdidas**

Para resolver el modelo matemático expresado a través de la Ec. 4.2.3.18, en la figura 4.2.3.1 se puede observar que la cantidad óptima de pedido *(Q*)* será aquella en donde los costos de pedidos equilibren a los de agotamiento y a los de mantenimiento. Esto significa que la Ec. 4.2.3.18 quedaría re-expresada a través de la Ec. 4.2.3.19, como sigue:

Minimizar:

$$C_0 x \left(\frac{D}{Q}\right) = C_c x \left(\frac{S^2}{2xQ}\right) + C_s x \left(\frac{(Q-S)^2}{2xQ}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.3.19}$$

Por tanto, de la Ec. 4.2.3.19 se determina el valor de la cantidad óptima de pedido *(Q*)*. Pero para realizarlo, hay dos inconvenientes:

**a.** Puede suponerse con certeza que se tiene la seguridad desde un principio que el costo de mantenimiento disminuirá con los pedidos retroactivos; lo que implica la posibilidad de que el inventario promedio aumente, dado que desde este enfoque se piden cantidades mayores.

**b.** Supóngase que se conoce con seguridad la dirección del cambio en los costos de mantenimiento, entonces esto provocaría complicaciones para determinar *Q**. En consecuencia, la función del costo total tendría una segunda variable de decisión, *S*, es decir, el nivel máximo de inventario.

Luego, para obtener los valores de $Q^*$ y $S^*$ de la Ec. 4.2.3.18, se puede realizar a través del método de ensayo y error, es decir, por un proceso de interpolación lineal; o a través de las herramientas del cálculo diferencial utilizando las derivadas parciales, dado que la función de costo total involucra en forma conjunta a las dos variables a despejar.

Entonces, derivando $C_T$ con respecto a $Q$, primero resulta:

$$\frac{dC_T}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left\{\frac{C_0}{1}x\left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x\left(\frac{S^2}{2xQ}\right) + C_s x\left(\frac{(Q-S)^2}{2xQ}\right)\right\} \qquad \text{Ec. 4.2.3.20.a}$$

Después, se iguala a cero la Ec. 4.2.3.20.b debido a que el valor de la pendiente de la función $C_T$ es cero en el punto mínimo. Y resulta:

$$0 = \frac{d}{dQ}\left\{\frac{C_0}{1}x\left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x\left(\frac{S^2}{2xQ}\right) + C_s x\left(\frac{(Q-S)^2}{2xQ}\right)\right\} \qquad \text{Ec. 4.2.3.20.b}$$

Ahora, derivando $C_T$ con respecto a $S$, primero resulta:

$$\frac{dC_T}{dS} = \frac{d}{dQ}\left\{\frac{C_0}{1}x\left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x\left(\frac{S^2}{2xQ}\right) + C_s x\left(\frac{(Q-S)^2}{2xQ}\right)\right\} \qquad \text{Ec. 4.2.3.21.a}$$

Después, se iguala a cero la Ec. 4.2.3.21.b, debido a que el valor de la pendiente de la función $C_T$ es cero en el punto mínimo. Y resulta:

$$0 = \frac{d}{dQ}\left\{\frac{C_0}{1}x\left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x\left(\frac{S^2}{2xQ}\right) + C_s x\left(\frac{(Q-S)^2}{2xQ}\right)\right\} \qquad \text{Ec. 4.2.3.21.b}$$

Finalmente, se procede a despejar los valores de $Q^*$ y de $S^*$ del sistema de ecuaciones resultante de las Ecs. 4.2.3.20.b y 4.2.3.21.b, donde se obtienen ambos.

Por tanto, las Ecs. 4.2.3.22 y 4.2.3.23 podrán obtener los valores de *Q** y *S*, de la siguiente forma:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_c}}\,x\,\sqrt{\frac{C_c + C_s}{C_s}}$$ Ec. 4.2.3.22

$$S^* = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_c}}\,x\,\sqrt{\frac{C_s}{C_c + C_s}}$$ Ec. 4.2.3.23

Los resultados de la Ecs. 4.2.3.22 y 4.2.3.23 permiten obtener los valores de *Q** y *S** respectivamente, donde se sabe que *(Q*)* es la cantidad óptima de pedido y *(S*)* el nivel máximo de inventarios. Entonces, se puede verificar en forma clara que los costos de pedido deberán equilibrar a los de agotamiento, y a los costos de mantenimiento para dichos valores de *Q* y S**.

Ahora, los administradores normalmente también buscan determinar el número de pedidos por periodo. Y este valor estará sujeto a una política óptima y al tiempo que transcurre entre dos periodos sucesivos. De igual manera, se debe determinar el costo total en el cual se incurre al usar la política óptima de pedidos. Estos valores se conocen de la siguiente forma.

**a.** El número óptimo de pedidos por periodo *(N*)* se obtiene a partir de la Ec. 4.2.3.24:

$$N^* = \sqrt{\frac{C_cD}{2C_0}}\,x\,\sqrt{\frac{C_s}{C_c + C_s}}$$ Ec. 4.2.3.24

**b.** El tiempo que transcurre entre dos periodos sucesivos se denomina también *ciclo del inventario* (tc) y se obtiene de la Ec. 4.2.2.25:

$$t_c{}^* = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_c}}x\sqrt{\frac{C_c + C_s}{C_s}} \qquad \text{Ec. 4.2.3.25}$$

**c.** El costo asociado con la política óptima de pedidos se obtiene a partir de la Ec. 4.2.2.26:

$$C_T{}^* = \sqrt{2C_0C_cD}x\sqrt{\frac{C_s}{C_c + C_s}} \qquad \text{Ec. 4.2.3.26}$$

Se puede concluir que con las ecuaciones aplicadas a lo largo del modelo clásico, se obtienen soluciones de distintos problemas prácticos que cumplan con sus propiedades o condiciones.

Para una mejor comprensión de cómo se manejan estas ecuaciones, se expone a continuación el ejemplo 4.2.3.1.

**Ejemplo 4.2.3.1**

Una empresa se dedica a la distribución de antenas universales utilizadas en forma general en distintos tipos de minicomponentes y componentes de electrónica y comunicaciones, cuya demanda es de 2,500 piezas anuales. A su vez, el costo de pedido es de \$5.00; y el costo de almacenamiento por unidad por año, de \$ 2.00. El fabricante está ubicado en una zona muy cercana y puede garantizar una entrega instantánea. Se calcula que el costo por agotamiento es de \$0.50 por unidad anual.

Con base en la información anterior, se pide determinar:

1. Valor de la cantidad óptima de pedido
2. Valor del nivel de inventarios máximo
3. Valor del costo total si el costo por unidad es de \$3.50
4. Número de pedidos por año
5. Tiempo entre pedidos
6. Costo total asociado con la política óptima de $Q^*$
7. Conclusiones

Solución

Para obtener la solución completa del ejemplo 4.2.3.1, se darán los siguientes pasos:

1. Para dar con el valor de la cantidad óptima de pedido *($Q^*$)*, se aplica la Ec. 4.2.3.22:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_c}}\, x \sqrt{\frac{C_c + C_s}{C_s}} \qquad \text{Ec. 4.2.3.22}$$

Se sabe que $C_0 = \$5.00$, $C_n = \$2.00$, $C_S = \$0.50$ y $D = 2{,}500$ unidades; entonces, sustituyendo estos valores en la Ec. 4.2.3.22, se encuentra el valor de $Q^*$, y resulta:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(5)(2,500)}{2}}\, x \sqrt{\frac{2 + 0.50}{0.50}} = \sqrt{12,500}\, x \sqrt{5} = (111.8033)(2.2360)$$
$$= 249.9997$$

**2.** Para obtener el valor del nivel máximo de inventario *(S*)*, se emplea la Ec. 4.2.3.23:

$$\boldsymbol{S^* = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_c}}\, x \sqrt{\frac{C_s}{C_c + C_s}}} \qquad \text{Ec. 4.2.3.23}$$

Se sabe que $C_0 = \$5.00$, $C_n = \$2.00$, $C_S = \$0.50$ y $D = 2{,}500$ unidades. Luego, sustituyendo estos valores en la Ec. 4.2.3.24, se halla el valor de *S**, y resulta:

$$\boldsymbol{S^* = \sqrt{\frac{2(5)(2,500)}{2}}\, x \sqrt{\frac{0.50}{2 + 0.50}} = \sqrt{12,500}\; x\; \sqrt{0.20} = (111.8033)(0.4472)}$$

$$\boldsymbol{= 49.9999}$$

**3.** Para determinar el costo total se utiliza la Ec. 4.2.2.7, pero con la modificación de agregar el costo anual del inventario, lo que permitirá obtener el costo total del inventario. Esto se nota en la Ec. 4.2.2.12:

$$\boldsymbol{C_T = Costo\ anual + Costo\ de\ pedido + Costo\ de\ mantenimiento + Costo\ de\ agotam} \qquad \text{Ec. 4.2.3.27}$$

Se sabe que $C_u = 3.50$, $C_0 = \$5.00$, $C_n = \$2.00$, $C_S = \$0.50$ y $D = 2{,}500$ unidades. Entonces, se obtienen cada uno de los costos que involucran a la Ec. 4.2.2.12, y después se sustituyen en ésta para encontrar el valor de $C_T$.

- *Costo anual*. Se obtiene de multiplicar el valor de $C_u$ por la demanda anual de piezas. En este caso, se multiplicará el valor de \$3.50 por las 2,500 piezas que representan a la demanda anual, y resulta:

$$\boldsymbol{C_{Anual} = C_u x D = \$3.50x2,500 = \$8,750.00}$$

- *Costo de pedido.* Se obtiene con la Ec 4.2.3.2:

$$C_{Pedido} = C_0 x\left(\frac{D}{Q^*}\right) = \$5.00x\left(\frac{2,500}{249.9997}\right) = \$50.00$$

- *Costo de mantenimiento.* Se obtiene con la Ec. 4.2.3.9:

$$Costo\ de\ mantenimiento = \$2.00x\left(\frac{(49.99)^2}{(2)(2,500)}\right) = (\$2.00)(0.4998) = \$0.9$$

- *Costo de agotamiento.* Se obtiene con la Ec. 4.2.3.16:

$$Costo\ de\ agotamiento = C_s x\left(\frac{B^2}{2xQ}\right) = (\$0.50)x\left(\frac{(249.9997 - 49.99)^2}{(2)(249.9997)}\right) = \$40.$$

Finalmente, el costo total se conocerá sustituyendo los cuatro costos determinados en forma separada en la Ec. 4.2.3.27, y resulta:

$$C_T = \$8,750.00 + \$50.00 + \$0.9996 + \$40.00 = \$8,790.9996$$

**4.** Para determinar el número de pedidos por año, se utiliza la Ec. 4.2.3.24:

$$N^* = \sqrt{\frac{(2)(2,500)}{(2)(5)}}\,x\sqrt{\frac{0.50}{2.00 + 0.50}} = \sqrt{500}\,x\,\sqrt{0.20} = (22.3606)(0.4472)$$
$$= 9.9999$$

**5.** Para calcular el tiempo entre pedidos, se aplica la Ec. 4.2.3.25:

$$\boldsymbol{t_c}^* = \sqrt{\frac{(\mathbf{2})(\mathbf{5})}{(\mathbf{2})(\mathbf{2,500})}}\,\boldsymbol{x}\sqrt{\frac{\mathbf{2.00+0.50}}{\mathbf{0.50}}} = \sqrt{\mathbf{0.002}}\ \boldsymbol{x}\ \sqrt{\mathbf{5}} = (\mathbf{0.0447})(\mathbf{2.2360}) = \mathbf{0.0999}\ \boldsymbol{a\tilde{n}os}$$

$$= \mathbf{36.48}\ \boldsymbol{d\acute{\imath}as}$$

**6.** Para dar con el valor del costo total asociado con la política óptima de *Q**, se utilizará la Ec. 4.2.3.26, y resulta:

$$\boldsymbol{C_T}^* = \sqrt{(\mathbf{2})(\mathbf{5})(\mathbf{2})(\mathbf{2,500})}\,\boldsymbol{x}\sqrt{\frac{\mathbf{0.50}}{\mathbf{2.00+0.50}}} = \sqrt{\mathbf{50,000}}\ \boldsymbol{x}\ \sqrt{\mathbf{0.20}} = (\mathbf{223.60})(\mathbf{0.4472}) = \$\mathbf{99.9996}$$

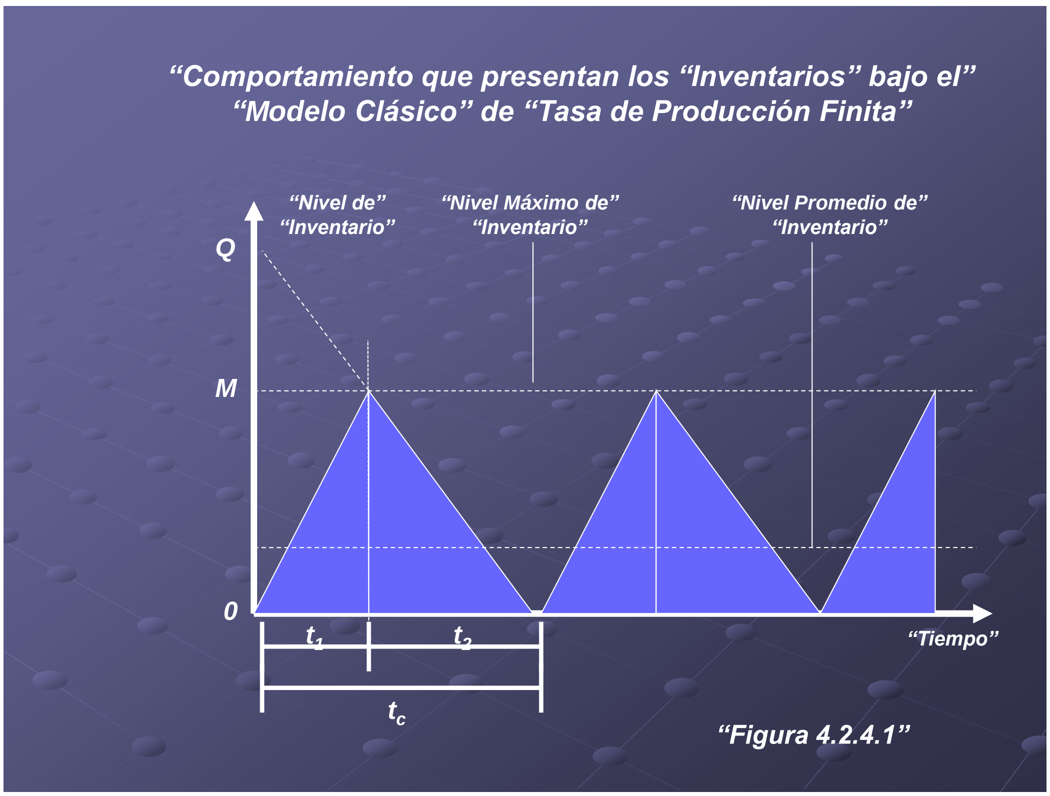
**7.** Se llega a las siguientes conclusiones:

- Al aplicar el modelo de inventarios para ventas perdidas, la empresa dedicada a la distribución de antenas universales para todo tipo de minicomponentes y componentes en electrónica y comunicaciones, para que no se encuentre en dificultades de colocar sus productos retrasados entre su clientela, deberá tener un *stock* en existencia con la cantidad óptima de pedido, que oscila en 249.9997 unidades, con un nivel máximo de inventario de 49.99 unidades.
- Esta cantidad óptima de pedido le genera un costo total de $8,790.9996, el cual le permitirá realizar 9.9999 pedidos anuales. Por consiguiente, estos pedidos tendrán un tiempo de 36.48 días entre cada uno de ellos.
- El costo total asociado con la política óptima de *Q** fue de $99.9996.

## 4.2.4. Caso con tasa de producción finita[21]

El caso con tasa de producción finita, conocido también como *modelo del tamaño del lote de producción*, a diferencia de los demás, considera que el reabastecimiento del inventario no es inmediato. Como es un modelo de producción, se comporta para situaciones fabriles, donde el reabastecimiento de los inventarios se realiza a través de una corrida de producción, que puede consumir un tiempo considerable hasta que se termine de hacer.

Para una mejor comprensión del planteamiento y solución de este caso, en la figura 4.2.4.1, se muestra en un diagrama cartesiano una representación esquemática del comportamiento de los inventarios en una operación productiva.



"Figura 4.2.4.1"

[21] *Ibíd.*, pp. 517-522.

En la figura 4.2.4.1, se visualiza que el comportamiento de los inventarios en una operación productiva se fundamenta en que la producción realizada pasa al inventario de productos terminados; por consiguiente, los bienes que se demandan se extraen de ahí. Asimismo, se distingue el caso de una operación de reabastecimiento del inventario a través de la producción con un tiempo de adelanto de cero, lo que quiere decir que no se permitirán, por ninguna circunstancia, los agotamientos.

El término *caso de tasa de producción finita* se emplea para realizar una descripción de este modelo básico, en donde la variable de decisión es $Q^*$, llamada *tamaño óptimo del lote de producción*.

Cuando se aplica a través del modelo clásico de cantidad económica de pedido, el caso de tasa de producción finita cumple con todas las consideraciones o propiedades básicas, excepto con la referente al reabastecimiento de los inventarios, el cual no se realizará en forma inmediata, sino por medio de una corrida de producción que se ejecutará de manera paulatina según las necesidades de la empresa. Lo que significa que el pedido total se recibirá en un determinado tiempo considerable hasta que éste se cumpla.

Para una mejor comprensión del caso, en primera instancia se planteará mediante un modelo matemático del modelo clásico. Después, se expondrá cómo se desarrolla la solución de este modelo matemático. Por último, se mostrará y solucionará un ejemplo en donde pueda visualizarse y entenderse el uso y aplicación de este modelo clásico a través de este caso.

**Planteamiento del modelo matemático del caso de tasa de producción finita**

Para obtener el comportamiento de la función costo total de los inventarios del caso de tasa de producción finita, será necesario definir sus parámetros y variables a través de la siguiente notación:

$C_0$ = Costo por pedido que se coloca
$C_c$ = Costo de mantenimiento por unidad y por periodo
$C_T$ = Costo total del inventario por periodo
Q = Cantidad económica de pedido o tamaño del pedido
D = Número de unidades que se piden por periodo

En el modelo clásico, la variable de decisión que nos dará la solución es la cantidad económica de pedido *(Q)*, cuyo objetivo es lograr la minimización del costo total de los inventarios.

Además, de la figura 4.2.4.1, se infiere que el tamaño óptimo del lote sería igual al valor de $Q^*$ para el modelo clásico; pero de la figura 4.2.4.1, se deduce que el nivel máximo de inventario que el caso de tasa de producción tiene es menor del valor de *Q*. De aquí que el inventario promedio sea menor al valor de $Q/2$, utilizado por el inventario promedio del modelo clásico.

Por consiguiente, dado que el inventario promedio del caso de tasa de producción finita es menor al del modelo clásico, los costos de mantenimiento también serán menores a los de mantenimiento, empleados en el modelo clásico. Mientras que los parámetros $C_T$, $C_0$ y $C_c$ son constantes que permiten determinar los costos total, de preparación y de mantenimiento para varios tamaños.

Un planteamiento general del modelo clásico es como se muestra en la Ec. 4.2.4.1, como sigue.

Minimizar:

$$\boldsymbol{Costo\ total\ del\ inventario} = \boldsymbol{Costo\ de\ preparaci}\acute{o}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{Costo\ de\ mantenim}$$ Ec. 4.2.4.1

En la Ec. 4.2.4.1, se puede observar que el costo de pedido es sustituido por uno denominado *costo de preparación*, que consta de los costos referentes a la mano de obra y a los materiales vinculados a la preparación de la maquinaria, la cual desarrollará una corrida de producción.

El costo de preparación *($C_0$)* para una corrida de producción es idéntico al costo de pedido utilizado en el modelo clásico. Entonces, para determinar el costo de preparación se utiliza la Ec. 4.2.4.2:

$$\boldsymbol{Costo\ de\ preparaci}\acute{o}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{C_0 x}\left(\frac{\boldsymbol{D}}{\boldsymbol{Q}}\right)$$ Ec. 4.2.4.2

Luego, el costo de mantenimiento será igual al de mantenimiento por unidad de periodo *($C_c$)*, el cual se multiplica por la cantidad promedio de unidades que se mantienen en el inventario. A esta cantidad promedio de unidades mantenidas en el inventario también se le denomina *inventario promedio*.

Para encontrar el inventario promedio por ciclo se partirá de la información que se presenta en la figura 4.2.4.1, y se calculará con la E. 4.2.4.3:

$$\boldsymbol{Inventario\ promedio} = \left(\frac{\acute{A}\boldsymbol{rea\ bajo\ una\ l}\acute{\imath}\boldsymbol{nea\ de\ demanda\ cuando\ existe\ el\ inven}}{\boldsymbol{Tiempo\ el\ cual\ existe\ el\ inventario}}\right.$$ Ec. 4.2.4.3

Ahora, de la figura 4.2.4.1, para determinar el área bajo la línea de demanda cuando existe el inventario, deberá obtenerse el valor de *M*, referido al nivel máximo de inventario.

Para determinar el valor de *M,* es necesario definir la tasa de producción o *reabastecimiento* y la tasa de demanda o *uso*, donde:

| | |
|---|---|
| $r_1$ = | Número de unidades por periodo resultantes del proceso de producción. Es decir, la tasa a la cual se colocan los productos en el inventario; y para su análisis se supone que permanece constante. |
| $r_2$ = | Número de unidades demandadas por periodo. |

Ahora, para que el modelo del caso de la tasa de producción finita sea factible, $r_1$ necesariamente deberá ser mayor a $r_2$. Si esta condición no se cumpliera, el área de producción no se encontraría en las condiciones de satisfacer la demanda requerida. Por consiguiente, después de que se ponga un pedido de producción, en forma instantánea, el nivel del inventario aumentará a una tasa constante igual a la diferencia de $r_1$ menos $r_2$, esto es, $(r_1 - r_2)$, hasta que termine el periodo $t_1$; por lo que en ese momento el nivel de inventario es igual a *M*. Luego, cuando transcurre el periodo $t_2$, el inventario se reducirá al valor de la tasa constante de demanda $r_2$.

Entonces, si $r_1$ es la tasa de producción, significa que la relación $Q/r_1$ será igual a $t_1$, que es el periodo en el cual se invierte al producir el pedido completo. Por tanto, el número de unidades que se demandarán durante el periodo $t_1$ será $(r_2 \times t_1)$. De estas relaciones, resulta que la demanda durante el periodo $t_1$ se determina mediante la Ec. 4.2.4.4 como sigue:

$$\textit{Demanda durante el período } t_1 = \left(\frac{Q}{r_1}\right) x r_2 \qquad \text{Ec. 4.2.4.4}$$

Por tanto, el valor de *M* se determinará mediante la Ec. 4.2.4.5:

$$\boldsymbol{M = Q - \left(\frac{Q}{r_1}\right) x r_2 = Q - Q\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad \text{Ec. 4.2.4.5}$$

Determinado el valor de *M*, se procede a determinar el valor del inventario promedio por ciclo a través de la Ec. 4.2.4.6.d:

$$\boldsymbol{Inventario\ promedio\ por\ ciclo = \left(\frac{(1/2)xMt_1 + (1/2)xMt_2}{(t_1 + t_2}\right)} \qquad \text{Ec. 4.2.4.6.a}$$

$$\boldsymbol{Inventario\ promedio\ por\ ciclo = \left(\frac{(1/2)[Q - Q(r_2/r_1)]t_1 + (1/2)[Q - Q(r_2/r_1}{(t_1 + t_2)}\right.} \qquad \text{Ec. 4.2.4.6.b}$$

$$\boldsymbol{Inventario\ promedio\ por\ ciclo = \left(\frac{(1/2)[Q - Q(r_2/r_1)](t_1 + t_2)}{(t_1 + t_2)}\right)} \qquad \text{Ec. 4.2.4.6.c}$$

$$\boldsymbol{Inventario\ promedio\ por\ ciclo = \left(\frac{Q}{2}\right)\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad \text{Ec. 4.2.4.6.d}$$

Luego, el valor del costo de mantenimiento se obtendrá mediante la Ec. 4.2.4.7:

$$\boldsymbol{Costo\ de\ mantenimiento = \left(\frac{Q}{2}\right) x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) x C_c} \qquad \text{Ec. 4.2.4.7}$$

Finalmente; el planteamiento del problema de la Ec. 4.2.5.1 queda modificado y expresado a través de la Ec. 4.2.4.8 así:

Minimizar:

$$C_T = C_0 x \left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x \left(\frac{Q}{2}\right) x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.4.8}$$

**Solución al planteamiento del modelo matemático del modelo clásico**

Para resolver el modelo matemático expresado a través de la Ec. 4.2.4.8, en la figura 4.2.4.1 se puede observar que existen dos factores de costo relacionados en la función del costo total *($C_T$)*. Por tanto, éstos permiten determinar el tamaño del lote *($Q^*$)*, que cumple con el objetivo de minimizar $C_T$.

Entonces, utilizando las herramientas de la derivada del cálculo diferencial, se puede decir que para obtener el valor mínimo de una función se procederá a encontrar la derivada de la función costo total, o sea, la derivada de la Ec. 4.2.4.8, e igualando el resultado de la derivada a cero. De este modo, el valor de $Q^*$ quedará expresado como se indica en la Ec. 4.2.4.9.g.

Derivando $C_T$ con respecto a $Q$, resulta:

$$\frac{dC_T}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left\{\frac{C_0}{1} x \left(\frac{D}{Q}\right) + C_c x \left(\frac{Q}{2}\right) x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)\right\} \qquad \text{Ec. 4.2.4.9.a}$$

$$\frac{dC_T}{dQ} = \frac{-C_0 D}{Q^2} + \left(\frac{C_c}{2}\right) x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.4.9.b}$$

Después, se iguala a cero la Ec. 4.2.4.8.b debido a que el valor de la pendiente de la función $C_T$ es de cero en el punto mínimo; y resulta:

$$0 = \frac{-C_0 D}{Q^2} + \left(\frac{C_c}{2}\right) x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.4.9.c}$$

Finalmente, se procede a despejar el valor de *(Q*)*:

$$\frac{C_0 D}{Q^2} = \left(\frac{C_c}{2}\right) x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.4.9.d}$$

$$\frac{2C_0 D}{C_c} = Q^2 x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) \qquad \text{Ec. 4.2.4.9.e}$$

$$\frac{2C_0 D}{C_c x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)} = Q^2 \qquad \text{Ec. 4.2.4.9.f}$$

Resulta:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_c x \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)}} \qquad \text{Ec. 4.2.4.9.g}$$

El resultado de la Ec. 4.2.4.9.g permite obtener el valor de Q*, donde se sabe que *(Q*)* es el tamaño del lote.

Ahora, los administradores normalmente también buscan determinar el número de pedidos por periodo. Y este valor debe estar sujeto a una política óptima y al tiempo que transcurre entre dos periodos sucesivos. De igual manera, se determinará el costo total en el cual se incurre al usar la política óptima de pedidos. Estos valores se obtienen de la siguiente forma.

**a)** *Número óptimo de pedidos por periodo (N*).* Tomando como referencia el tamaño del lote, se obtiene de dividir el valor de la demanda *(D)* entre el valor del tamaño del lote *(Q*)*. Este valor de N* se conoce a partir de la Ec. 4.2.4.10, así:

$$N^* = \sqrt{\frac{DC_c x\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)}{2C_0}}$$ Ec. 4.2.4.10

**b)** *Tiempo que transcurre entre dos periodos sucesivos o ciclo del inventario ($t_c$).* Se refiere al inverso del número óptimo de pedidos (N*), por lo que el valor de N* se obtiene de la Ec. 4.2.4.11 como sigue:

$$t_c = \sqrt{\frac{2C_0}{DC_c x\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)}}$$ Ec. 4.2.4.11

**c)** *Costo asociado con la política óptima de pedidos.* Se obtiene sustituyendo el valor de *Q** en la *Ec. 4.2.4.8*. Y el valor de *(Q*)* se conoce a partir de la Ec. 4.2.4.12.c:

$$C_T = C_0 x\left(\frac{D}{Q^*}\right) + C_c x\left(\frac{Q^*}{2}\right) x\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)$$ Ec. 4.2.4.12.a

Donde:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_c x\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)}}$$ Ec. 4.2.4.9.g

Sustituyendo la Ec. 4.2.4.9.g en la Ec. 4.2.4.12.a, se tiene lo siguiente:

$$C^*{}_T = C_0 x\left(\frac{D}{\sqrt{\frac{2C_0 D}{Ccx\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)}}}\right) + C_c x\left(\frac{\sqrt{\frac{2C_0 D}{Ccx\left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right)}}}{2}\right)$$ Ec. 4.2.2.12.b

Y resulta:

$$C_T = \sqrt{2C_0C_cD\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad \text{Ec. 4.2.4.12.c}$$

En conclusión, con las ecuaciones que se desarrollaron a lo largo del caso de la tasa de producción finita, se solucionan distintos problemas prácticos que cumplan con sus propiedades o condiciones.

Para que el alumno comprenda cómo se utilizan estas ecuaciones, se muestra un caso en el ejemplo 4.2.4.1.

**Ejemplo 4.2.5.1**

Una empresa se dedica a la producción de antenas universales que se utilizan en distintos tipos de minicomponentes y componentes de electrónica y comunicaciones, cuya demanda es de 2,500 piezas anuales. El costo de preparación por corrida es de $5.00; y el de almacenamiento por unidad por año, de $2.00. Una vez que la máquina está operando, hace estas antenas a razón de 4,000 piezas anuales. La empresa opera al menos 300 días hábiles al año.

De acuerdo con la información anterior, se pide determinar:

1. Valor del tamaño del lote
2. Valor del costo total si el costo por unidad es de $3.50
3. Número de pedidos por año
4. Tiempo entre pedidos
5. Costo total asociado con la política óptima de *Q**
6. Conclusiones

Solución

Para obtener la solución completa del ejemplo 4.2.4.1, se darán los siguientes pasos:

1. Para obtener el valor del tamaño del lote *(Q*)*, se aplicará la Ec. 4.2.4.9.g, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{Q^* = \sqrt{\frac{2C_0D}{C_c x\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)}}} \qquad \text{Ec. 4.2.4.9.g}$$

Se sabe que $C_0 = \$5.00$, $C_n = \$2.00$, $r_2 = D = 2{,}500$ *unidades* y $r_1 = 4{,}000$ *unidades.* Entonces, sustituyendo estos valores en la Ec. 4.2.4.9.g *se* encuentra el valor de $Q^*$:

$$\boldsymbol{Q^* = \sqrt{\frac{2x5x2{,}500}{5x\left(1-\frac{2{,}500}{4{,}000}\right)}} = \sqrt{\frac{25{,}000}{1.875}} = \sqrt{13{,}333.3333} = 115.4700}$$

2. Para determinar el costo total, se utilizará la Ec. 4.2.4.8, pero con la modificación de agregar el costo anual del inventario, lo que permitirá obtener el costo total del inventario. Esto se advierte en la Ec. 4.2.4.13:

$$\boldsymbol{C_T = Costo\ anual + Costo\ de\ preparación + Costo\ de\ mantenimiento} \qquad \text{Ec. 4.2.4.13}$$

Se sabe que $C_u = 3.50$, $C_0 = \$5.00$, $C_n = \$2.00$, $r_1 = D = 2{,}500$ *unidades* y $r_2 = 4{,}000$ *unidades.* Luego se obtienen cada uno de los costos que involucran a la Ec. 4.2.4.13 y se sustituyen en ésta para dar con el valor de $C_T$. Se llega a lo siguiente.

- *Costo anual.* Se obtiene de multiplicar el valor de $C_u$ por la demanda anual de piezas. En este caso, se multiplica el valor de \$3.50 por las 2,500 piezas que representan a la demanda anual; y resulta:

$$C_{Anual} = C_u x D = \$3.50x2,500 = \$8,750.00$$

- *Costo de preparación.* Se obtiene con la Ec 4.2.4.2; y resulta:

$$C_{Preparación} = C_0 x \left(\frac{D}{Q^*}\right) = \$5.00x\left(\frac{2,500}{115.4700}\right) = \$108,2532$$

- *Costo de mantenimiento.* Se encuentra aplicando la Ec. 4.2.4.7:

$$Costo\ de\ mantenimiento = \left(\frac{Q^*}{2}\right)x\left(1-\frac{r_2}{r_1}\right)xC_c = \left(\frac{115.4700}{2}\right)x\left(1-\frac{2,500}{4,000}\right)x2$$
$$= \$43.3012$$

Finalmente, el costo total se conocerá al sustituir los tres costos determinados en forma separada en la Ec. 4.2.2.13; y se tiene:

$$C_T = \$8,750.00 + \$108.2532 + \$43.3012$$
$$= \$8,901.5544$$

**3.** *Número de pedidos por año*. En este caso, se utiliza la Ec. 4.2.2.10 de la siguiente forma:

$$N^{*} = \sqrt{\frac{DC_{c}x\left(1-\frac{r_{2}}{r_{1}}\right)}{2C_{0}}} = \sqrt{\frac{2,500x2x\left(1-\frac{2,500}{4,000}\right)}{2x5}} = \sqrt{\frac{1,875}{10}} = \sqrt{187.50}$$

$$= 13.6930 \ Pedidos \ por \ año$$

**4.** Tiempo entre pedidos. Para calcularlo, se aplica la Ec. 4.2.2.11:

$$t_{c} = \sqrt{\frac{2C_{0}}{DC_{c}x\left(1-\frac{r_{2}}{r_{1}}\right)}} = \sqrt{\frac{2x5}{2,500x2x\left(1-\frac{2,500}{4,000}\right)}} = \sqrt{\frac{10}{1,875}} = \sqrt{0.005333} = 0.0730 \ Año$$

$$En \ días: \qquad t_{c} = 26.64 \ días$$

**5.** *Valor del costo total asociado con la política óptima de Q**. Se utiliza la Ec. 4.2.2.12.c:

$$C_{T} = \sqrt{2C_{0}C_{c}D\left(1-\frac{r_{2}}{r_{1}}\right)} = \sqrt{2x5x2x2,500x\left(1-\frac{2,500}{4,000}\right)} = \sqrt{18,750} = \$139.9306$$

**6.** Finalmente, se llega a las siguientes conclusiones:

- Para que no se encuentre en dificultades de colocar sus productos entre su clientela, la empresa dedicada a la producción de antenas universales para todo tipo de minicomponentes y componentes en electrónica y en comunicaciones, deberá tener un *stock* en existencia de un tamaño de lote que oscila en 115.4700 unidades.
- Esta cantidad óptima de pedido le genera un costo total de $8,901.5544, que le permitirá realizar al menos 13.6930 pedidos anuales. Por consiguiente, estos pedidos tendrán un tiempo de 26.64 días entre cada uno de ellos.

- El costo total asociado con la política óptima de $Q^*$ es de $ 136.9306.

## 4.2.5. Caso con descuentos por cantidad[22]

El caso descuentos por cantidad aplicado con respecto al modelo clásico de la cantidad económica de pedido toma como referencia fundamental la cantidad económica de pedido, o sea, la cantidad económica óptima que deberán solicitarle al proveedor en cada uno de los pedidos que le sean requeridos, a fin de llegar al objetivo: minimización de los costos asociados a los costos de pedidos y a los de mantenimiento del total de las unidades que conformarán el inventario.

Este caso tiene también como objetivo central determinar la cantidad óptima de pedido mediante la reducción de costos. Y para lograrlo, será necesario contestar las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto se deberá pedir para conformar el inventario?
- ¿Cuándo se deberá realizar el pedido que conformará el inventario?

Para resolver este caso, se utiliza la *reducción de costos*, a través de la aplicación del modelo clásico de la cantidad económica de pedido.

No resulta extraño que también en el ámbito cotidiano los proveedores de las empresas otorgan descuentos en el valor de los costos si los pedidos son muy voluminosos, y si sus *stocks* se lo permiten, para bajar más aún el costo total.

Cuando se aplica a través del modelo clásico de cantidad económica de pedido, el caso de los descuentos por cantidad cumple con todas las consideraciones o

[22] *Ibíd.*, pp. 507-510.

propiedades básicas. Por consiguiente, recurre a las mismas ecuaciones del caso por faltantes, pues ambos se derivan como parte fundamental de la aplicación del modelo clásico de cantidad económica de pedido.

La diferencia entre el caso con faltantes y el de descuentos por cantidad reside en los descuentos; en el segundo, sí existen, y en el primero no.

El ejemplo 4.2.5.1 permitirá al estudiante entender mejor cómo se aplica y resuelve este caso utilizando el modelo clásico de la cantidad económica de pedido.

**Ejemplo 4.2.5.1**

Una empresa se dedica a la distribución de antenas universales que se utilizan en forma general en distintos tipos de minicomponentes y componentes de electrónica y comunicaciones, cuya demanda es de 2,500 piezas anuales. El costo de pedido por unidad es de $5.00; y de almacenamiento por unidad, de $2.00. Además, el proveedor le ofrece a la empresa las siguientes opciones de descuento:

- **a.** Cuando el pedido del inventario está entre 0 y 100 unidades, 0 %.
- **b.** Cuando el pedido del inventario está entre 100 y 120 unidades, 5%.
- **c.** Cuando el pedido del inventario está entre 120 y 150 unidades, 10%.

Con base en la información anterior, se pide determinar lo siguiente:

1. Valor de cantidad óptima de pedido
2. ¿Qué cantidad deberá ordenar, tomando en cuenta lo que el proveedor le ofrece? ¿Por qué?
3. Número de pedidos por año
4. Tiempo entre pedidos

5. Conclusiones

**Solución**

Para obtener la solución completa se darán los siguientes pasos.

1. Para encontrar el valor de la cantidad óptima de pedido, se aplicará la Ec. 4.2.2.8.g:

$$\boldsymbol{Q^* = \sqrt{\frac{2C_0D}{Cc}}} \qquad \text{Ec. 4.2.2.8.g}$$

Se sabe que $C_0$ = *\$5.00,* $C_n$ = *\$2.00* y *D = 2,500 unidades,* entonces, sustituyendo estos *valores* en la *Ec. 4.2.2.8.g* se conoce el valor de *Q**:

$$\boldsymbol{Q^* = \sqrt{\frac{2(2500)(5)}{2}} = \sqrt{\frac{25000}{2}} = \sqrt{12500} = 111.8033\ Unidades\ por\ pedido}$$

2. Se procede a encontrar el costo total más bajo de acuerdo con la política óptima del proveedor, el cual se obtendrá para cada una de las tres opciones que el proveedor le está ofreciendo a la empresa. De esta forma, la opción *b* resultó ser la más viable, pues la cantidad óptima de pedido se halla entre 100 unidades y 120 unidades. Luego, para determinar el valor del costo total más bajo se aplicará la Ec. 4.2.2.12:

$$\boldsymbol{C_T = Costo\ anual + Costo\ de\ pedido + Costo\ de\ mantenimiento} \qquad \text{Ec. 4.2.2.12}$$

Se sabe que $C_0$ = *\$5.00*, $C_n$ = *\$2.00* y *D = 2,500 unidades.* Se sustituyen estos valores en la Ec. 4.2.2.12; pero en primera instancia se procede a calcular cada uno de los costos que conforman la ecuación, para luego dar con el valor de $C_T$. Se tiene lo siguiente.

- *Costo unitario de descuento.* Como se escogió la opción *b*, ésta indica que el proveedor realizará un descuento del 5%. Por ello, el costo unitario de pedido descontado *($C_{0d}$)*, considerando la cantidad óptima de pedido de 111.8033 unidades es igual a:

$$C_{0d} = C_0 - (C_0 x F D) = \$5.00 - (\$5.00x0.05) = \$4.75$$

- *Costo anual.* Se obtiene de multiplicar el valor de $C_{0d}$ por la demanda anual de piezas. En este caso, se multiplica el valor de \$4.75 por las 2,500 piezas que representan la demanda anual, y resulta:

$$C_{Anual} = C_{0d} x D = \$4.75x2,500 = \$11,875.00$$

- *Costo de pedido.* Se encuentra con la Ec. 4.2.2.2:

$$C_{Pedido} = C_{0d}\left(\frac{D}{Q^*}\right) = \$4.75x\left(\frac{2,500}{111.8033}\right) = \$106.2133$$

Téngase en cuenta que la opción *b* presenta un límite superior de 120 unidades; entonces, el costo de pedido bajaría:

$$C_{Pedido} = C_{0d}\left(\frac{D}{Q^*}\right) = \$4.75x\left(\frac{2,500}{120}\right) = \$98.9583$$

Como se puede notar, la opción *b* permite aumentar el valor del tamaño de la cantidad óptima de pedido debido a que es el intervalo que el proveedor está manejando con el descuento del 5%. Lo que implica que en el costo de pedido le permitirá ahorrarse a la empresa $7.2549 pesos y aumentar su cantidad óptima de pedido en 8.1967 unidades.

- *Costo de mantenimiento*. Se encuentra al aplicar la Ec. 4.2.2.6:

$$C_{Mantenimiento} = C_{0d}\left(\frac{Q^*}{2}\right) = \$4.75x\left(\frac{111.8033}{2}\right) = \$265.5328$$

Téngase en cuenta que la opción *b* posee un límite superior de 120 unidades, por lo que el costo de mantenimiento subiría:

$$C_{Mantenimiento} = C_{0d}x\left(\frac{Q^*}{2}\right) = \$4.75x\left(\frac{120}{2}\right) = \$285.00$$

Como se advierte, la opción *b* le permite a la empresa aumentar el valor del tamaño de la cantidad óptima de pedido debido a que es el intervalo que su proveedor le está manejando con el descuento del 5%. Lo que implica ahora que en el costo de mantenimiento le obligará a pagar $19.4672 pesos y aumentar su cantidad óptima de pedido en 8.1967 unidades.

Finalmente, de acuerdo con la política óptima de pedidos del proveedor, el costo total más bajo se obtendrá al sustituir los tres costos determinados en forma separada en la Ec. 4.2.2.12; y resulta:

$$C_T = \$11,875.00 + \$98.95.83 + \$285.00 = \$12,258.9583$$

**3.** Se procede a determinar el número de pedidos por año, aplicando la Ec. 4.2.2.9, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{N = \frac{D}{Q^*} = \frac{2500}{111.8033} = 22.3606\ Pedidos\ al\ año}$$

A través de la opción *b*, el proveedor le ofreció a la empresa un descuento del 5%, lo que le permite modificar el número de pedidos. Y resulta:

$$\boldsymbol{N = \frac{D}{Q^*} = \frac{2500}{120} = 20.8333\ Pedidos\ al\ año}$$

Lo anterior le da una ventaja a la empresa, ya que realiza al año 1.5272 pedidos menos de los que haría cuando *Q** fuese igual a 111.8033 unidades; esto implica que el costo mínimo asociado bajará más, pues se hacen menos pedidos.

**4.** Finalmente, se calcula el tiempo entre pedidos, aplicando la Ec. 4.2.2.10:

$$\boldsymbol{t_c = \frac{Q^*}{D} = \frac{111.8033}{2500} = 0.0447\ años = 16.3232\ días}$$

Recuérdese también que el proveedor le ofreció a la empresa, a través de la opción *b*, un descuento del 5%, que le permite modificar el tiempo entre pedidos; y se tiene entonces:

$$\boldsymbol{t_c = \frac{Q^*}{D} = \frac{120}{2500} = 0.048\ años = 17.52\ días}$$

Lo anterior le da una ventaja a la empresa, ya que el tiempo entre pedidos le aumenta 1.20 días de los que tendría que hacer cuando *Q** fuese igual a

111.8033 unidades; esto implica que el costo mínimo asociado baje más, pues el tiempo entre pedidos resulta mayor para su beneficio entre los pedidos que realice la empresa.

**5.** Del ejemplo analizado, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- Si no se hubiera determinado la cantidad mínima económica de pedido o lote económico, de las tres opciones que el proveedor le ofrece a la empresa la *c* resultaría la mejor, pues ofrece un descuento del 10%.
- Pero como en el ejemplo se tuvo que determinar por necesidad el valor de la cantidad económica de pedido, la alternativa que cubre en forma satisfactoria las necesidades de la empresa con base en la información proporcionada es *b*, dado que su costo total asociado sí baja si se toma como referencia la opción *a*.
- Dentro del costo total asociado obtenido se puede notar que el costo anual baja, así como el costo de pedido; el que sube, por obvia razón, es el de mantenimiento.
- Con respecto al número de pedidos, la empresa realiza menos de los que esperaba, dadas las facilidades que el proveedor le otorgó. En consecuencia, su tiempo entre pedidos aumenta, lo que la beneficia aún más, y por consiguiente se ve reflejado en el costo total asociado obtenido.
- Estas condiciones sólo se darán siempre y cuando la capacidad de almacenaje de la empresa le permita disponer de espacio para una adición de producto mínima, la cual se presenta por las facilidades que el proveedor le da a la empresa con los descuentos por unidad.

Para ampliar lo visto en esta unidad, se sugiere revisar el Anexo 4.

# RESUMEN

Los inventarios son los recursos que posee una empresa según su giro y sector económico, que son utilizables y se encuentran almacenados en algún punto determinado del tiempo.

El manejo eficiente de inventarios implica una serie de funciones: desglose, tipo de inventario por manufactura y tipo de inventario por ventas al detalle. Para que los analistas lleven a cabo estas acciones, es necesario que conozcan las características del problema, a fin de poder seleccionar el modelo acorde con esas cualidades. Entre las características representativas de los diferentes modelos de inventario, se tienen las siguientes: modelos comerciales comparados con modelos de producción, demanda, tiempo de adelanto, políticas de pedidos, agotamientos, estructura de los sistemas y horizonte de tiempo del modelo.

Los criterios de los costos también tienen una gran importancia cuando se analizan los inventarios, ya que para realizar dicho estudio, es necesario considerar una serie de variables como el rendimiento sobre la inversión, rotación de activos y ciclo de vida del producto, entre otras. Todas estas variables siempre se examinan de manera contable y financiera en forma continua, es decir, considerando intervalos de tiempo continuos. Por ello, el análisis de los inventarios tendría que echar mano de modelos más complejos.

Por tanto, la mayoría de los modelos de inventarios que existen en la investigación de operaciones se fundamentan en las compensaciones de los costos, como criterio básico de su análisis. Hay cuatro variables de costos: de pedido o preparación, de mantenimiento o conservación, de agotamiento o falta de existencias y de adquisición o producción.

En cuanto al modelo de lote clásico, también conocido como *modelo clásico de la cantidad económica de pedido* (CEP), se fundamenta en suponer que está especificado al establecimiento de una función denominada *función comercial*. Ésta analiza el ámbito exterior de una compañía, en donde se consideran dos variables importantes a seguir: compras y ventas.

Se analizaron cuatro casos básicos de modelos de inventarios que se apoyan en el modelo CEP: por faltantes, ventas pérdidas, con tasa de producción finita y de descuentos por cantidad.

El caso con faltantes es la aplicación más general que utiliza el modelo clásico de cantidad económica de pedido, pues cubre en forma periódica los faltantes que tenga el *stock* de la empresa, a fin de que no sufra al momento de estar entregando los diferentes pedidos que hagan sus clientes.

El caso con ventas perdidas es una aplicación del modelo clásico de cantidad económica de pedido. Se distingue por cumplir con todas las condiciones o propiedades básicas, excepto la referente a los agotamientos. Por esta razón, este caso también es denominado *modelo clásico de cantidad económica de pedido con agotamientos*: no se permiten los pedidos retroactivos.

El caso con tasa de producción finita o *modelo del tamaño del lote de producción*, a diferencia de los demás modelos, considera que el reabastecimiento del inventario no es inmediato. Y como es un modelo de producción, es para situaciones de tipo fabril, donde el reabastecimiento de los inventarios se realiza a través de una corrida de producción, que puede consumir un tiempo considerable hasta que se termine de hacer.

Por último, el caso descuentos por cantidad aplicado con respecto al modelo clásico de la cantidad económica de pedido toma como referencia fundamental la cantidad económica de pedido, o sea, la cantidad económica óptima que deberán solicitarle al proveedor en cada uno de los pedidos que le sean requeridos, a fin de llegar a la minimización de los costos asociados a los costos de pedidos y a los de mantenimiento del total de las unidades que conformarán el inventario.

# BIBLIOGRAFÍA

## SUGERIDA

| # | Autor | Capítulo | Páginas |
|---|---|---|---|
| 1 | Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G. | 11. Modelos de inventarios. | 481-528 |
| **2** | Camacho Quiroz, Arturo | 11. Modelos de inventarios. | 223-234 |

## Bibliografía básica


1. Anderson R. David, Sweeney J. Dennis y Williams A. Thomas, *Métodos cuantitativos para los negocios*, 9.ª ed., México: Thompson, 2004, 822 pp.
2. Camacho Quiroz, Arturo, *Principios de investigación de operaciones para contaduría y administración*, México: Grupo ECAFSA, 1997, 304 pp.
3. Eppen, G. D. *et al., Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*, 5.ª ed., México: Prentice Hall, 2000, 755 pp.
4. Hiller F. y Lieberman G. J., *Introducción a la investigación de operaciones*, México: McGraw-Hill, 2002, 855 pp.

5. Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G., *Modelos cuantitativos para administración*, 2.ª ed., México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994, 757 pp.
6. Taha A. Hamndy, *Investigación de operaciones,* 5.ª ed., México: Alfa Omega, 2000, 960 pp.
7. Wayne L. Winston, *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos,* México: Thompson, 2005, 1418 pp.

## Bibliografía complementaria

1. Bueno A. G. de. *Introducción a la programación lineal y al análisis de sensibilidad*, México: Trillas 1990, 1889 pp.
2. Daellenback H., George J. y D. Menickle, *Introducción a técnicas de investigación de operaciones,* México: CECSA, 1986, 771 pp.

## Sitios de internet

| Sitio | Descripción |
|---|---|
| http://www.material_logistica.ucv.cl. | Modelos de inventarios. |
| http://www.slideshare.net/Famp/modelodeinventarios. | Modelos de inventarios. |

# UNIDAD 5

# Líneas de espera

# OBJETIVO PARTICULAR

El alumno aplicará los modelos para la solución de problemas de líneas de espera.

# TEMARIO DETALLADO

## (12 horas)

**5. Línea de espera**

| |
|---|
| 5.1. Terminología |
| 5.2. Estructura básica de una línea de espera |
| 5.3. Modelos de una cola con un servidor |
| 5.4. Modelos de una cola con servidores múltiples en paralelo |
| 5.5. Modelos de una cola con servidores múltiples en serie |
| 5.6. Comportamiento prioritario de una línea de espera |

# INTRODUCCIÓN

Fundamentales en los métodos cuantitativos, las teorías de las líneas de espera ayudan a las organizaciones en el análisis y solución de distintos procesos industriales y de servicios. Además, en la mayor parte de las empresas hay procesos industriales y de servicios que generan líneas de espera, conocidas como *colas*.

La teoría de líneas de espera referente a los procesos industriales en las organizaciones tuvo su primera aplicación cuando el ingeniero danés A. Erlang, dedicado en su campo profesional a la industria telefónica, diseñó y desarrolló el primer trabajo de investigación a partir de estas teorías, en la realización de diversos experimentos que involucraban la demanda fluctuante de instalaciones telefónicas y los efectos de éstas sobre el equipo automático. Pero el verdadero apogeo de la teoría de las líneas de espera se da durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se aprovechó en la resolución de distintos problemas para una correcta toma de decisiones.

Hoy día, existen muchas aplicaciones industriales y de servicios en las que se aplica de manera recurrente la teoría de las líneas de espera, donde el costo de tiempo perdido por el personal en la línea de espera y el costo de instalaciones adicionales se determinan con precisión.

Así, muchas aplicaciones de este tipo pueden llegar a una solución, de tal forma que ésta proporcione el costo total más bajo del tiempo perdido de las personas que esperan el servicio, más los sueldos de quienes lo proporcionan.

Por otra parte, las líneas de espera también ha sido un tema fundamental en el crecimiento de la investigación de operaciones, pues representan una parte estructural en el funcionamiento, operación y desarrollo de las mismas.

El objetivo de las líneas de espera es ahorrar recursos monetarios a las empresas en donde se minimice al máximo la pérdida de tiempos por los operarios que trabajan en sus procesos, de manera que también logren obtener una maximización de sus utilidades.

En este marco, esta unidad se expone de forma sistemática. Se muestran los conceptos fundamentales referentes al uso de la terminología de las líneas de espera. De igual manera, se plantean los diferentes modelos a fin de identificarlos y aplicarlos en distintas facetas del campo profesional.

# 5.1. Terminología[23]

Para tener una idea precisa sobre los problemas de líneas de espera, se empezará por definir y explicar cada uno de los términos básicos, importantes porque se aplican de forma cotidiana en diversos procesos que las organizaciones poseen para su crecimiento.

Ejemplos de procesos que originan líneas de espera o colas:

- Llamadas telefónicas que entran en un instante determinado al conmutador de una institución de servicios financieros.
- Servicios de gasolinera.
- Cobros de los cajeros que realizan a las personas consumidoras cuando se encuentran formadas en una uni-fila de una tienda de autoservicio.
- Tiempos muertos generados cuando una línea de producción debe producir más de dos productos con características afines en parte de su proceso de fabricación.

Los problemas de líneas de espera tienen como propósito ajustar de forma apropiada la tasa de servicio de proceso con la tasa de llegadas de trabajos para hacer.

A continuación, se enumeran los términos utilizados comúnmente en este campo.

[23] Conceptos consultados y adaptados de Arturo Camacho Quiroz, *op. cit.*, pp. 246-248.

| *Cliente* | *Línea de espera*. Se conoce también como *cola* |
|---|---|
| • Una unidad que viene requiriendo la realización de algún servicio. Pueden ser personas, máquinas, partes, etcétera. | • Consiste en el número de clientes que esperan ser atendidos, sin incluir al que está siendo atendido en ese momento. |

| *Canal de servicio*. Se conoce como *estación de servicio* | *Tasa de llegada*. |
|---|---|
| • Consiste en el proceso o sistema que está efectuando el servicio para el cliente, el cual puede ser de un canal o multicanal.<br>El canal de servicio se asigna a través del símbolo “k”, que indicará siempre el número de canales de servicio que en un instante determinado estén proporcionando el servicio. | • Cantidad de clientes por unidad de tiempo que llegan para ser atendidos en un servicio.<br>Como suposición básica se utilizará el sentido de afirmar que la tasa de llegada estará distribuida en forma aleatoria, mediante una distribución de Poisson, cuyo valor medio lo representa la razón promedio *l*. |

| *Tasa de servicio*. | *Prioridad*. |
|---|---|
| • Cantidad de clientes por unidad de tiempo a la cual un canal de servicio puede proporcionar el servicio requerido por su cliente.<br>Se puede notar que ésta será la tasa que podría alcanzar siempre y cuando el canal de servicio esté ocupado.<br>Así como ocurre con la tasa de llegada, la de servicio supone que se encuentra distribuida en forma aleatoria, según el modelo de Poisson; y el valor medio de servicio se representa mediante el símbolo *m*. | • Método que consiste en establecer la decisión de quién será el próximo cliente en ser atendido en un instante determinado. Esta determinación se define mediante la siguiente suposición: el primero que llega es el primero en ser atendido. |

| *Tamaño de la población*. | *Distribución de las tasas de llegada*. |
| --- | --- |
| • Es el tamaño del grupo que proporciona los clientes. Cuando hay pocos clientes potenciales, se dice que la población es de carácter finito. Y si hay una gran cantidad de clientes potenciales, entre 40 y 60, por ejemplo, se habla de una población infinita. | • Este concepto se fundamenta en el servicio, el cual se basa en el supuesto de un modelo de Poisson. Por consiguiente, esta suposición requiere que los eventos de servicio o llegada sean completamente independientes. |
| *Número esperado de cola*. | *Número esperado en el sistema*. |
| • Se refiere al número estimado de clientes que esperan ser atendidos. Se representa con el símbolo *Lq*. | • Cantidad estimada de clientes que se encuentran ya sea esperando en la línea y/o siendo atendidos. Se representa con *L*. |
| *Tiempo esperado en la cola*. | *Tiempo esperado en el sistema.* |
| • Se refiere al tiempo estimado que emplea un cliente esperando en la línea. Se representa como *Wq*. | • Tiempo estimado que emplea un cliente esperando más el que invierte siendo atendido. Se representa con *W*. |

Para determinarlo, se utiliza la Ec. 5.1 de la siguiente forma:

$$W = Wq + \frac{1}{\mu} \qquad \text{Ec. 5.1}$$

Donde: W = Tiempo esperado en el sistema

Wq = Tiempo esperado en la cola

$\mu$ = Tasa de servicio

| | | |
|---|---|---|
| *A. Número esperado en una cola no vacía.* | Número promedio o estimado de clientes que esperan en la línea, excluyendo aquellos tiempos en los cuales la línea permanece vacía. Supóngase que se recogen muestras en forma aleatoria contando el número de clientes en la línea y se promedian sólo aquellos valores diferentes de cero. Lo que significa que este número deberá ser equivalente al esperado en el sistema (L). | Se representa con el símbolo *Ln*. |
| *B. Tiempo estimado de espera en una cola no vacía.* | Tiempo estimado que un cliente espera en una línea en el caso de que éste se decida esperar.<br>Por consiguiente, este valor se refiere al "promedio" de todos los tiempos de espera de todos los clientes que entran a la cola cuando el canal de servicio está ocupado. | Se representa con el símbolo *Wn*. |

# 5.2. Estructura básica de una línea de espera[24]

Cuando en la investigación de operaciones se trata de analizar lo referente a la estructura básica de una línea de espera, ésta suele fundamentarse en el concepto de *distribución física del sistema de líneas en espera*, basado en el establecimiento del canal y de la fase del sistema, de aquí su relevancia. Esta estructura básica puede tener una serie de modificaciones sin alterar sus dos elementos importantes: canal y fase. Desde este criterio, se analizará el siguiente ejemplo.

**Ejemplo**

Supóngase que en una sucursal Bancomer que tiene un horario de 8:30 h a 16:00 h, de lunes a viernes, se escoge un día para realizar un estudio de líneas de espera con respecto al servicio de sus cajeros.

En primera instancia, el sistema de servicio que el banco ofrece a sus clientes se clasifica en tres diferentes líneas de servicio:

[24] *Íd.*

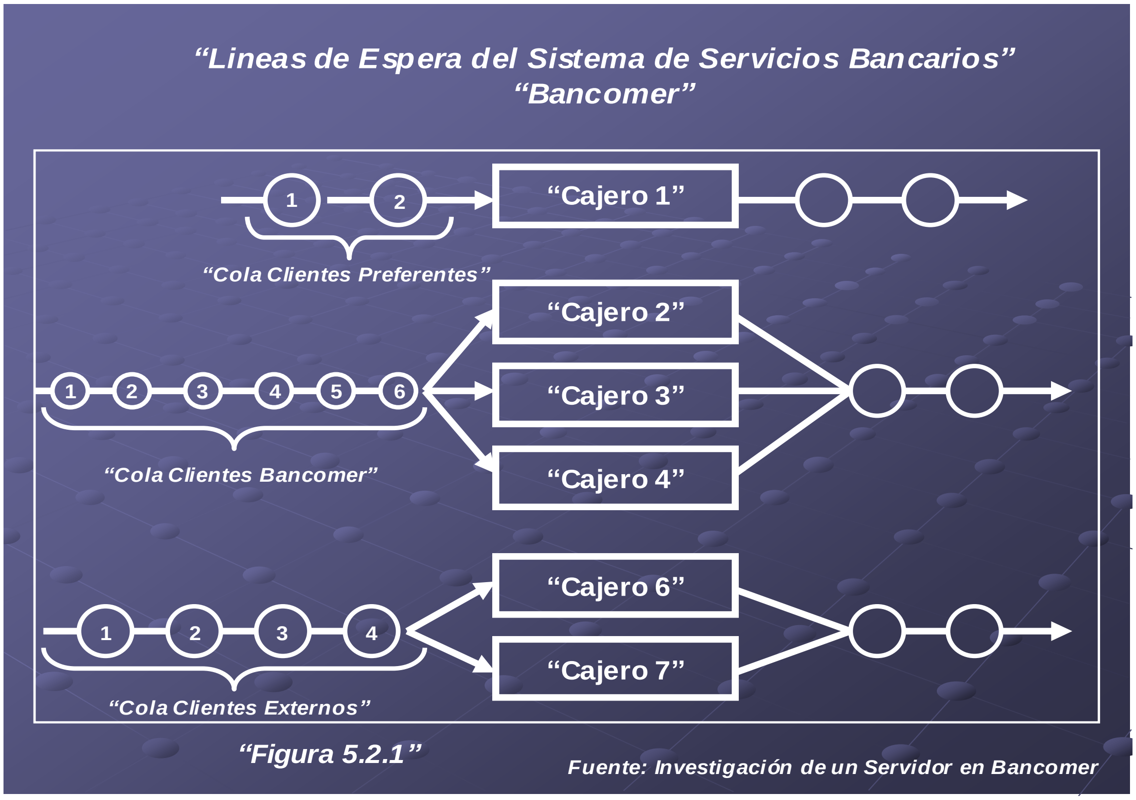
| | |
|---|---|
| *Clientes preferentes*. | • Sólo otorga el servicio al cliente que presente una tarjeta que lo acredite como preferente, o mediante una contraseña que el ejecutivo le proporcione cuando no la porte o requiera un servicio que sea de premura. |
| *Clientes Bancomer.* | • Se le proporciona a todo cliente que tenga una cuenta y/o tarjeta de crédito Bancomer. |
| *Clientes externos.* | • Considera a todos los clientes que no son de Bancomer, pero necesitan de los servicios que les proporciona: cobro de un cheque Bancomer por un pago de servicio que algún cliente proporcionó a una empresa u organización. |

La línea de clientes preferentes es atendida por un solo cajero; la de clientes Bancomer, por tres; y la de clientes externos, por dos. En total, todo el sistema de esta sucursal lo proporcionan seis cajeros.

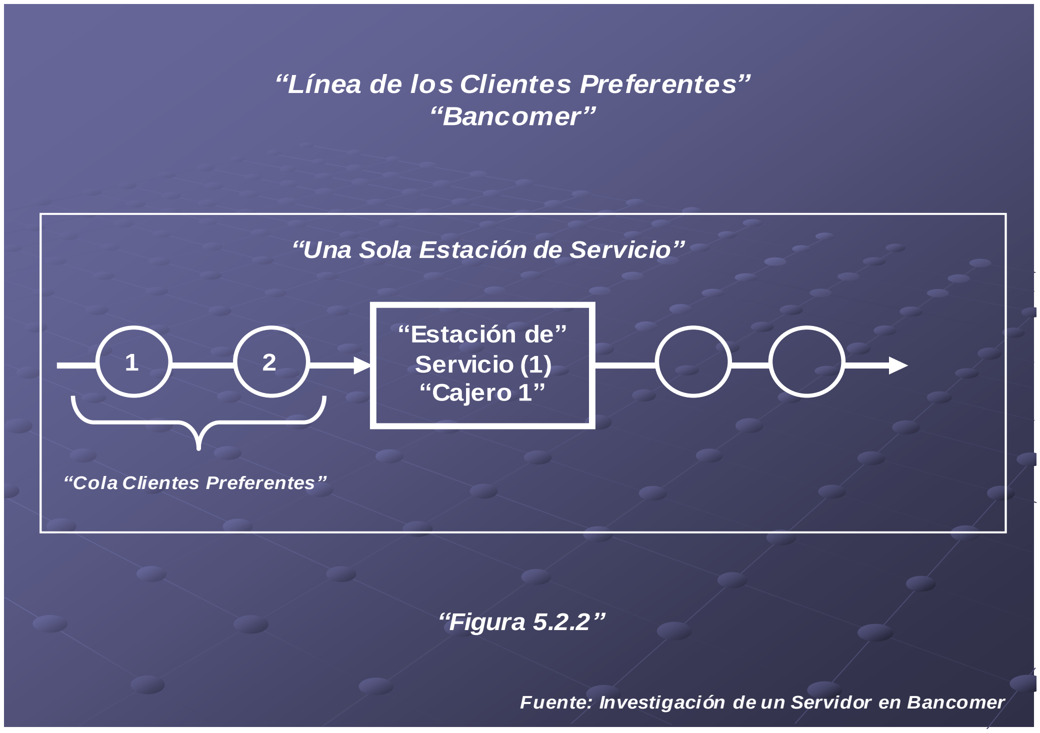
Se pudo observar que en un instante determinado, en la línea de clientes preferentes estaban formados 2 clientes; en la de clientes Bancomer, 6; y en la de clientes externos, 4. En ninguna existía restricción respecto a la cantidad de operaciones a realizar.

A continuación se desglosa el análisis de este caso.

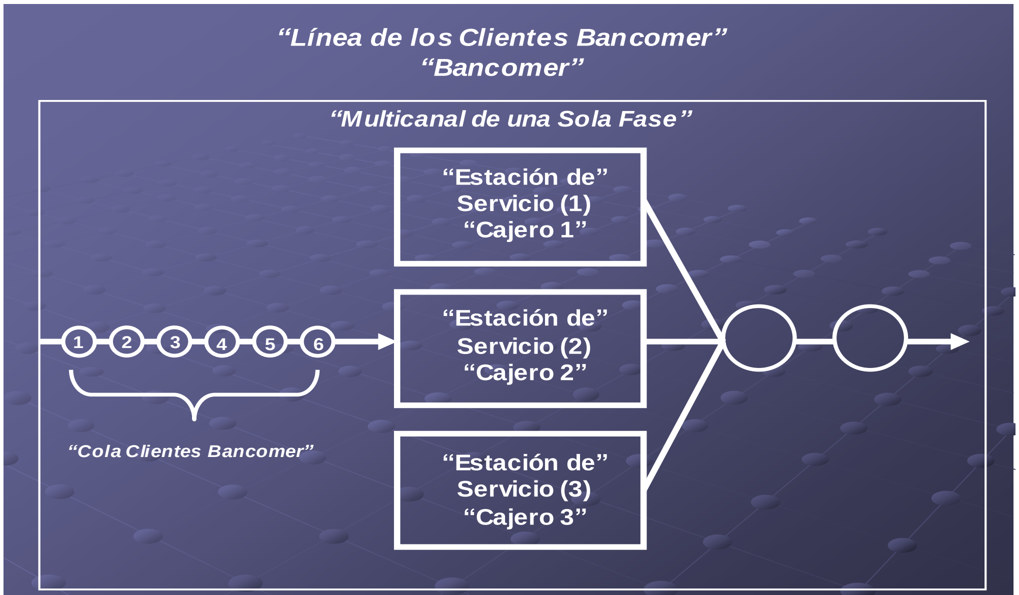
a. *Primer análisis.* Cada una de las líneas de espera son independientes por los tipos de clientes a los que sirven. Es decir, cuando ocurre esta situación se dice que cada línea está trabajando en forma separada. Esto se puede observar en la figura 5.2.1:




b. *Segundo análisis.* Si se considera únicamente la línea de clientes preferentes, se puede afirmar que esta parte del sistema consta de un sub-sistema de un solo canal, el cual tiene solamente una estación de servicio para que los 2 clientes que se encuentran formados sean atendidos por dicha estación (un cajero). Esto se puede observar en la figura 5.2.2:



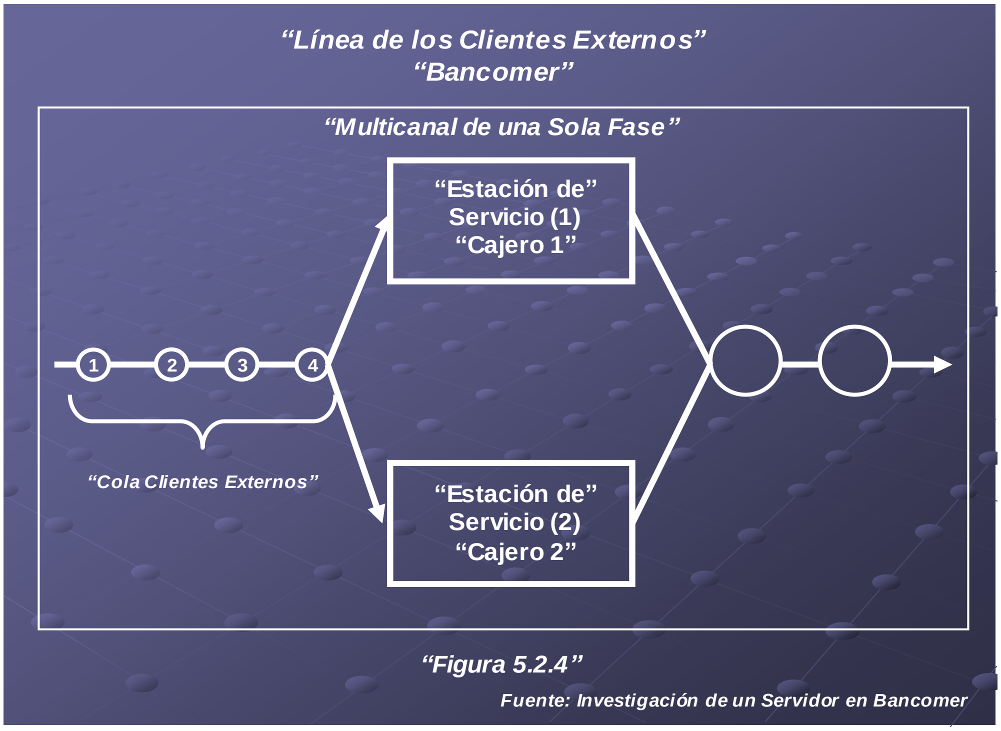

c. *Tercer análisis.* Si se considera la línea de clientes Bancomer, está conformada por un sub-sistema multicanal, es decir, con más de una estación de servicio en paralelo para que los seis clientes que se encuentran formados sean atendidos por dichas estaciones (tres cajeros). Esto se puede notar en la figura 5.2.3:




"Figura 5.2.3"

Fuente: Investigación de un Servidor en Bancomer

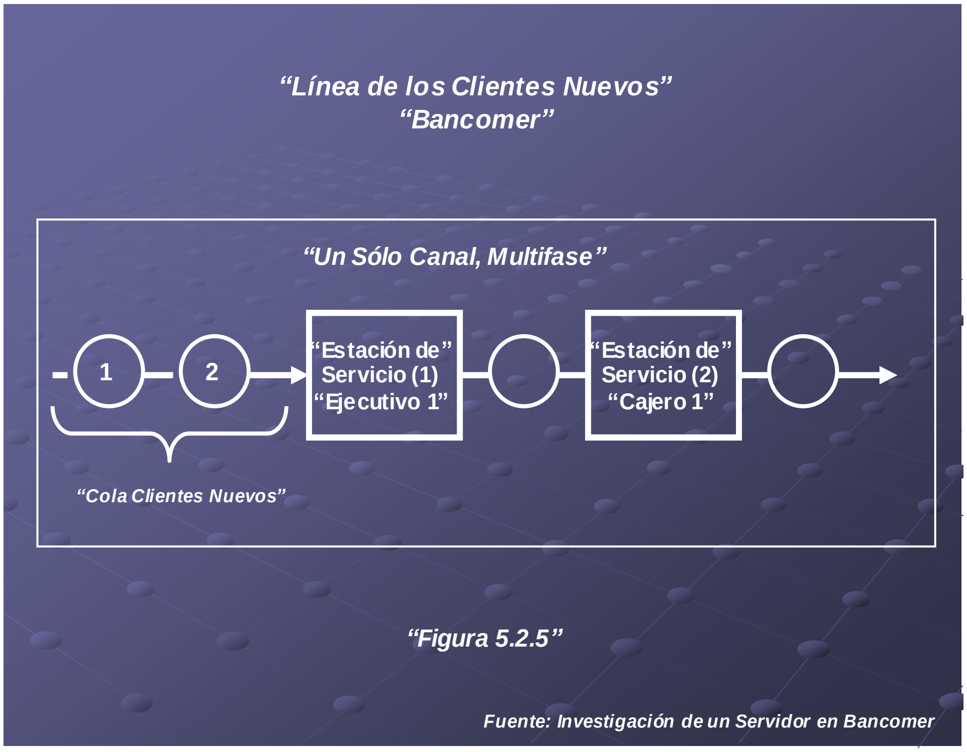
d. *Cuarto análisis*. La línea de clientes externos está conformada por un sub-sistema multicanal, es decir, con más de una estación de servicio en paralelo para que los cuatro clientes formados sean atendidos por dichas estaciones (dos cajeros). Esto se observa en la figura 5.2.4:




Esta fase se refiere al número de personas que proporcionarán el servicio. Para el caso que se está tratando con respecto a los servicios bancarios que dan los cajeros de las sucursales Bancomer, se puede observar que todo el sistema de BBVA Bancomer es de una fase por estandarización, dado que cada cliente recibe el servicio de un solo cajero.

Supóngase que dos clientes llegan a la sucursal Bancomer con un ejecutivo de cuenta para abrir una cuenta de cheques. Inmediatamente, el ejecutivo les abre la cuenta y los invita cordialmente a pasar con el cajero 1, encargado de atender a los clientes preferentes y a los que requieren una premura (como el cliente que está abriendo la cuenta de cheques).

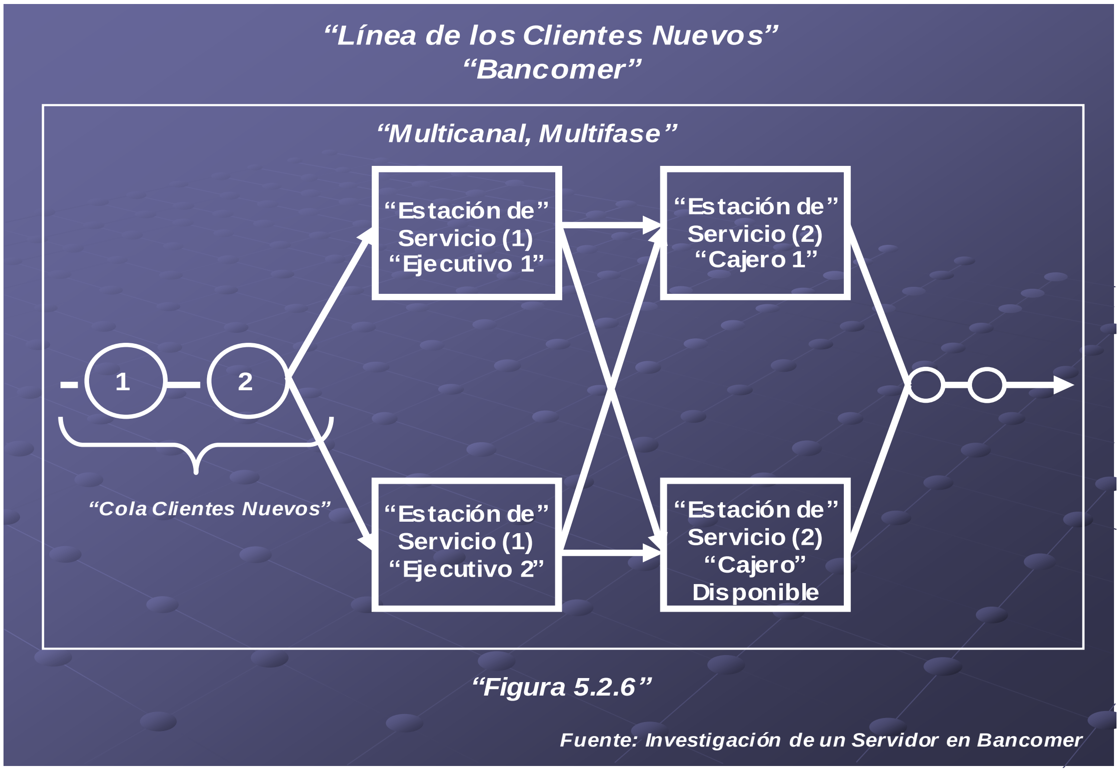
Estas acciones indican que la estructura de la línea de espera se modifica de tal forma que ahora se convierte en un sistema de un solo canal y de multifase. Significa que la cola pasa por dos estaciones de servicio (dos fases): el ejecutivo en primera instancia; y el cajero 1 en segunda instancia. Esto se puede notar en la figura 5.2.5:



“Figura 5.2.5”
Fuente: Investigación de un Servidor en Bancomer

Ahora, supóngase que los dos clientes llegan al mismo tiempo a la sucursal Bancomer a abrir una cuenta de cheques nueva. En ese instante se encuentran disponibles dos ejecutivos de cuenta. Inmediatamente, un ejecutivo le abre la cuenta a un cliente y el otro ejecutivo al otro cliente. Luego, cada ejecutivo le invita cordialmente a su respectivo cliente a pasar con el cajero 1, quien atiende a los clientes preferentes; y a otro cajero que se encuentre disponible en las otras líneas de espera. Esta última acción también habría ocurrido al revés: el cliente atendido por el cajero 1 pudo haber sido atendido por el cajero disponible de otra línea de espera; y el otro cliente, por el cajero 1.

Estas acciones indican que la estructura de la línea de espera se modifica de tal forma que ahora se convierte en un sistema de multicanal y multifase. Significa que la cola pasa por dos estaciones de servicio (dos fases): el ejecutivo en primera instancia; y el cajero 1 y el cajero disponible en segunda instancia. Esto se puede notar en la figura 5.2.6:




Como se concluye a partir del presente caso, la estructura básica de una línea de espera siempre se da en forma estandarizada considerando tanto el canal como la fase; mas esta estructura básica puede sufrir modificaciones que permitan re-expresarla de acuerdo con cada situación que se presente.

# 5.3. Modelo de una cola con un servidor[25]

El modelo de una cola con un servidor, conocido también como modelo de una cola o canal simple, es el modelo de líneas de espera más simple, ya que su solución no presenta problema alguno, y da servicio a una población infinita.

Su solución consta de siete ecuaciones básicas que pueden usarse para analizar y responder esta clase de problemas, y se derivan de la siguiente definición.

La probabilidad de hallar el sistema ocupado o que éste se encuentre en uso está dada por la Ec. 5.3.1:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}} \qquad \text{Ec. 5.3.1}$$

Donde: p = Uso del sistema

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

De la Ec. 5.3.1, se puede establecer lo siguiente.

Cuando la relación $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ permite validar las siguientes ecuaciones que el modelo de línea de espera de una cola con un servidor utiliza para poder resolver cualquier clase de este tipo de problemas, cada una de estas ecuaciones permite obtener un determinado parámetro dado un término en cuestión.

---

[25] *Ibíd.*, pp. 248-253.

Ecuaciones básicas de este modelo:

***a.*** Para determinar el valor de la probabilidad (Po) de encontrar el sistema vacío, se aplica la Ec. 5.3.2, como sigue:

$$\boldsymbol{P_0} = \mathbf{1} - \frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}} \qquad \text{Ec. 5.3.2}$$

Donde: p = Probabilidad de hallar el sistema vacío
$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)
$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***b.*** Para determinar el número esperado (Lq) en la cola, se aplica la Ec. 5.3.3 como sigue:

$$\boldsymbol{Lq} = \frac{\lambda^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\mu} - \lambda)} \qquad \text{Ec. 5.3.3}$$

Donde: Lq = Número esperado en la cola
$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)
$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***c.*** Para determinar el número esperado (L) en el sistema de la cola y servicio, se aplica la Ec. 5.3.4:

$$\boldsymbol{L} = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu} - \lambda} \qquad \text{Ec. 5.3.4}$$

Donde: L = Número esperado en el sistema
$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)
$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***d.*** Para determinar el tiempo esperado (Wq) en la cola, se utiliza la Ec. 5.3.5:

$$\boldsymbol{Wq} = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\mu} - \lambda)} \qquad \text{Ec. 5.3.5}$$

Donde: Wq = Tiempo esperado en la cola

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***e.*** Para determinar el tiempo esperado (W) en el sistema, se recurre a la Ec.5.3.6:

$$\boldsymbol{W} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu} - \lambda} \qquad \text{Ec. 5.3.6}$$

Donde: W = Tiempo esperado en el sistema

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***f.*** Para determinar el número esperado (Ln) en la cola no vacía, se aplica la Ec. 5.3.7:

$$\boldsymbol{L_n} = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu} - \lambda} \qquad \text{Ec. 5.3.7}$$

Donde: $L_n$ = Número esperado en la cola ni vacía

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***g.*** Para determinar el tiempo esperado (Wn) en la cola para colas no vacías, se utiliza la Ec. 5.3.8:

$$\boldsymbol{W_n} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu} - \lambda} \qquad \text{Ec. 5.3.8}$$

Donde: $W_n$ = Tiempo esperado en la cola para colas no vacías

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

Expuestas las ecuaciones de uso común para resolver este tipo de problemas de líneas de espera, se procederá a mostrar un ejemplo para saber cómo se aplican.

**Ejemplo 5.3.1**

El equipo de fotocopiado de una empresa es utilizado por el personal, principalmente secretarias, que requiere sacar copias fotostáticas. Los trabajos que deberán fotocopiarse varían según su magnitud y el número de copias requeridas.

Se sabe que la tasa de servicio está aleatoriamente distribuida, pero se aproxima a una distribución de Poisson, con una tasa media de servicio de 10 trabajos por hora. Además, los requerimientos de uso son aleatorios durante 8 horas de trabajo diario, pero llegan solamente a una tasa de 5 por hora.

Por otra parte, ciertas personas han visto que ocasionalmente se forma una línea de espera, y por consiguiente han implantado la política de mantener una sola unidad. Si el tiempo de una persona está calculado en $3.50 por hora, se pretende determinar:

1. Utilización del equipo.

2. Porcentaje de tiempo que una llegada debe esperar.
3. Tiempo promedio del sistema.
4. Costo promedio ocasionado por esperar y hacer funcionar la máquina.

Solución

Lo primero que se debe hacer es analizar la información del problema, pues servirá para establecer cómo se aplicarán las ecuaciones expuestas previamente.

Si el problema en cuestión proporciona una tasa de llegada (λ) de 5 trabajos por hora y una tasa de servicio (μ) de 10 trabajos por hora, se realizará lo siguiente.

***a)*** Para determinara la utilización del equipo, se emplea la Ec. 5.3.1:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} = \mathbf{0.50} \qquad \boldsymbol{p} = \mathbf{0.50} = \mathbf{50.00}\% \; \boldsymbol{por\ hora}$$

Al aplicar la Ec. 5.3.1, se puede concluir que la utilización del equipo se realiza en un 50.00% del tiempo.

***b)*** Para obtener el porcentaje de tiempo que una persona que llega debe esperar, se recurre a la Ec. 5.3.2:

$$\boldsymbol{P_0} = \mathbf{1} - \frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} = \mathbf{1} - \mathbf{0.50} = \mathbf{0.50} \qquad \boldsymbol{P_0} = \mathbf{0.50} = \mathbf{50.00}\% \; \boldsymbol{por\ hora}$$

Al aplicar la Ec. 5.3.2, se puede concluir que el porcentaje de tiempo que una persona que llega debe esperar se realiza en un 50.00% del tiempo.

***c.*** Para calcular el tiempo promedio que se debe esperar en el sistema, se aplica la Ec. 5.3.6:

$$\boldsymbol{W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{10-5} = \frac{1}{5} - 0.20} \qquad \boldsymbol{P_0 = 0.50 = 50.00\%\ por\ hora}$$

Al emplear la Ec. 5.3.6, se puede concluir que el tiempo promedio que cada persona que llega debe esperar es de 0.20 horas. Este valor obtenido incluye las acciones de estar esperando y procesando el trabajo.

***d.*** Finalmente, para encontrar el costo promedio ocasionado por esperar y hacer funcionar la máquina, se aplicará el siguiente algoritmo.

Primer paso

$$\boldsymbol{Costo\ promedio\ por\ trabajo = Tiempo\ promedio\ por\ trabajo * \$por\ hora}$$

Segundo paso

$$\boldsymbol{Costo\ por\ día = Número\ de\ trabajos\ procesados\ por\ día * Costo\ promedio\ por\ trabajo}$$

Al sustituir los valores correspondientes en los dos pasos anteriores, se obtiene:

$$\boldsymbol{Costo\ promedio\ por\ trabajo = W * \$por\ hora = 0.20 * \$3.50/hora = 0.7}$$

$$\boldsymbol{Costo\ por\ día = (8 * 5) * (0.70) = \$28.00\ por\ día}$$

Luego, el costo promedio ocasionado por esperar y hacer funcionar la máquina al aplicar el algoritmo desarrollado es de $28.00 por hora.

Con base en lo presentado, se puede concluir que las ecuaciones expuestas para resolver diversos problemas de líneas de espera de una cola con un servidor se utilizarán según la información que se proporcione en cada uno de ellos; y el algoritmo se empleará para obtener las unidades monetarias que los costos promedio generan en este tipo de problemas.

# 5.4. Modelo de una cola con servidores múltiples en paralelo[26]

Estos modelos se pueden considerar como los modelos de línea de espera más generales en sus ecuaciones, pues a partir de éstas la solución puede resumirse al caso de canal simple, denotando que K = 1, y posteriormente se simplifica.

El modelo de una cola con servidores múltiples en paralelo se conoce también como *modelo de una cola multicanal*, y puede dar servicio tanto a una población infinita, como a una finita.

## Caso de una cola multicanal siempre y cuando se suponga que la población es infinita

[26] *Ibíd.*, pp. 254-264.

Para analizar y solucionar este caso se aplican seis ecuaciones básicas, cada una de las cuales permite obtener un determinado parámetro dado un término en cuestión.

Ecuaciones básicas de este modelo.

***a.*** Para determinar el valor de la probabilidad (Po) de encontrar el sistema vacío, se aplica la Ec. 5.4.1.1:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{n}} \left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!}\right]\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{k}}\left(\frac{\boldsymbol{K\mu}}{\boldsymbol{k\mu} - \lambda}\right)} \qquad \text{Ec. 5.4.1.1}$$

Donde: $P_0$ = Probabilidad de hallar el sistema vacío

k = Número de canales de servicio

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***b.*** Para determinar el valor de la probabilidad (Pk) de encontrar que una unidad que llegue tenga que esperar (es decir, la probabilidad de que haya “k” o más unidades en el sistema), se obtiene con la Ec. 5.4.1.2:

$$\boldsymbol{P_K} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{k}} \frac{\boldsymbol{K\mu}}{\boldsymbol{k\mu} - \lambda}\boldsymbol{P_0} \qquad \text{Ec. 5.4.1.2}$$

Donde: $P_k$ = Probabilidad de que haya “k” o más unidades en el sistema

$P_o$ = Probabilidad de hallar el sistema vacío

k = Número de canales de servicio

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***c.*** Para determinar el número esperado (L) en el sistema, se obtiene mediante la Ec. 5.4.1.3:

$$L = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}}{(k-1)!\left(k\mu - \lambda\right)^{2}} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \qquad \text{Ec. 5.4.1.3}$$

Donde: L = Número esperado en el sistema

k = Número de canales de servicio

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***d.*** El número esperado (Lq) en la cola se obtiene con la Ec. 5.4.1:

$$L_q = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} P_0}{(k-1)!\left(k\mu - \lambda\right)^{2}} \qquad \text{Ec. 5.4.1.4}$$

Donde: $L_q$ = Número esperado en la cola

k = Número de canales de servicio

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***e.*** Para determinar el tiempo esperado (Wq) en la cola, se aplica la Ec. 5.4.1.5:

$$W_q = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0}{(k-1)!\left(k\mu-\lambda\right)^2}$$ Ec. 5.4.1.5

Donde: $W_q$ = Tiempo esperado en la cola
k = Número de canales de servicio
$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)
$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***f.*** Para determinar el tiempo esperado (W) en el sistema, se aplica la Ec. 5.4.1.6:

$$W = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0}{(k-1)!\left(k\mu-\lambda\right)^2} + \frac{1}{\mu}$$ Ec. 5.4.1.6

Donde: W = Tiempo esperado en el sistema
k = Número de canales de servicio
$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)
$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

Si hacemos que k = 1, se observa que todas las ecuaciones básicas que permiten analizar el caso de una cola multicanal, siempre y cuando se suponga que la población es infinita, se simplificarían al modelo de canal simple.

Expuestas las ecuaciones que se utilizan frecuentemente para resolver este tipo de problemas de líneas de espera, se procederá a mostrar un ejemplo en el cual se analiza cómo se deben aplicar.

**Ejemplo 5.4.1.1**

Una sucursal BBVA Bancomer tiene cuatro cajeros para cuentas de ahorro. De acuerdo con sus datos históricos, ha determinado que la distribución del tiempo de servicio es de carácter exponencial, con un promedio de tiempo de servicio de 6 minutos por cliente. Además se sabe que los clientes llegan conforme una distribución de tipo Poisson durante la jornada de trabajo con un promedio de 30 por hora. Se pide determinar:

- ***a)*** Probabilidad de hallar vacío el sistema
- ***b)*** Probabilidad de que un cliente que llega deba esperar
- ***c)*** Número esperado de clientes en el sistema
- ***d)*** Número esperado de clientes en la cola
- ***e)*** Tiempo que espera un cliente en la cola
- ***f)*** Tiempo que espera un cliente en el sistema

Solución

Primero se analiza la información del ejemplo, ya que ésta servirá para establecer cómo se aplicarán las ecuaciones expuestas previamente.

Información proporcionada por el problema de línea de espera del ejemplo:

| | |
|---|---|
| Institución financiera: | BBVA Bancomer, S. A. |
| Cajeros que dan servicios: | K = 4 |
| Tasa media de llegadas: | $\lambda$ = 30 por hora |
| Tasa media de servicio: | $\mu$ = 10 por hora |

Ahora se procederá a contestar cada uno de los incisos que pide el problema:

***a.*** Para obtener el valor de la probabilidad ($P_0$) de encontrar el sistema vacío, se aplica la Ec. 5.4.1.1:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \left[\frac{1}{k!}\right]\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\left(\frac{K\mu}{k\mu-\lambda}\right)}$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\left[\frac{1}{0!}\left(\frac{30}{10}\right)^{0} + \frac{1}{1!}\left(\frac{30}{10}\right)^{1} + \frac{1}{2!}\left(\frac{30}{10}\right)^{2} + \frac{1}{3!}\left(\frac{30}{10}\right)^{3}\right] + \left[\frac{1}{4!}\left(\frac{30}{10}\right)^{4}\frac{4(10)}{4(10)-30}\right]}$$

Desarrollando, se tiene:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{[1+3+4.5+4.5]+[13.5]} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{26.5}} = \mathbf{0.0377358} = \mathbf{3.77358}\%$$

Finalmente:

$$\boldsymbol{P_0} = \mathbf{3.77358}\%$$

***b.*** Para dar con el valor de la probabilidad de que un cliente que llegue deba esperar, se hará mediante la Ec. 5.4.1.2:

$$\boldsymbol{P_k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\frac{K\mu}{k\mu-\lambda}\boldsymbol{P_0}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene:

$$\boldsymbol{P_k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4!}}\left(\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{10}}\right)\frac{\mathbf{4(10)}}{\mathbf{(4(10)-30)}}(\mathbf{0.0377358})$$

Desarrollando, se tiene:

$$P_k = \frac{1}{24}(3)^4(4)(0.0377358) = \frac{(1)(81)(4)(0.0377358)}{24} = \frac{12.233592}{24} = 0.509733 = 50.9733\%$$

$$\boldsymbol{P_k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}(\mathbf{3})^{\mathbf{4}}(\mathbf{4})(\mathbf{0.0377358}) = \frac{(\mathbf{1})(\mathbf{81})(\mathbf{4})(\mathbf{0.0377358})}{\mathbf{24}} = \frac{\mathbf{12.233592}}{\mathbf{24}} = \mathbf{0.509733}$$
$$= \mathbf{50.9733}\%$$

Finalmente:

$$\boldsymbol{P_k} = \mathbf{50.9733}\%$$

***c.*** Para encontrar el número esperado de clientes en la cola, se aplica la Ec. 5.4.1.4:

$$\boldsymbol{L_q} = \frac{\lambda\,\boldsymbol{\mu}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P_0}}{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})!\left(\boldsymbol{k\mu}-\lambda\right)^{\mathbf{2}}}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene:

$$L_q = \frac{(30)(10)\left(\frac{30}{10}\right)^4 (0.0377358)}{(4-1)!\,(4(10)-30)^2}$$

Desarrollando, se tiene:

$$L_q = \frac{916.11}{600} = 1.5268\, por\ hora$$

Finalmente:

$$L_q = 1.5268\, por\ hora$$

***d.*** Para conocer el número esperado de clientes en el sistema, se utiliza la Ec. 5.4.1.3:

$$L = \frac{\lambda\,\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(k-1)!\left(k\mu-\lambda\right)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene:

$$L = \frac{(30)(10)\left(\frac{30}{10}\right)^4}{(4-1)!\,(4(10)-30)^2}(0.0377358) + \frac{30}{10}$$

Desarrollando, se tiene:

$$L = \frac{916.11}{600} + \frac{30}{10} = 1.5268 + 3$$
$$= 4.5268\ Clientes\ por\ hora$$

Finalmente:

$$L = 4.5268\ clientes\ por\ hora$$

***e.*** Para obtener el tiempo que espera un cliente en la cola, se recurre a la Ec. 5.4.1.5:

$$W_q = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0}{(k-1)!\left(k\mu - \lambda\right)^2}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene:

$$W_q = \frac{(10)\left(\frac{30}{10}\right)^4 (0.0377358)}{(4-1)!\,(4(10)-30)^2}$$

Desarrollando, se tiene:

$$W_q = \frac{30.537}{600} = 0.050895\ de\ hora$$

Finalmente:

$$W_q = 0.050895\ de\ hora$$

***f.*** Para definir el tiempo que espera un cliente en el sistema, se aplica la Ec. 5.4.1.6:

$$W = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} P_0}{(k-1)!\left(k\mu - \lambda\right)^2} + \frac{1}{\mu}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene:

$$W = \frac{(10)\left(\frac{30}{10}\right)^4 (0.0377358)}{(4-1)!\,(4(10)-30)^2} + \frac{1}{10}$$

Desarrollando, se tiene:

$$W = \frac{30.537}{600} + \frac{1}{10} = 0.050895 + 0.1$$
$$= 0.150895\ de\ hora$$

Finalmente:

$$W = 0.150895\ de\ hora$$

Del ejemplo 5.4.1.1, se puede concluir lo siguiente:

- Ante las condiciones en las que se encuentra trabajando, se observa que la probabilidad de que el sistema de la sucursal del Grupo BBVA Bancomer se encuentre vacío es del 3.77358% de veces; mientras que la probabilidad de que un cliente que llegue deba esperar es del 50.9733% de veces.
- El número esperado de clientes en el sistema es de 4.5268 por hora; y el número esperado de clientes en la cola, de 1.5268 por hora.

- El tiempo que espera un cliente en el sistema es de 0.150895 de hora; y el tiempo que espera un cliente en la cola, de 0.050895 de hora.

Por último, se puede inferir que las ecuaciones expuestas para resolver diversos problemas de líneas de espera de una cola con servidores múltiples en paralelo cuando la población es infinita, se utilizarán de acuerdo con la información de cada uno de ellos.

## Caso de una cola multicanal siempre y cuando se suponga que la población es finita

En ciertas aplicaciones, al resolver problemas de una cola multicanal, siempre y cuando se suponga que la población es finita, implica que el número de clientes posibles es pequeño.

Si este valor es tan pequeño que cuando llega un cliente para que sea atendido, o bien cuando se concluye un servicio, se aprecia que este valor afecta la probabilidad de futuras llegadas, conlleva que la suposición de una población infinita ya no es aplicable. Para modificar esta situación, existe una regla empírica, adecuada también para los estudios de mercadotecnia: *si la población es menor de 30 elementos, entonces, se puede considerar que la población a analizar es finita*. Por tanto, la probabilidad de que ocurra una llegada varía según el número de clientes disponibles para entrar al sistema.

De esta forma, si se define a "M" como la población total de clientes y a "n" como el número de clientes que ya están el sistema de cola, cualquier llegada debe provenir de "(M- n)" clientes que aún no se encuentran en el sistema.

Por tanto, cuando se conoce la probabilidad de una llegada individual, es posible expresar la probabilidad de una llegada individual.

Si (1/λ) representa el tiempo entre los requerimientos de servicio de una unidad, es decir, el tiempo medio entre las llegadas de un cliente dado $\lambda$ será la probabilidad de que un cliente requiera servicio durante un periodo (ΔT).

Luego, existe la suposición de que la probabilidad es independiente del periodo y, por tanto, se tiene nuevamente la existencia de un modelo con una aproximación a una distribución de Poisson. Y se estable que si $\lambda$ es la probabilidad de que una unidad determinada requiera servicio y hay (M – n) clientes que no están en el sistema de cola, la probabilidad de que un cliente requiera servicio es (M-n)l.

La afirmación supone todavía que (ΔT) es tan pequeño que la probabilidad de que se den dos o más llegadas no es importante.

Ahora bien, se emplean cuatro ecuaciones básicas para analizar y responder esta clase de problemas, las cuales permiten obtener un determinado parámetro dado un término en cuestión.

Ecuaciones básicas del modelo

***a.*** Para determinar el valor de la probabilidad (Po) de encontrar el sistema vacío, se aplica la Ec. 5.4.2.1:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{n=0}^{n=M} \frac{\boldsymbol{M}!}{(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{n})}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{n}}} \qquad \text{Ec. 5.4.2.1}$$

Donde: $P_o$ = Probabilidad de hallar el sistema vacío

M = Número de clientes en la población

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***b.*** Para determinar el valor de la probabilidad (Pn) de poder encontrar "n" clientes en el sistema, se emplea la Ec. 5.4.2.2:

$$\boldsymbol{P_n = \frac{M!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} P_0} \qquad \text{Ec. 5.4.2.2}$$

Donde: $P_n$ = Probabilidad de poder hallar "n" clientes en el sistema

$P_o$ = Probabilidad de hallar el sistema vacío

M = Número de clientes en la población

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***c.*** Para determinar el número esperado de clientes en el sistema *(L)*, se utiliza la Ec. 5.4.2.3:

$$\boldsymbol{L = \sum_{n=0}^{n=M} nP_n = M - \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_0)} \qquad \text{Ec. 5.4.2.3}$$

Donde: L = Número esperado de clientes en el sistema

M = Número de clientes en la población

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***d.*** Para determinar el número esperado de clientes en la cola (Lq), se emplea la Ec. 5.4.2.4:

$$L_q = M - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda}(1 - P_0)$$ Ec. 5.4.2.4

Donde: $L_q$ = Número esperado de clientes en la cola

M = Número de clientes en la población

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

Expuestas las ecuaciones de mayor utilidad para resolver este tipo de problemas de líneas de espera, a continuación se muestra un ejemplo donde se aplican.

**Ejemplo 5.4.2.1**

Un mecánico atiende cuatro máquinas. Para cada máquina el tiempo promedio de requerimientos de servicio es de 10 horas, y se supone una distribución exponencial. El tiempo de reparación tiende a seguir la misma distribución y tiene un tiempo promedio de 2 horas. Cuando una máquina queda en reparación, el tiempo promedio perdido tiene un valor de $20.00 por hora. El servicio del mecánico cuesta $50.00 diarios. Se pide determinar:

***a)*** Número esperado de máquinas en operación.
***b)*** Costo esperado del tiempo perdido por día.
***c)*** La conveniencia de tener dos mecánicos para que cada uno atienda sólo dos máquinas.

Solución

Primero se analiza la información del ejemplo para establecer cómo se aplicarán las ecuaciones que previamente se expusieron.

| | |
|---|---|
| Tipo de empresa: | PyME. |
| Población: | M = 4. Cuando se considera a un mecánico |
| Población: | M = 2. Cuando se consideran a dos mecánicos |
| Tiempo promedio de llegada = | 30 horas |
| Tiempo promedio de servicio = | 2 horas |
| Costo del tiempo promedio perdido = | $ 20.00 por hora |
| Costo del servicio por mecánico = | $ 50.00 por día |

Luego, se procede a contestar cada uno de los incisos que pide el problema:

***a.*** Para obtener el número de máquinas en operación, primero se determinan los valores de la tasa media de llegadas (λ) y la tasa media de servicio (μ), de la siguiente forma:

Para el valor de $\lambda$, se tiene:

$$\mathbf{10}\ \boldsymbol{horas} = \frac{\mathbf{1}}{\lambda} \qquad \text{Donde} \qquad \lambda = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} = \mathbf{0.10}$$

Para el valor de μ:

$$\mathbf{2}\ \boldsymbol{horas} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu}} \qquad \text{Donde} \qquad \boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0.50}$$

Una vez obtenidos los valores de (λ) y (μ), se podrá determinar el número de máquinas en operación a través de la Ec. 5.4.2.1, de la siguiente forma.

En primera instancia, se obtiene el valor de la probabilidad de encontrar el sistema vacío. Esto es:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{n=0}^{n=M} \frac{\boldsymbol{M}!}{(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{n})} \left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{n}}})$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=4} \frac{4!}{(4-n)} \left(\frac{0.1}{0.5}\right)^n})$$

Desarrollando, se tiene:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{1}{(4-0)!}\left(\frac{01}{0.5}\right)^0 + \frac{1}{(4-1)!}\left(\frac{01}{0.5}\right)^1 + \frac{1}{(4-2)!}\left(\frac{01}{0.5}\right)^2 + \frac{1}{(4-3)!}\left(\frac{01}{0.5}\right)^3 + \frac{1}{(4-4)!}\left(\frac{01}{0.5}\right)^4\right]})$$

$$P_0 = \frac{1}{[1 + 4(0.2) + 12(0.4) + 24(0.008) + 24(0.0016)]})$$

$$P_0 = \frac{1}{[1 + 0.8 + 0.48 + 0.192 + 0.0384]} = \frac{1}{2.5104} = 0.3983 = 0.4 = 40.00\%$$

$$P_0 = 0.3983 = 0.40 = 40.00\%$$

Luego, se procede a determinar el número de máquinas que no operarán en el sistema, aplicando la Ec. 5.4.2.3:

$$L = \sum_{n=0}^{n=M} nP_n = M - \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_0)$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior, se obtiene:

$$L = 4 - \frac{0.5}{0.1}(1 - 0.4) = 4 - 3 = 1$$

Después, se encuentra el número esperado de máquinas que operan, de la siguiente manera.

Número esperado de máquinas que operan = M – L= 4 – 1 = 3 máquinas

Número esperado de máquinas que operan = 3 máquinas

***b.*** Para obtener el valor del costo esperado de tiempo perdido por día, se aplica el siguiente algoritmo, que consta de dos pasos:

Primer paso

$$\boldsymbol{Total\ de\ horas\ perdidas} \\ = \boldsymbol{Jornada\ de\ trabajo} * \#\ \boldsymbol{de\ Máquinas\ que\ no\ funcionan}$$

Supóngase que la jornada de trabajo es de 8 horas:

$$\boldsymbol{Total\ de\ horas\ perdidas = 8\ horas * 1\ Máquina\ sin\ operar = 8\ horas}$$

Segundo paso

$$\boldsymbol{Costo\ por\ día = Costo\ por\ hora * Total\ de\ horas\ perdidas}$$

Se sabe que cuando una máquina se queda en reparación, el tiempo perdido tiene un valor de \$20.00 por hora. Entonces, se tiene:

$$\boldsymbol{Costo\ por\ día = (\$20.00\ por\ hora) * (8\ horas\ día) = \$160.00\ por\ día}$$

Se puede concluir que el costo esperado perdido por día ocasionado por esperar y hacer funcionar la máquina, al aplicar el algoritmo desarrollado, es de \$160.00 por día.

***c.*** Con respecto a la premisa propuesta de tener dos mecánicos para que cada uno atienda dos máquinas, se realiza lo siguiente.

En primer lugar, se determina el valor de la probabilidad de encontrar el sistema vacío, sabiendo que ahora el valor de M es 2. Para esto se aplica la Ec. 5.4.2.1:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{n=0}^{n=M} \frac{\boldsymbol{M}!}{(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{n})}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{n}}})$$

Sustituyendo los valores en la ecuación anterior, se tiene:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{n=0}^{n=2} \frac{\mathbf{2}!}{(\mathbf{2}-\boldsymbol{n})}\left(\frac{\mathbf{0.1}}{\mathbf{0.5}}\right)^{\boldsymbol{n}}})$$

Desarrollando, se tiene:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\left[\frac{\mathbf{2!\,1}}{(\mathbf{2}-\mathbf{0})!}\left(\frac{\mathbf{01}}{\mathbf{0.5}}\right)^{\mathbf{0}} + \frac{\mathbf{2!\,1}}{(\mathbf{2}-\mathbf{1})!}\left(\frac{\mathbf{01}}{\mathbf{0.5}}\right)^{\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{2!}}{(\mathbf{2}-\mathbf{2})!}\left(\frac{\mathbf{01}}{\mathbf{0.5}}\right)^{\mathbf{2}}\right]})$$

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{[\mathbf{1}+\mathbf{2}(\mathbf{0.2})+\mathbf{2}(\mathbf{0.04})]})$$

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{[\mathbf{1}+\mathbf{0.4}+\mathbf{0.08}]} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1.48}} = \mathbf{0.6756} = \mathbf{0.68} = \mathbf{68.00}\%$$

$$\boldsymbol{P_0} = \mathbf{0.6756} = \mathbf{0.68} = \mathbf{68.00}\%$$

El valor de $P_0$ que se obtuvo significa que cada mecánico y sus máquinas constituyen un sistema independiente.

Por tanto, el número esperado de máquinas en el sistema por mecánico se obtiene aplicando la Ec. 5.4.2.3:

$$\boldsymbol{L = \sum_{n=0}^{n=M} nP_n = M - \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_0)}$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\boldsymbol{L = 2 - \frac{0.5}{0.1}(1 - 0.68) = 2 - 1.6 = 0.4} \qquad \boldsymbol{L = 0.4\ \textit{máquinas por mecánico}}$$

Ahora, se procede a determinar el costo esperado de tiempo perdido por día con el siguiente algoritmo, el cual consta de tres pasos.

Primer paso

$$\boldsymbol{\textit{Total de horas perdidas} = \textit{Jornada de trabajo} * \#\ \textit{de Máquinas que no funcionan}}$$

Supóngase que la jornada de trabajo es de 8 horas, entonces:

$$\boldsymbol{\textit{Total de horas perdidas} = 8\ \textit{horas} * 0.4\ \textit{Máquina}\ \sin \textit{operar} = 3.2\ \textit{horas}}$$

Como son dos mecánicos, entonces:

$$\boldsymbol{\textit{Total de horas perdidas} = 2(3.2) = 6.4\ \textit{horas}}$$

Segundo paso

$$\boldsymbol{Costo\ por\ día = Costo\ por\ hora * Total\ de\ horas\ perdidas}$$

Se sabe que cuando una máquina se queda en reparación, el tiempo perdido tiene un valor de $20.00 por hora. Entonces, se tiene:

$$\boldsymbol{Costo\ por\ día = (\$20.00\ por\ hora) * (6.4\ horas\ día) = \$128.00\ por\ día}$$

Tercer paso

$$\boldsymbol{Costo\ total = Costo\ de\ servicio\ por\ mecánico + Costo\ por\ día}$$

Se sabe que el servicio por mecánico cuesta $50.00. Y se tiene:

$$\boldsymbol{Costo\ total = 2(\$50.00) + \$128.00 = \$100.00 + \$128.00 = \$228.00}$$

En conclusión, el costo total generado si se contara con dos mecánicos para que cada uno atendiera a dos máquinas sería de $228.00.

Como se puede notar, el costo total para ocupar a dos mecánicos es mayor que el costo total que se paga cuando se tiene a uno solo. Es decir, $228.00 > ($160.00 + $50.00 = $210.00). Luego, no es recomendable esta acción; no es justificable para el funcionamiento del negocio.

Finalmente, se puede inferir que las ecuaciones expuestas para resolver diversos problemas de líneas de espera de una cola con servidores múltiples en paralelo cuando la población es finita, se utilizarán de acuerdo con la información de cada uno de ellos.

# 5.5. Modelos de una cola con servidores múltiples en serie[27]

Este modelo es el modelo de líneas de espera más completo, pues su estructura se basa en una serie de multifases que conforman todo un proceso. Luego, la obtención de su solución se vuelve más compleja.

Este tipo de modelos supone que “K” es el número de canales, el cual es mayor a “1”, lo que quiere decir que se establece un intervalo de [1 < k <M). El modelo de una cola con servidores múltiples en serie se conoce también como *modelo de cola multicanal*, y da servicio a una población finita.

Para analizar y solucionar esta clase de problemas, hay seis ecuaciones básicas derivadas de la relación expresada en la Ec. 5.5.1:

$$\boldsymbol{k > 1} \qquad \text{Ec. 5.5.1}$$

Donde: K = Número de canales

La Ec. 5.5.1 permite validar las siguientes ecuaciones que utiliza el modelo de línea de espera de cola multicanal con población finita para resolver cualquier clase de este tipo de problemas, y que facilita la obtención de un parámetro específico dado un término en cuestión.

Ecuaciones básicas de este modelo

[27] *Ibíd.*, pp. 264-266..

***a.*** Para determinar el valor de la probabilidad (Po) de encontrar el sistema vacío, se aplica la Ec. 5.5.2:

$$\boldsymbol{P_0} = \frac{\mathbf{1}}{\sum_{n=0}^{n=k-1}\left[\frac{\boldsymbol{M}!}{(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{n})!\,\boldsymbol{n}!}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right] + \sum_{n=k}^{n=M}\left[\frac{\boldsymbol{M}!}{(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{n})!\,\boldsymbol{k}!\,\boldsymbol{k}^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{n}}\right]} \qquad \text{Ec. 5.5.2}$$

Donde: $P_o$ = Probabilidad de hallar el sistema vacío

M = Total de la población de clientes

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***b.*** Para determinar el valor de la probabilidad (Pn) de encontrar el número de clientes (n) en el sistema, se utilizan la Ec. 5.5.3 y la Ec. 5.5.4:

$$\boldsymbol{Pn} = \boldsymbol{P_0} = \frac{\boldsymbol{M}!}{(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{n})!\,\boldsymbol{n}!}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{n}} \qquad \boldsymbol{Donde}: \mathbf{0} <= \boldsymbol{n} <= \boldsymbol{k} \qquad \text{Ec. 5.5.3}$$

Donde: $P_o$ = Probabilidad de hallar el sistema vacío

$P_n$ = Probabilidad de hallar el número de clientes en el sistema

M = Total de la población de clientes

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$$\boldsymbol{Pn} = \boldsymbol{P_0} = \frac{\boldsymbol{M}!}{(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{n})!\,\boldsymbol{k}!\,\boldsymbol{k}^{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}}\left(\frac{\lambda}{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\boldsymbol{n}} \qquad \boldsymbol{Donde}: \boldsymbol{k} <= \boldsymbol{n} <= \boldsymbol{M} \qquad \text{Ec. 5.5.4}$$

Donde: $P_o$ = Probabilidad de hallar el sistema vacío

$P_n$ = Probabilidad de hallar el número de clientes en el sistema

M = Total de la población de clientes

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***c.*** De las Ec. 5.5.3 y la Ec. 5.5.4, se observa que “n” no puede ser mayor que “M”. Entonces, para determinar el número esperado (l) de clientes en el sistema, se ocupa la Ec. 5.5.5:

$$\boldsymbol{L = \sum_{n=0}^{m=k-1}(nPn) + \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)P_n + k\left(1 - \sum_{n=0}^{n=k-1} P_n\right)} \qquad \text{Ec. 5.5.5}$$

Donde: L = Número esperado en el sistema

$P_o$ = Probabilidad de hallar el sistema vacío

$\lambda$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

$\mu$ = Tasa de llegada (unidad/periodo)

***d.*** Para determinar el número esperado de clientes (Lq) en la cola, se aplica la Ec. 5.5.6:

$$\boldsymbol{Lq = \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)P_n} \qquad \text{Ec. 5.5.6}$$

Donde: Lq = Número esperado de clientes en la cola

$P_n$ = Probabilidad de hallar el número de clientes en el sistema

n = Número de clientes en el sistema

k = Número de canales

Expuestas las ecuaciones más comunes para resolver este tipo de problemas de líneas de espera, se procederá a mostrar un ejemplo para entender cómo se aplican (el proceso es similar al caso de una población infinita).

**Ejemplo 5.5.1**

Un grupo de profesionales en ingeniería tienen dos oficinas de proyectos para realizar sus cálculos. El trabajo de cómputo requiere en promedio de 20 minutos de tiempo de terminal; y cada uno de los ingenieros necesita de algunos cálculos alrededor de una vez cada 2 horas. Es decir, el tiempo promedio entre solicitudes de servicio es de 2 horas. Además, se debe suponer que estas solicitudes están repartidas de acuerdo con una distribución exponencial. Si el grupo lo componen 6 ingenieros, se pide determinar:

a. Número estimado de ingenieros que esperan utilizar una terminal.
b. Tiempo total perdido diariamente.

Solución

Se analiza la información del ejemplo, pues servirá para establecer cómo se aplicarán las ecuaciones expuestas previamente.

Información proporcionada por el problema de línea de espera:

| | |
|---|---|
| Población: | M = 6 |
| Oficinas de proyectos: | K = 2 |
| Consideración: | Una hora como unidad de tiempo |
| Tasa media de llegadas: | $\lambda$ = 3 cada hora = 1/3 = 0.3333 de hora |
| Tasa media de servicio: | $\mu$ = 1 cada 2 horas = ½ = 0.50 de hora |

En primer lugar, se obtiene el valor de la probabilidad ($P_0$) de encontrar el sistema vacío. Esto se podrá determinar a través de la Ec. 5.5.2:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{n=k-1}\left[\frac{M!}{(M-n)!\,n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \sum_{n=k}^{n=M}\left[\frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{(n-k)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]}$$

Sustituyendo valores en la ecuación, se obtiene:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{6!}{(6-0)!\,0!}\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{6!}{(6-1)!\,1!}\left(\frac{2}{3}\right)^1\right] + \left[\frac{6!}{4!\,2!\,2^0}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6!}{3!\,2!\,2^1}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{6!}{2!\,2!\,2^2}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \frac{6!}{1!\,2!\,2^3}\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \frac{6!}{0!\,2!\,2^4}\left(\frac{2}{3}\right)^6\right]}$$

De la sustitución de valores, se obtiene:

$$P_0 = \frac{1}{[1+4] + \left[\frac{20}{3} + \frac{80}{9} + \frac{80}{9} + \frac{160}{27} + \frac{160}{81}\right]} = \frac{1}{37.345679} = 0.0268 = 2.68\%$$

El resultado de la Ec. 5.5.2 indica que el valor de la probabilidad ($P_0$) de encontrar el sistema vacío es del 2.68% de veces.

Luego, ubicado el valor de $P_0$, se procede a obtener cada uno de los incisos del problema.

Con respecto al inciso *a,* para conocer el número de ingenieros que esperan utilizar una terminal, se emplea la Ec. 5.5.6:

$$Lq = \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)P_n$$

Para aplicar esta ecuación, es necesario determinar el valor de la probabilidad ($P_n$) para hallar "n" clientes en el sistema. En este caso, se utilizará la Ec. 5.5.4:

$$\boldsymbol{Pn = P_0 = \frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{(n-k)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \qquad \boldsymbol{Donde: k <= n <= M}$$

De esta ecuación, se obtendrán los valores de $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ y $P_6$, y resulta lo siguiente.

Valor de $P_2$:

$$\boldsymbol{P_2 = P_0 = \frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{(n-k)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (0.0268)\frac{6!}{(6-2)2!\,2!^0} = (0.0268)\left(\frac{120}{18}\right) = 0.1786}$$
$$\boldsymbol{= 0.18}$$

Valor de $P_3$:

$$\boldsymbol{P_3 = P_0 = \frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{(n-k)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (0.0268)\frac{6!}{(6-3)2!\,2!^1}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = (0.0268)\left(\frac{80}{9}\right) = 0.2382}$$
$$\boldsymbol{= 0.24}$$

Valor de $P_4$:

$$\boldsymbol{P_4 = P_0 = \frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{(n-k)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (0.0268)\frac{6!}{(6-4)2!\,2!^2}\left(\frac{2}{3}\right)^4 = (0.0268)\left(\frac{80}{9}\right) = 0.2382}$$
$$\boldsymbol{= 0.24}$$

Valor de $P_5$:

$$P_5 = P_0 = \frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{(n-k)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (0.0268)\frac{6!}{(6-5)2!\,2!^3}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = (0.0268)\left(\frac{160}{27}\right) = 0.1588$$
$$= 0.16$$

Valor de $P_6$:

$$P_6 = P_0 = \frac{M!}{(M-n)!\,k!\,k^{(n-k)}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (0.0268)\frac{6!}{(6-6)2!\,2!^4}\left(\frac{2}{3}\right)^6 = (0.0268)\left(\frac{160}{81}\right) = 0.529$$
$$= 0.05$$

Después, se procede a aplicar la Ec. 5.5.6:

$$Lq = \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)Pn$$

$$Lq = \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)P_n$$

De esta ecuación, resulta:

$$Lq = \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)P_n = P_2(2-2) + P_3(3-2) + P_4(4-2) + P_5(5-2) + P_6(6-2)$$

Sustituyendo, se tiene:

$$Lq = \sum_{n=k}^{n=M}(n-k)P_n = P_2(2-2) + P_3(3-2) + P_4(4-2) + P_5(5-2) + P_6(6-2)$$

$$\boldsymbol{Lq} = \sum_{\boldsymbol{n=k}}^{\boldsymbol{n=M}} (\boldsymbol{n-k})\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{0.18}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{0.24}(\boldsymbol{1}) + \boldsymbol{0.24}(\boldsymbol{2}) + \boldsymbol{0.16}(\boldsymbol{3}) + \boldsymbol{0.05}(\boldsymbol{4})$$

$$\boldsymbol{Lq} = \sum_{\boldsymbol{n=k}}^{\boldsymbol{n=M}} (\boldsymbol{n-k})\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0.24} + \boldsymbol{0.48} + \boldsymbol{0.48} + \boldsymbol{0.20}$$

$$\boldsymbol{Lq} = \sum_{\boldsymbol{n=k}}^{\boldsymbol{n=M}} (\boldsymbol{n-k})\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{1.40}$$

Ahora, con respecto al inciso *b*, para obtener el tiempo total perdido por día, o sea, el número de clientes que esperan en la cola (Lq), esta cantidad se multiplica por el número de horas por día:

$$\boldsymbol{Tiempo\ perdido\ por\ día} = (\boldsymbol{Número\ de\ horas\ por\ día}) * (\boldsymbol{L_q})$$

Sustituyendo los valores, se tiene:

$$\boldsymbol{Tiempo\ perdido\ por\ día} = (\boldsymbol{8}) * (\boldsymbol{1.40}) = \boldsymbol{11.2\ horas\ por\ día}$$

Del ejemplo 5.5.1, se concluye que el número estimado de ingenieros que esperan utilizar una terminal es de 1.40 personas; y el tiempo total perdido, de 11.2 horas por día.

Con base en lo desarrollado en este apartado, se infiere que las ecuaciones expuestas para resolver diversos problemas de líneas de espera de una cola con servidores múltiples en serie, se utilizarán según la información de cada uno de ellos.

# 5.5. Comportamiento prioritario de una línea de espera

Luego de analizar los temas anteriores, surge una pregunta: ¿cuál es el comportamiento prioritario de una línea de espera? Para responder, primero se tomará en cuenta el concepto de *prioridad*, que consiste en definir una medida de carácter relativo en donde se establece el valor de una unidad para el sistema, utilizada como un análisis comparativo con otras. Es decir, el comportamiento prioritario de una línea de espera establece la rapidez con la que pasará una unidad o cliente por el sistema en relación con otras u otros.

El comportamiento prioritario de una línea de espera se presenta en todos los tipos de modelos revisados en esta unidad, pues siempre representará un elemento importante de la línea de espera. La prioridad es, precisamente, el método más común en estos campos para establecer la decisión de quién será el próximo cliente en ser atendido en un instante determinado.

Finalmente, se puede decir que este análisis comparativo permite identificar diferencias notorias entre los resultados que arroja un sistema normal, o sin prioridades con respecto a un sistema en el cual existen prioridades en relación con el sistema normal.
Para ampliar lo visto en esta unidad, se sugiere revisar el Anexo 5.

# RESUMEN

Todos los sistemas de líneas de espera se componen de unidades a las que se debe dar el servicio y una o varias estaciones para el servicio de una cola para las unidades que esperan recibir el servicio.

Las llegadas a un sistema de líneas de espera, llamadas *clientes*, poseen características que afectan al sistema:

- *Distribución del tiempo entre llegadas.* Técnica que se usa al azar cuyo fin es regir el número de llegadas al sistema.

- *Prioridad*. Medida relativa del valor de un cliente para el sistema, en comparación con otros. en general, establece la rapidez con la que pasará un cliente por el sistema, en relación con otros.

- *Impaciencia.* Factor que señala el tiempo que permanecerá un cliente en el sistema sin recibir servicio. Este factor puede describir las condiciones sobre un cliente: alejamiento, abandono o cambio de línea.

  *Alejamiento* es la condición en la que un cliente se niega a entrar en una cola, debido a su longitud. *Abandono* es cuando un cliente sale de la cola después de esperar cierta cantidad de tiempo. Y *cambio* es la condición en la que un cliente sale de una cola para entrar en otra.

El *canal de servicio* se refiere a las instalaciones con que se cuenta para dar el servicio a los clientes, y reúne las siguientes características.

| *Proceso de servicio*. | *Disposición de los canales.* | *Disciplina de servicio.* |
|---|---|---|
| Distribución del tiempo de servicio, entendida como un proceso conjetural, cuya variación es inherente de la instalación. | Rige la configuración del sistema. Los canales se pueden diseñar en serie o en paralelo, o en combinación de serie y paralelo. | Esta característica de la instalación indica si puede o no interrumpirse cuando está en servicio. Las prioridades unitarias van de la mano con esta característica: los clientes de mayor prioridad pueden exigir que la instalación detenga su proceso actual para darles servicio (esto se denomina *procesamiento prioritario*). |

Otro aspecto del servicio se relaciona con las llegadas en grupo de clientes al sistema, conocidas como *servicio colectivo*. En este caso, la instalación funciona sobre grupos de clientes al mismo tiempo.

La cola es una parte importante de la línea de espera ante las instalaciones del servicio que ésta ofrece; en consecuencia, se constituye como el principal campo de estudio.

La línea de espera para el modelo de simulación tiene los rasgos siguientes:

| | |
|---|---|
| *Longitud.* | • Se refiere a determinar la cantidad de clientes que pueden encontrarse en la línea de espera al mismo tiempo. |
| *Disciplina de la cola*. | • Establece el método de disposición de los clientes de la cola. En general, se considerara que esta cualidad depende de la cola, pero en realidad está en función gradual de los clientes que hay ella. |

Hay varias posibilidades diferentes de disciplinas de colas. La más sencilla de todas es la de dar servicio según el orden de llegada conforme los clientes llegan a solicitarlo.

En los sistemas, la cola misma ofrece la mejor oportunidad de estudio en un campo desde el control de la administración de la empresa. Frecuentemente, es más fácil establecer una nueva disciplina de colas que puedan modificar un proceso con un promedio dado de servicio. Por consiguiente, muchos análisis se ocupan de la investigación de varias disciplinas de colas o planes de prioridades.

El sistema en su conjunto tiene ciertas características que no se pueden incluir en las entidades mencionadas anteriormente. Entre ellas, están las limitaciones al número de clientes en el sistema y los periodos operacionales.

La restricción del número de clientes en el sistema suele tener una gran relevancia, pues representa una limitación de la capacidad. Y en cuanto al periodo operacional de un sistema, es la cantidad de tiempo que permite que el sistema pueda funcionar de modo ininterrumpido. Algunos sistemas pueden operar continuamente durante ciertos periodos; en otros sistemas, el periodo está limitado a un tiempo máximo.

Así, el análisis de un sistema de colas incluye la síntesis de las características que se han descrito. A veces, todas se encuentran presentes; y en ocasiones, sólo se toman unas cuantas. Es necesario considerar que el sistema en sí mismo dicta, en gran parte, las características que existen; aunque los objetivos de un experimento dado dictan qué otros elementos se incluyen. Un rasgo que se puede incorporar, por ejemplo, es la información de costos.

# BIBLIOGRAFÍA

## SUGERIDA

| # | Autor | Capítulo | Páginas |
|---|---|---|---|
| 1 | Camacho Quiroz, Arturo | 11. Líneas de espera | 245-268 |
| 2 | Hiller, F. y G. Lieberman J., Gerald | 15. Teoría de colas | 661-713 |
| 3 | Davis K., Roscoe y McKeown,, Patrick G. | 13. Líneas de espera | 581-610 |

## Bibliografía básica


1. Anderson R. David, Sweeney J. Dennis y Williams A. Thomas, *Métodos cuantitativos para los negocios*, 9.ª ed., México: Thompson, 2004, 822 pp.
2. Camacho Quiroz, Arturo, *Principios de investigación de operaciones para contaduría y administración*, México: Grupo ECAFSA, 1997, 304 pp.
3. Eppen, G. D. *et al., Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*, 5.ª ed., México: Prentice Hall, 2000, 755 pp.

4. Hiller F. y Lieberman G. J., *Introducción a la investigación de operaciones*, México: McGraw-Hill, 2002, 855 pp.
5. Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G., *Modelos cuantitativos para administración*, 2.ª ed., México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994, 757 pp.
6. Taha A. Hamndy, *Investigación de operaciones,* 5.ª ed., México: Alfa Omega, 2000, 960 pp.
7. Wayne L. Winston, *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos,* México: Thompson, 2005, 1418 pp.

## Bibliografía complementaria

1. Bueno A. G. de. *Introducción a la programación lineal y al análisis de sensibilidad*, México: Trillas 1990, 1889 pp.
2. Daellenback H., George J. y D. Menickle, *Introducción a técnicas de investigación de operaciones,* México: CECSA, 1986, 771 pp.

## Sitios de internet

| Sitio | Descripción |
|---|---|
| http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lem/garduno_a_f/capitulo2.pdf | Teoría de colas o líneas de espera. |
| http://www.slideshare.net/gleandro/lneas-de-espera. | Líneas de espera. |

# UNIDAD 6

# Teoría de juegos

SUAYED UNAM
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012 2016 actualizado

# OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá los modelos básicos de la teoría de juegos.

# TEMARIO DETALLADO

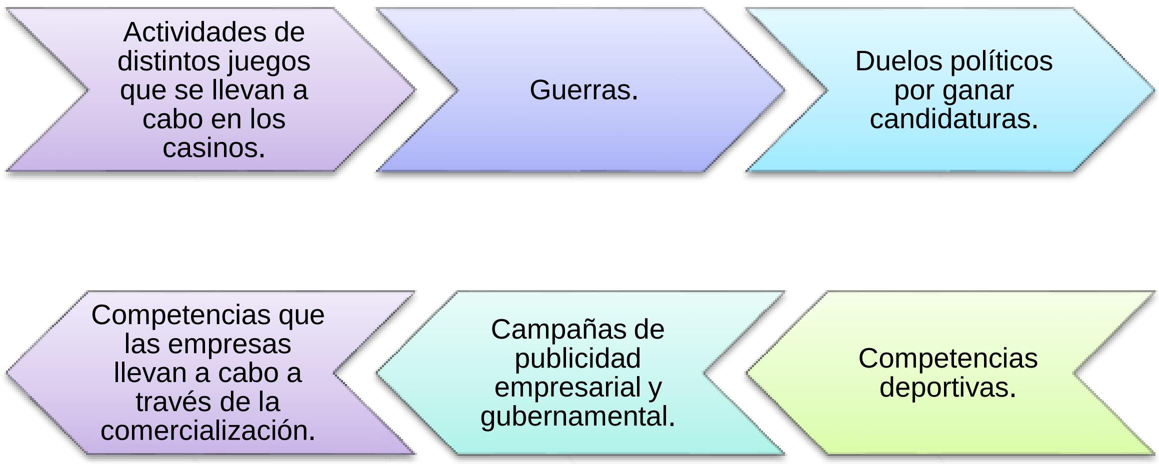
## (8 horas)

**6. Teoría de juegos**

| | |
|---|---|
| 6.1. Definición de juego | |
| | 6.1.1. Estrategias puras y mixtas |
| 6.2. Solución óptima de juegos bipersonales y de suma cero | |
| | 6.2.1. Solución gráfica para juegos (2xN) o (Mx2) |
| | 6.2.2. Teorema de minimax |
| 6.3. Resolución por programación lineal | |

# INTRODUCCIÓN

La vida está llena de conflictos y competencias por la gran velocidad con que se desenvuelve el mundo actual:




Una cualidad fundamental de cada una de esas actividades siempre será el resultado final, que dependerá en gran medida de la combinación de estrategias seleccionadas por los adversarios que intervienen en ellas.

En este contexto, la teoría de juegos es de carácter matemático y estudia las cualidades generales de las distintas situaciones competitivas de una manera formal y con un enfoque abstracto. En consecuencia, da una importancia especial a los distintos procesos de toma de decisiones que llevan a cabo los adversarios. Es decir, se caracteriza por seguir los entornos competitivos difíciles; trata de resolver una serie de problemas donde se debe analizar una serie de situaciones en conflicto en las cuales participan dos o más partes que persiguen objetivos opuestos.

Esta unidad se enfocará al caso más simple de la teoría de juegos, el *juego de dos personas con suma cero*, donde sólo participan dos adversarios o jugadores. Se denomina así porque un adversario gana lo que el otro pierde: la suma de sus ganancias netas resulta ser cero.

Se estudiará también lo referente al teorema de minimax y su forma de solución a través del método de programación lineal.

# 6.1. Definición de juego[28]

Actualmente, el mundo en general vive una serie de emociones o sentimientos de carácter competitivo, donde se desata el deseo de ganar, como las guerras, deportes, concursos, negocios y juegos de casinos; o de triunfar en la vida a través de las habilidades que cada individuo posee al desarrollarse en su campo profesional.

A cada uno de estos eventos de suma importancia, o a las habilidades que los individuos desempeñan en el campo profesional dentro de un mundo competitivo, se les denomina *juegos*. Lo único que se quiere es ganar o triunfar. Y para hacerlo, deberá existir una gran disciplina y mucho respeto por el hecho denominado *juego justo*: jugar de acuerdo con una serie de reglas.

El deseo de ganar o triunfar en cualquier competencia es importante para el sistema de las empresas e individuos, pues les genera un instinto de adquirir un gran interés en los juegos y, por consiguiente, en el diseño y fortalecimiento de estrategias óptimas para alcanzar las metas.

Para ganar o triunfar, los juegos siguen sus propias reglas, por ello es muy difícil establecer una teoría universal. Entonces, se deberá poner atención en algunos juegos especiales para llegar a una estrategia óptima.

En esencia, la teoría de juegos se enfoca al desarrollo de la teoría matemática, aplicada en el análisis de la toma de decisiones por los participantes en distintas

[31]Concepto adaptado de Charles A. Gallagher y Hugh J. Watson, *op. cit.*, pp. 90-99.

situaciones de conflicto, que les permite determinar y obtener una solución óptima para cumplir el objetivo perseguido inicialmente.

La teoría de juegos se aplica cada vez que los individuos se relacionan con otros en distintos juegos. Por ejemplo, cuando manejas un auto sobre una calle de la ciudad con un tránsito elevado, estás practicando un juego con los conductores de los demás vehículos. O bien, si tuvieras un negocio de sopas enlatadas, tendrías que establecer el precio; de esta manera, estarías realizando un juego con tus clientes y con los dueños de otros negocios rivales.

Ahora bien, todas las ciencias sociales son sub-disciplinas de la teoría de juegos, pues esta teoría analiza cómo ocurren las situaciones de conflicto cuando los individuos se relacionan de forma racional, para llegar a la mejor solución.

Con base en lo expuesto a lo largo de este apartado, se puede afirmar que el juego consta de un conjunto de jugadores y estrategias. Éstas son esenciales para la disponibilidad de los jugadores, y por consecuencia generan una especificación de "beneficios" para cada combinación posible de esos movimientos.

Hay dos formas comunes de representar a los juegos:

- Normal
- Extensiva

Y las estrategias se clasifican así:

- Puras
- Mixtas

La teoría de juegos fue creada y desarrollada por John von Neuman y O. Morgenstern, quienes la dieron a conocer en su libro *The Theory of Games and*

*Economic Behavior* (1944). Otros investigadores, como los economistas Cournot y Edgeworth, fueron particularmente innovadores en esta propuesta.

Cabe mencionar que el mismo Von Neuman ya había puesto los fundamentos de esta teoría, en un artículo divulgado en 1928. Pero fue hasta la publicación que hizo con Morgenstern donde se analizó la relevancia de estudiar las relaciones humanas.

Con todo, hoy día, hay quienes afirman que la teoría de juegos no sirve para nada, con el argumento de que la vida no es un juego de suma cero, o porque se quiere obtener el resultado que uno desea seleccionando el apropiado.

Von Neuman y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la teoría de juegos:

1. *Estratégico o no cooperativo*. Requiere especificar muy detalladamente lo que los adversarios pueden y no pueden hacer durante el desarrollo del juego; y después buscar para cada jugador una estrategia óptima, es decir, que otros jugadores piensen lo que otro jugador pretende hacer, y viceversa.

   Von Neuman y Morgenstern resolvieron este planteamiento en una situación de conflicto de un caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses sean diametralmente opuestos.

   A este planteamiento estratégico de juegos con planteamiento estratégico o no cooperativo se le llama también *competitivo* o *de suma cero* porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador.

2. *Coalicional o cooperativo*. En este planteamiento, los autores buscaron describir la conducta óptima en juegos en donde intervienen muchos jugadores.

En conclusión, la teoría de juegos ha sido fundamental en la investigación de operaciones, en tanto permite llevar a cabo una correcta toma de decisiones en las empresas.

### 6.1.1. Estrategias puras y mixtas

Para analizar estos movimientos o estrategias, es necesario saber utilizar una herramienta fundamental, la *matriz de pagos*.

Cuando se lleva a cabo un juego con estrategia pura, significa que en el juego cada jugador tiene una y sólo una estrategia óptima, y para encontrarla, se debe contar con tres elementos importantes:

- Criterio maximin
- Punto de silla de montar
- Valor del juego

Cuando un juego no tiene punto de silla de montar, utiliza una estrategia mixta: los jugadores llevan a cabo su movimiento a discreción. O sea, no debe permitirse al oponente saber cuál estrategia se utilizará la siguiente vez durante el juego. Entonces, la mejor manera de garantizar el secreto será seleccionando la estrategia en forma aleatoria.

Existen juegos en los cuales los participantes hacen una serie de mezclas al momento de llevar a cabo sus estrategias o movimientos. Esto implica que en alguna parte del juego su estrategia puede ser pura; y en otra, mixta.

# 6.2. Solución óptima de juegos bipersonales y de suma cero

Como se mencionó en la introducción de esta unidad, el juego bipersonal y de suma cero (o juego de dos personas con suma cero) se llama así porque un adversario gana lo que el otro pierde, de forma que la suma de sus ganancias netas resulta cero.

Para entender el planteamiento de un problema en donde interviene una situación de conflicto y por consiguiente obtener su solución óptima en este tipo de juegos, considérese como ejemplo el juego de “pares y nones”, donde los adversarios muestran al mismo tiempo uno o dos dedos. El fin de este juego es que si el número de dedos presentados por ambos participantes coincide de tal forma que el número final para los dos adversarios es par, el que apostó a pares (supóngase que fue el adversario 1) es el ganador, y su ganancia fue de $1.00 USD (suma acordada antes de iniciar el juego). Pero en caso de que el número de dedos coincidiera en una cantidad impar, entonces el ganador será el adversario 2; en consecuencia, el adversario 1 le tendrá que pagar la cantidad convenida de $1.00 UDS.

En este juego, entonces, cada adversario tiene dos estrategias o movimientos: mostrar uno o dos dedos. Esto se plantea de forma visual en la matriz de pagos correspondiente, en la figura 6.2.1:

| Matriz de pagos para el juego de pares y nones | | | |
|---|---|---|---|
| “Estrategia” | | “Adversario 1” | |
| | | 1 | 2 |
| “Adversario” | 1 | 1 | -1 |
| 2 | 2 | -1 | 1 |

Figura 6.2.1

Con base en el ejemplo expuesto, se puede concluir que un juego entre dos personas o dos jugadores o adversarios, se caracteriza por los siguientes componentes:

- Estrategias o movimientos del jugador 1
- Estrategias o movimientos del jugador 2
- Matriz de pagos correspondiente

Por tanto, antes de que un juego inicie, cada integrante conoce las estrategias o movimientos de los que dispone para jugar, así como las estrategias o movimientos de su rival, y la matriz de pagos correspondiente.

Cuando se está jugando, se advierte que los oponentes realizan jugadas reales. Así, una *jugada real* es la que se está efectuando en el juego, en la cual los dos oponentes seleccionan al mismo tiempo una estrategia o movimiento sin que cada uno de ellos sepa lo que el otro eligió. Así, una estrategia se constituye como una acción simple. En el ejemplo de “pares y nones”, consiste en mostrar un número par o non de dedos.

Ahora, cuando los juegos se vuelven más complicados, con una serie de movimientos, la estrategia por definición se puede establecer como una regla previamente establecida que específica por completo cómo se intenta responder a cada imponderable posible en cada una de las etapas según se va jugando.

Ya se mencionó que para analizar los movimientos o estrategias es necesario saber manejar la matriz de pagos. Ésta consiste en un arreglo rectangular integrado de renglones y columnas, determinados por el número de jugadores y estrategias o movimientos disponibles. Por ejemplo, un juego del orden 2 x 4, significa que está integrado por 2 jugadores y 4 estrategias o movimientos.

Cuando los juegos tienen disponibles más de dos estrategias se denominan *juegos de orden 2 x M*, debido a que no existe ninguna diferencia analítica en relación con el número de estrategias o movimientos.

Considérese ahora el siguiente ejemplo, donde se utilizará una matriz de pagos para un juego de orden 2 x 2.

Sea la situación de conflicto en la que se enfrentan dos negocios de cadena exprés ubicadas en contraesquina en la misma intersección.

En este caso, los compradores están al pendiente del precio de un determinado artículo importante. Esto implica que cada negocio tendrá que decidir si cobra un precio alto o bajo por dicho artículo, pues ambos lo venden.

A través de una matriz de pagos, se analizará lo que puede suceder en las siguientes estrategias o movimientos disponibles considerando como referencia al primer negocio. Después, a través de otra matriz, se hará lo propio tomando al segundo negocio.

En relación con el primer negocio, se pueden establecer las siguientes estrategias o movimientos:

***1.*** Si ambos negocios ponen los precios del artículo altos o muy bajos, cada uno obtendrá un porcentaje igual del negocio completo.

***2.*** Si el primer negocio pone precios altos y el segundo bajos, éste atraerá algunos clientes del primero y le causará una cierta pérdida.

***3.*** Si el primer negocio pone precios bajos y el segundo altos, el primero atraerá algunos clientes del segundo negocio y le causará una cierta pérdida.

Los resultados generados por la matriz de pagos tomando como referencia al primer negocio se muestran en la siguiente figura:

| Matriz de pagos para el juego entre "Dos negocios" | | | |
|---|---|---|---|
| "Estrategia" | | "Negocio 1" | |
| | | Alto | Bajo |
| "Negocio" | Alto | 0 | -0.2 |
| 2 | Bajo | 0.2 | 0 |

Figura 6.2.2

Ahora bien, si se considera como referencia el segundo negocio, las estrategias o movimientos son los mismos del primer negocio, pero los signos de los pagos cambian.

Así, los resultados generados por la matriz de pagos tomando como referencia al segundo negocio se muestran en la figura 6.2.3:

| Matriz de pagos para el juego entre "Dos negocios" | | | |
|---|---|---|---|
| "Estrategia" | | "Negocio 1" | |
| | | Alto | Bajo |
| "Negocio" | Alto | 0 | 0.2 |
| 2 | Bajo | -0.2 | 0 |

Figura 6.2.3

Como se puede notar en los resultados de ambas matrices de pagos, esto se cumplirá siempre. Entonces, sólo se requerirá una sola matriz de pagos para describir el juego.

También de forma convencional, los pagos se muestran para el jugador en la parte izquierda de la matriz. En el caso de nuestro ejemplo, será para el primer negocio.

Por otra parte, surge la cuestión de si este juego es real; es decir, si cada negocio se da cuenta del precio que pone el otro, y podría cambiar el precio para perjudicar a la competencia. La respuesta es sí. Esto suele ocurrir cuando se desata la llamada “guerra de precios”.

Sin embargo, en otros tiempos, los precios se fundamentaban más en el costo y, por consiguiente, casi siempre se quedaban sin cambio durante todo el día. Pero de acuerdo con la teoría de juegos, como se mencionó anteriormente, se necesita que ambos jugadores actúen al mismo tiempo.

## 6.2.1. Solución grafica para juegos (2xN) o (Mx2)[29]

Este tipo de solución se da solamente para resolver problemas en donde existan juegos en los que se involucran estrategias mixtas con sólo dos estrategias puras no dominadas para uno de los jugadores.

Consideremos un juego con estrategias mixtas tal que, después de eliminar las estrategias dominadas, uno de los adversarios tiene sólo dos estrategias puras. Para este caso, supóngase que es el jugador 1, sabiendo que sus estrategias mixtas son las siguientes:

- $(x_1, x_2)$.
- $x_2 = 1 – x_1$.

En el juego se pretende determinar el valor óptimo de $x_1$. Y para lograrlo, es necesario hacer la gráfica que muestre el valor del pago esperado como una función de $x_1$ para cada una de las estrategias de su rival. Donde se podrá notar que la

[29] Adaptado de F. Hiller y J. G. J. Lieberman, *Introducción a la investigación de operaciones*, México: McGraw-Hill, 2002, pp. 479-481.

variable $x_1$ representa a la variable independiente de una relación funcional existente con las diferentes estrategias que se están considerando en el pago esperado, es decir, $y_1$, $y_2$, $y_3$,...........$y_n$, que representan los movimientos a seguir y, por consiguiente, son variables dependientes de la variable $x_1$.

Asimismo, esta gráfica del pago esperado se puede utilizar para visualizar el punto que maximiza el pago mínimo esperado, y también permite distinguir la estrategia mixta mínima del rival.

Para que se entienda cómo se aplica este procedimiento de solución gráfica para juegos de orden *2 x n* o *m x 2*, se analiza y resuelve el siguiente problema.

**Problema**

Dos políticos contienden entre sí por el Senado de un país. Están diseñando sus planes de campaña para los dos últimos días antes de las elecciones. Se espera que esos días sean los más cruciales de toda su campaña, pues están próximos al final de la misma. Entonces, quieren emplearlos para realizar campaña en dos ciudades importantes: ciudad 1 y ciudad 2. Para evitar perder tiempo, planean viajar en la noche y pasar un día completo en la ciudad 1 y otro día completo en la ciudad 2; o ambos días en una sola ciudad.

Como deben hacer los arreglos necesarios de manera adelantada, ninguno de los dos sabrá lo que su rival tiene planeado hasta después de haber concretado sus propios planes de campaña.

Además cada político tiene un jefe de campaña en cada ciudad, que los asesora en cuanto a la aceptación que tendrán las distintas combinaciones posibles en los días dedicados a cada ciudad, tanto por ellos como por sus rivales.

Solución

Como se advierte, ambos políticos representan un juego de dos personas y de suma cero. En primer lugar, se deben identificar a los jugadores (por obvia razón, son los políticos), así como las estrategias de cada uno y la matriz de pagos correspondiente.

Luego, con base en el planteamiento del problema, las estrategias o movimientos de cada adversario son las siguientes:

- *Movimiento 1*. Visitar un día cada ciudad.
- *Movimiento 2.* Visitar ambos días la ciudad 1.
- *Movimiento 3*. Visitar ambos días la ciudad 2.

Después, una información sobre la campaña de los dos políticos da como resultado la matriz de pagos que se muestra en la figura 6.2.4:

| **Matriz de pagos para el juego entre "Dos políticos"** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **"Estrategia"** | | "Político 2" | | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | Mínimo | |
| **"Político"** | 1 | 0 | -2 | 2 | -2 | Valor Maximin |
| **1** | 2 | 5 | 4 | -3 | -3 | |
| | 3 | 2 | 3 | -4 | -4 | |
| | Máximo | 5 | 4 | 2 | | |
| | | | | Valor minimax | | |

Figura 6.2.4

En la figura anterior, se nota que la tercera estrategia pura del jugador 1 está dominada por la segunda. Entonces, la matriz de pagos se puede reducir a la forma presentada en la figura 6.2.5:

| | Matriz de pagos para el juego entre "Dos políticos" | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | "Político 2" | | |
| | | "Estrategia" | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
| | Probabilidad | Pura | 1 | 2 | 2 |
| "Político" | $X_1$ | 1 | 0 | -2 | 2 |
| 1 | $(1-x_1)$ | 2 | 5 | 4 | -3 |

Figura 6.2.5

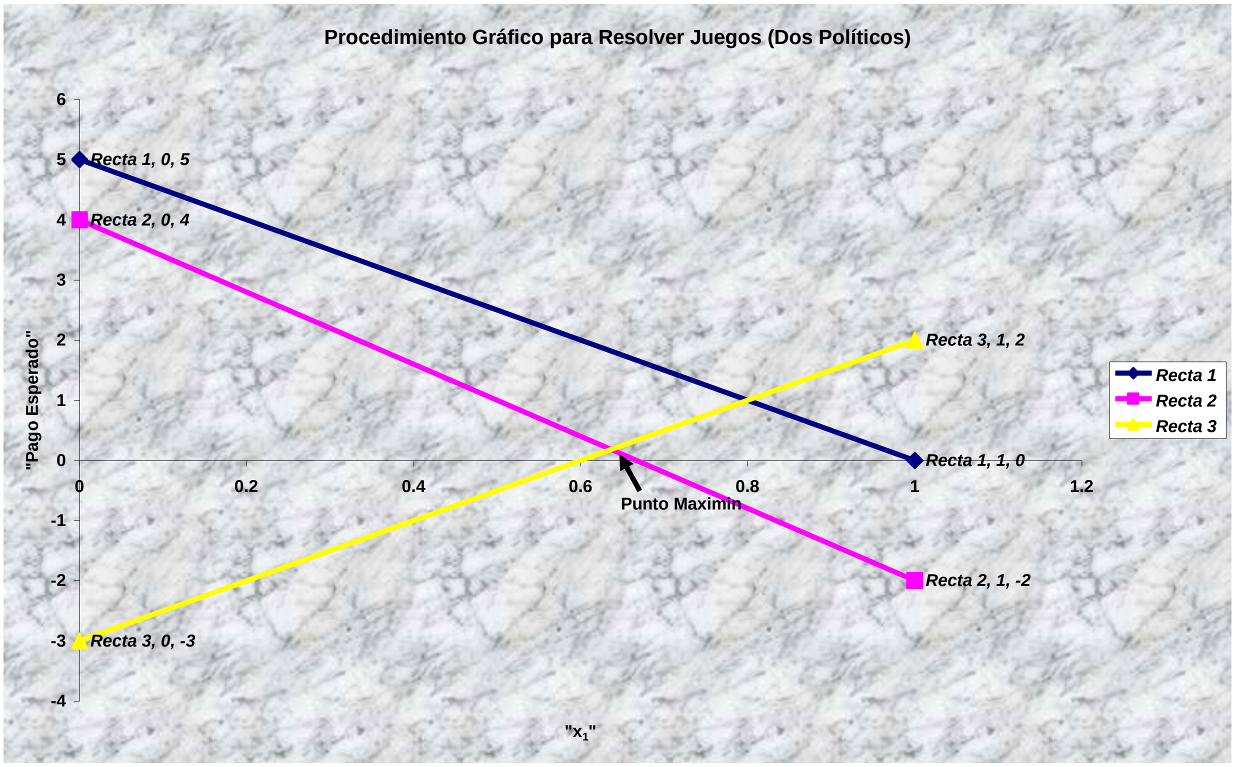
Por tanto, para cada estrategia pura de que dispone el jugador 2, el pago esperado para el jugador 1 será como se muestra en la figura 6.2.6:

| $(y_1, y_2, y_3)$ | Pago esperados |
|---|---|
| (1,0,0) | $\mathbf{0x_1 + 5(1 - x_1) = 5 - 5x_1}$ |
| (0,1,0) | $\mathbf{(-2x_1) + 4(1 - x_1) = 4 - 6x_1}$ |
| (0,0,1) | $\mathbf{2x_1 - 3(1 - x_1) = -3 + 5x_1}$ |

Figura 6.2.6

Determinado el pago esperado, se trazan sus rectas. Para cualquier valor que se dé a $x_1$ y $(y_1, y_2, y_3)$, recuérdese que el pago esperado será el promedio ponderado apropiado a los puntos correspondientes a estas tres rectas.

Luego, la gráfica de pago esperado de las tres rectas correspondiente a la información proporcionada por la figura 6.2.6 se muestra en la gráfica 6.2.1:




***Gráfica 6.2.1***

De la gráfica 6.2.1, se puede concluir lo siguiente. Recuérdese que el jugador 2 quiere minimizar el valor del pago esperado para el jugador 1. Además se sabe que para $x_1$ el jugador 2 puede minimizar este pago esperado, eligiendo la estrategia pura que le corresponde a la recta inferior para esa $x_1$. Por tanto, el valor óptimo de $x_1$ se encuentra entre la intersección de las rectas 2 y 3. Luego, la estrategia mixta óptima del jugador 2 es:

$$(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}) = (0{,}5/11, 6/11)$$

Este punto $(y_1, y_2, y_3)$ se conoce como *punto maximin*, o sea, el valor óptimo resultante esperado.

Finalmente, este procedimiento gráfico se ejemplificó para un problema en particular, pero su aplicación es universal para resolver cualquier tipo de juegos en los que se involucren estrategias mixtas con sólo dos estrategias puras no dominadas para uno de los jugadores.

## 6.2.2. Teorema de minimax[30]

El criterio de minimax es aplicado a juegos que no tienen punto de silla de montar, sino que necesitan estrategias mixtas.

En este contexto, el criterio minimax afirma que un jugador debe escoger la estrategia mixta correspondiente que minimice la máxima pérdida esperada para sí mismo. De manera equivalente, si se analizan los pagos (jugador 1) en lugar de las pérdidas (jugador 2), este criterio se denomina maximin, consistente en maximizar el pago esperado mínimo para el jugador.

En cuanto al pago mínimo esperado, se refiere al pago esperado más pequeño que puede resultar de cualquier estrategia mixta que el oponente tenga. De esta forma, según este criterio, la estrategia mixta óptima para el jugador 1 es la que le otorga la garantía, es decir, el mínimo pago esperado que le confiere ser la mejor, la máxima. Por tanto, el valor de esta mejor garantía es el valor maximin, asignado por la letra $\underline{v}$.

De modo análogo, la estrategia óptima del jugador 2 es aquella que le otorga la mejor garantía, en donde lo mejor significa *mínima,* y *garantía* se refiere a la máxima pérdida esperada que puede lograrse con cualquiera de las estrategias mixtas de su oponente. Por ello, la mejor garantía es el valor minimax, simbolizado con $\overline{v}$.

[30] *Ibíd.*, pp. 482-485.

Recordemos que, cuando solamente se utilizan estrategias puras, los juegos que no tienen punto de silla de montar resultan ser inestables: no tienen soluciones

estables. Esto se explica porque $\underline{v} < \overline{v}$, por lo que los jugadores desean cambiar

sus estrategias para mejorar su postura.

De modo similar, en los juegos con estrategias mixtas es indispensable que $\underline{v} = \overline{v}$;

para que la solución óptima sea estable.

Lo explicado para este tipo de juegos se puede resumir en el teorema de minimax de la teoría de juegos: *si se permiten estrategias mixtas, el par de estrategias óptimo de acuerdo con el "criterio minimax" proporciona una "solución estable" con $\underline{v} = v = v$, donde v es el valor del juego, de manera que ninguno de los dos jugadores puede mejorar cambiando unilateralmente su "estrategia".*

# 6.3. Resolución por programación lineal[31]

Hay una forma muy simple de resolver cualquier tipo de juego de estrategias mixtas: convirtiéndolo en un problema de programación lineal. En primera instancia, se analiza cómo se encuentra la estrategia mixta del jugador 1, de modo que se ubique en un estado óptimo con respecto a las estrategias simples del oponente, es decir, del jugador 2.

Si la estrategia mixta del jugador 1 es óptima en relación con las estrategias simples del jugador 2, será necesario determinar la solución que satisfaga este conjunto de restricciones a través de un modelo de programación lineal.
Como resultante de esta situación en conflicto entre los dos jugadores, el problema de hallar una estrategia mixta óptima se ha reducido a poder determinar una solución factible para un problema de programación lineal.

Ahora, al generar el juego a un modelo de programación lineal se presentan dos inconvenientes:

- Se desconoce $v$.
- No tiene función objetivo.

Para beneficio del problema, ambos inconvenientes se pueden salvar al mismo tiempo sustituyendo la constante desconocida $v$ por la variable $x_{m+1}$; y después maximizando $x_{m+1}$, de tal forma que $x_{m+1}$ sea igual a $v$, por definición, en la solución óptima del problema de programación lineal.

[31] *Ibíd.*, pp. 479-481.

En resumen, el jugador 1 encontrará el resultado de su estrategia mixta óptima aplicando el método simplex para resolver el problema de programación lineal como se muestra en el modelo 6.3.1:

Minimizar: $Z = x_{m+1}$

Modelo 6.3.1

Sujeto a: $p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + p_{31}x_3 + \ldots\ldots\ldots + p_{m1}x_m - x_{m+1} >= 0$

$p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots + p_{m2}x_m - x_{m+1} >= 0$

$p_{13}x_1 + p_{22}x_2 + p_{33}x_3 + \ldots\ldots\ldots + p_{m3}x_m - x_{m+1} >= 0$

……… .. ……… .. ………. .. ………… .. ………. ………………… …..

……… .. ……… .. ………. .. ………… .. ………. ………………… …..

$p_{1n}x_1 + p_{2n}x_2 + p_{3n}x_3 + \ldots\ldots\ldots + p_{mn}x_m - x_{m+1} >= 0$

Donde: $x_1 > 0$ = para i = 1, 2, 3, ………, m.

En este modelo se puede notar que $x_{m+1}$ no está restringida a ser no negativa, mientras tanto, el método simplex sólo se puede aplicar una vez que todas las variables de decisión tienen la restricción de no negatividad.

Para determinar su estrategia mixta óptima, el jugador 2 tendrá que reescribir la matriz de pagos como los pagos a sí mismo en lugar de al jugador 1, y procediendo de la misma forma que se hizo para el jugador 1. De tal forma que su estrategia mixta óptima será determinar la solución óptima del modelo de programación lineal como se muestra en el modelo 6.3.2, de la siguiente forma:

Minimizar: $Z = y_{n+1}$

Modelo 6.3.2

Sujeto a: $p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + p_{13}y_3 + \ldots\ldots + p_{1n}x_n - y_{n+1} = < 0$

$p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + p_{32}y_3 + \ldots\ldots + p_{2n}x_n - y_{n+1} = < 0$

$P_{31}y_1 + p_{32}y_2 + p_{33}y_3 + \ldots\ldots + p_{3n}x_n - y_{n+1} = < 0$

……… .. ……… .. ………. .. ………… .. ……….. ………………… …..

……… .. ……… .. ………. .. ………… .. ……….. ………………… …..

$p_{m1}y_1 + p_{m2}y_2 + p_{m3}y_3 + \ldots\ldots + p_{mn}y_m - y_{n+1} < = 0$

$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\, y_n = 1$

Donde: $y_1 > 0 =$ para $j = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n.$

Hecho lo anterior, se nota que existe el efecto de la dualidad entre el modelo de programación lineal del jugador con respecto al modelo de programación lineal del jugador 2, lo cual es sencillo demostrar.

Esta situación tiene dos relaciones importantes.

***a)*** *Primera*. Se pueden determinar las estrategias mixtas óptimas para los dos jugadores mediante la resolución de solo uno de los problemas de programación lineal planteados, puesto que por definición la solución óptima dual es un producto complementario automático de los cálculos del método simplex que éste usa para determinar la solución óptima primal.

***b)*** *Segunda.* Este tipo de aplicaciones trae consigo toda la teoría de la dualidad, utilizada para hacer énfasis en la interpretación y análisis de los juegos.

Luego, todo este procedimiento es una prueba muy sencilla del teorema minimax.

Para ilustrarlo, consideremos el problema analizado en la solución gráfica: el juego entre los dos políticos. De acuerdo con la información proporcionada por este juego, se tiene que el modelo de programación línea para el caso del jugador 1 quedaría como se muestra en el modelo 6.3.3:

Maximizar: $Z = x_3$

Modelo 6.3.3

Sujeto a: $5x_2 - x_3 > = 0$

$-2x_1 + 4x_2 - x_3 > = 0$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 > = 0$

Donde: $x_1 > = 0$, …… $x_2 > 0$

Para resolver el modelo 6.3.3, aplicamos el método simplex. Entonces, llegamos a la solución óptima:

$$(\boldsymbol{x_1}, x_2, \boldsymbol{x_3}) = (7/11, 4/11, 2/11)$$

Con respecto al jugador 2, el modelo de programación lineal para resolver y obtener la solución óptima de su estrategia mixta, será el dual del problema, cuyo planteamiento se muestra en el modelo 6.3.4:

Minimizar: $Z = y_4$

Modelo 6.3.4

Sujeto a: $-2y_2 + 2y_3 - y_4 = <0$

$5y_1 + 4y_2 - 3yx_3 - y_4 = <0$

$y_1 + y_2 + y_3 = 1$

Donde: $y_1 > = 0$, $yx_2 >= 0$, $y_3 >= 0$

De la misma forma que para el jugador 1, para resolver el modelo 6.3.4, el del jugador 2, empleamos el método simplex. Y al aplicarlo, llegamos a la solución óptima:

$$(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}, \boldsymbol{y_4}) = (\mathbf{0}, \mathbf{5/11}, \mathbf{6/11}, \mathbf{2/11})$$

Esta solución es exactamente igual a la obtenida aplicando el procedimiento gráfico. De nuevo se observa que el valor del juego es $\nu = \underline{\nu} = \nu$, que confirma el teorema de minimax. Se debe aclarar que cuando se había determinado la solución óptima de la estrategia mixta del modelo 6.3.4, con respecto al jugador 2, no era necesario resolver el modelo 6.3.3.

Con frecuencia, se pueden encontrar las estrategias mixtas óptimas para ambos jugadores con sólo elegir uno de los modelos previamente definidos y usar el método simplex para obtener una solución óptima y una óptima dual.

Finalmente, cuando se utilizó el método simplex para resolver la solución óptima de los modelos 6.3.3 y 6.3.4 de programación lineal, se añadió una restricción de no negatividad, la cual suponía que $\nu >= 0$. Por tanto, si esta suposición se violara, ninguno de los dos modelos tendría soluciones factibles, y el método simplex se detendría rápidamente con este mensaje.

Para evitar este riesgo, se pudo haber añadido una constante positiva, como 3 (el valor absoluto del elemento más negativo), a todos los elementos en la tabla de la figura 6.2.5. Esto habría aumentado en 3 todos los coeficientes de ($x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$, y $y_3$) en las restricciones de desigualdad de los dos modelos previamente establecidos.

# RESUMEN

La teoría de juegos es un procedimiento para llevar a cabo una correcta toma de decisiones en situaciones de conflicto. Pero la intuición no educada no es muy fiable en situaciones estratégicas, por lo cual se debe entrenar considerando ejemplos instructivos, aunque no reales.

Los juegos se clasifican según el número de jugadores. Esto implica que para que se desarrolle un juego será necesaria la intervención de dos jugadores como mínimo, hasta un total de “N” jugadores.

También debe considerarse que en estos juegos la suma algebraica de todos los pagos puede dar como resultado total cero, o un valor diferente. Y el número de estrategias disponibles para los jugadores son de dos o M.

Por otra parte, los juegos bipersonales y de suma cero tienen un punto de silla de montar si la estrategia disponible presenta el mismo valor para ambos jugadores. A estos juegos se les denomina *de estrategia pura*: cada jugador siempre debe encauzar su juego a una sola estrategia o movimiento.

Además, hay juegos que carecen de un punto de silla de montar, y para solucionarlos se requieren estrategias mixtas, las cuales se seleccionan en forma discreta y aleatoria de acuerdo con las proporciones óptimas.

En general, cuando abordan esta teoría, los autores analizan juegos de estrategia pura de orden 2 x M, y los de estrategia mixta de orden 2 x 2. Pero en la vida real hay juegos en donde intervienen más de dos jugadores, y de suma distinta de cero.

Esto debido a la coalición entre los jugadores causada por sobornos y amenazas, lo cual indica que cada juego de este tipo es único.

Aunque las aplicaciones de la teoría de juegos a la administración han sido restringidas, los conceptos del criterio maximin, las estrategias mixtas, el valor del juego y las clases de juegos, orientan sobre cómo resolver problemas de administración en donde existan situaciones conflictivas y de carácter competitivo, a las que normalmente el administrador se enfrenta en el campo profesional.

# BIBLIOGRAFÍA

## SUGERIDA

| # | Autor | Capítulo | Páginas |
|---|---|---|---|
| 1 | Gallagher, Charles A. y Watson, Hugh J. | 6. Teoría de juegos. | 90-99 |
| 2 | Hiller F. y G. Lieberman J. Gerald. | 6. Teoría de juegos. | 479-485 |

## Bibliografía básica


1. Anderson R. David, Sweeney J. Dennis y Williams A. Thomas, *Métodos cuantitativos para los negocios*, 9.ª ed., México: Thompson, 2004, 822 pp.
2. Camacho Quiroz, Arturo, *Principios de investigación de operaciones para contaduría y administración*, México: Grupo ECAFSA, 1997, 304 pp.
3. Eppen, G. D. *et al., Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*, 5.ª ed., México: Prentice Hall, 2000, 755 pp.
4. Hiller F. y Lieberman G. J., *Introducción a la investigación de operaciones*, México: McGraw-Hill, 2002, 855 pp.

5. Roscoe, Davis K. y McKeown, Patrick G., *Modelos cuantitativos para administración*, 2.ª ed., México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994, 757 pp.
6. Taha A. Hamndy, *Investigación de operaciones,* 5.ª ed., México: Alfa Omega, 2000, 960 pp.
7. Wayne L. Winston, *Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos,* México: Thompson, 2005, 1418 pp.


## Bibliografía complementaria


3. Bueno A. G. de. *Introducción a la programación lineal y al análisis de sensibilidad*, México: Trillas 1990, 1889 pp.
4. Daellenback H., George J. y D. Menickle, *Introducción a técnicas de investigación de operaciones,* México: CECSA, 1986, 771 pp.


## Sitios de internet

| Sitio | Descripción |
|---|---|
| http://www.home.ubalt.edu/ntsbarsh/opre640S/SpanishG.htm | Introducción a la teoría de juegos. |
| http://www.elblogsalmon.com/conceptos.../que-es-la-teoría-de-juegos. | ¿Qué es la teoría de juegos? |

Plan 2012
2016
actualizado