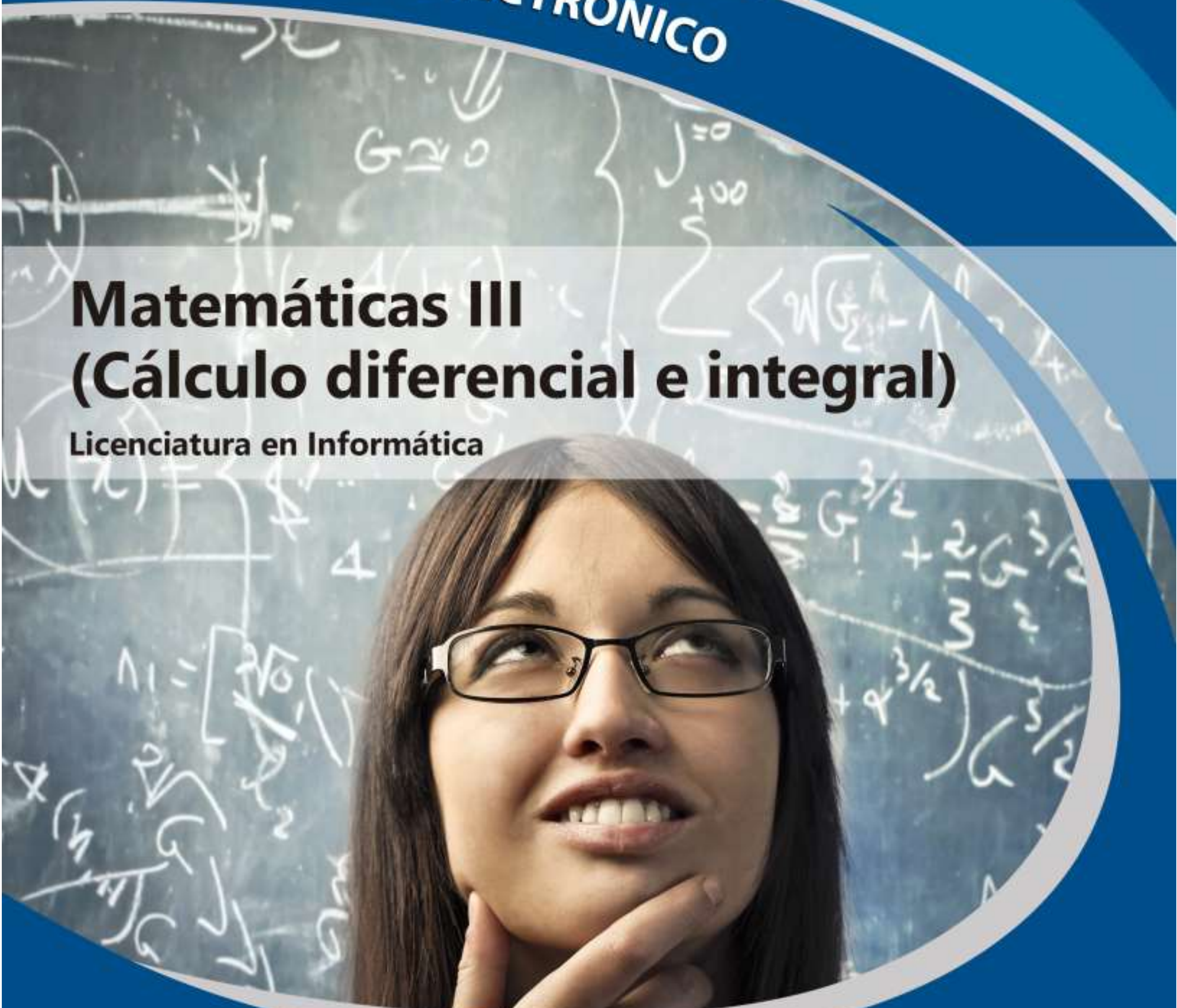
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN
DIVISIÓN SISTEMA UNIVERSIDAD ABIERTA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

APUNTE ELECTRÓNICO

Matemáticas III (Cálculo diferencial e integral)

Licenciatura en Informática



SUAyED UNAM
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012
2016
actualizado

COLABORADORES

DIRECTOR DE LA FCA
Dr. Juan Alberto Adam Siade

SECRETARIO GENERAL
Mtro. Tomás Humberto Rubio Pérez

– – – –

COORDINACIÓN GENERAL
Mtra. Gabriela Montero Montiel
Jefe de la División SUAyED-FCA-UNAM

COORDINACIÓN ACADÉMICA
Mtro. Francisco Hernández Mendoza
FCA-UNAM

– – –

COAUTORES
Mtro. Antonio Camargo Martínez
Mtro. Jorge García Castro
Lic. Juan Carlos Luna Sánchez

REVISIÓN PEDAGÓGICA
Lic. Cecilia Hernández Reyes

CORRECCIÓN DE ESTILO
Mtro. Francisco Vladimir Aceves Gaytán

DISEÑO DE PORTADAS
L.CG. Ricardo Alberto Báez Caballero
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

DISEÑO EDITORIAL
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

Dr. Enrique Luis Graue Wiechers
Rector

Dr. Leonardo Lomelí Vanegas
Secretario General

Dr. Juan Alberto Adam Siade
Director

Mtro. Tomás Humberto Rubio Pérez
Secretario General

Mtra. Gabriela Montero Montiel
Jefa del Sistema Universidad Abierta
y Educación a Distancia

Matemáticas III (Cálculo diferencial e integral)
Apunte electrónico

Edición: enero 2018.

D.R. © 2018 UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, Ciudad de México.

Facultad de Contaduría y Administración
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria
Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, Ciudad de México.

ISBN: En trámite
Plan de estudios 2012, actualizado 2016.

"Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales"

"Reservados todos los derechos bajo las normas internacionales. Se le otorga el acceso no exclusivo y no transferible para leer el texto de esta edición electrónica en la pantalla. Puede ser reproducido con fines no lucrativos, siempre y cuando no se mutile, se cite la fuente completa y su dirección electrónica; de otra forma, se requiere la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales."

Hecho en México

OBJETIVO GENERAL

Al término del curso, el alumno reunirá habilidades en el manejo del cálculo diferencial e integral para aplicarlo en el planteamiento, resolución e interpretación de problemas del área de informática.

TEMARIO DETALLADO

(64 horas)

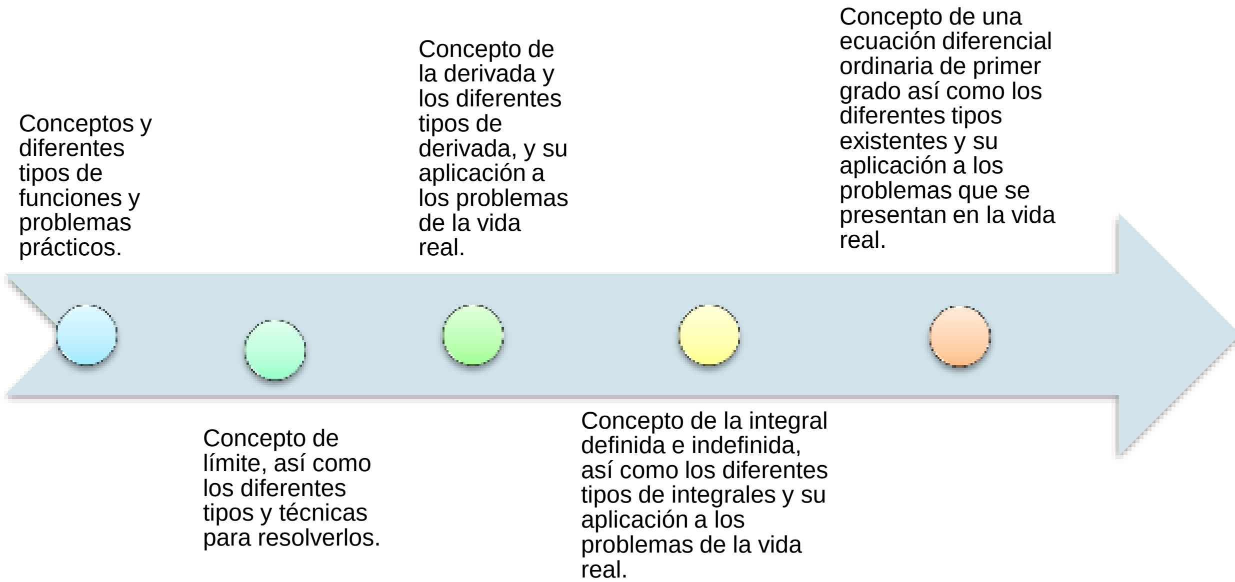
	Horas
1. Funciones	8
2. Límites	10
3. Derivadas	14
4. Integral	12
5. Ecuaciones diferenciales	10
6. Prácticas en laboratorio	10

INTRODUCCIÓN

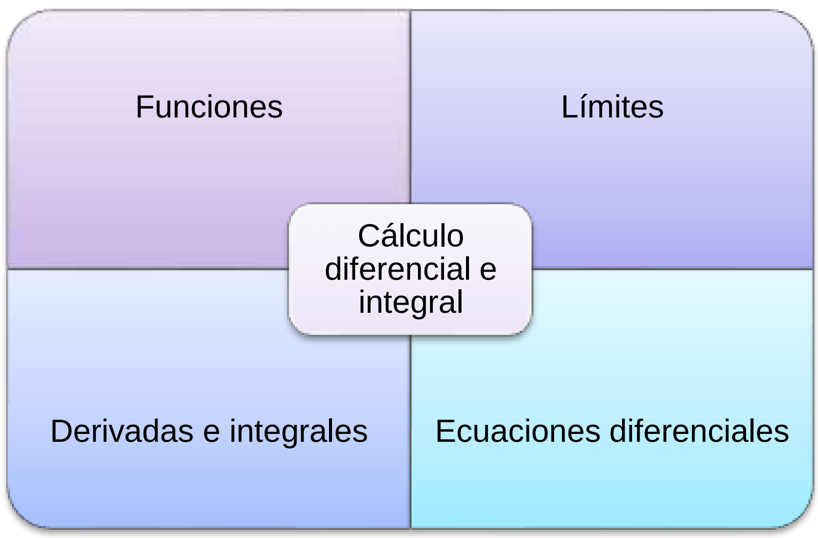
El objetivo de los presentes apuntes de Matemáticas III es lograr que el estudiante conozca de una manera cercana los conocimientos más importantes del “Cálculo Diferencial e Integral”, como son los conceptos y elementos fundamentales, entre otros: las “Funciones”, los “Límites”, la “Derivada”, la “Integral” y las “Ecuaciones **Diferenciales**”; y de esta manera poder elaborar software más eficiente.

Además se pretende que el contenido temático de esta asignatura sirva como referencia de apoyo para la comprensión y raciocinio de otras que comprenden el Plan de Estudios de la Licenciatura en Informática, que por sus características implican saber, definir y comprender conceptos y procedimientos que sean fundamentales para optimizar las labores cotidianas.

Se ha tratado de exponer todos los temas de la asignatura de una manera clara y sencilla, utilizando un lenguaje simple para que el estudiante encuentre interés en el campo del “Cálculo Diferencial e Integral”. Por lo que la disposición es como sigue:

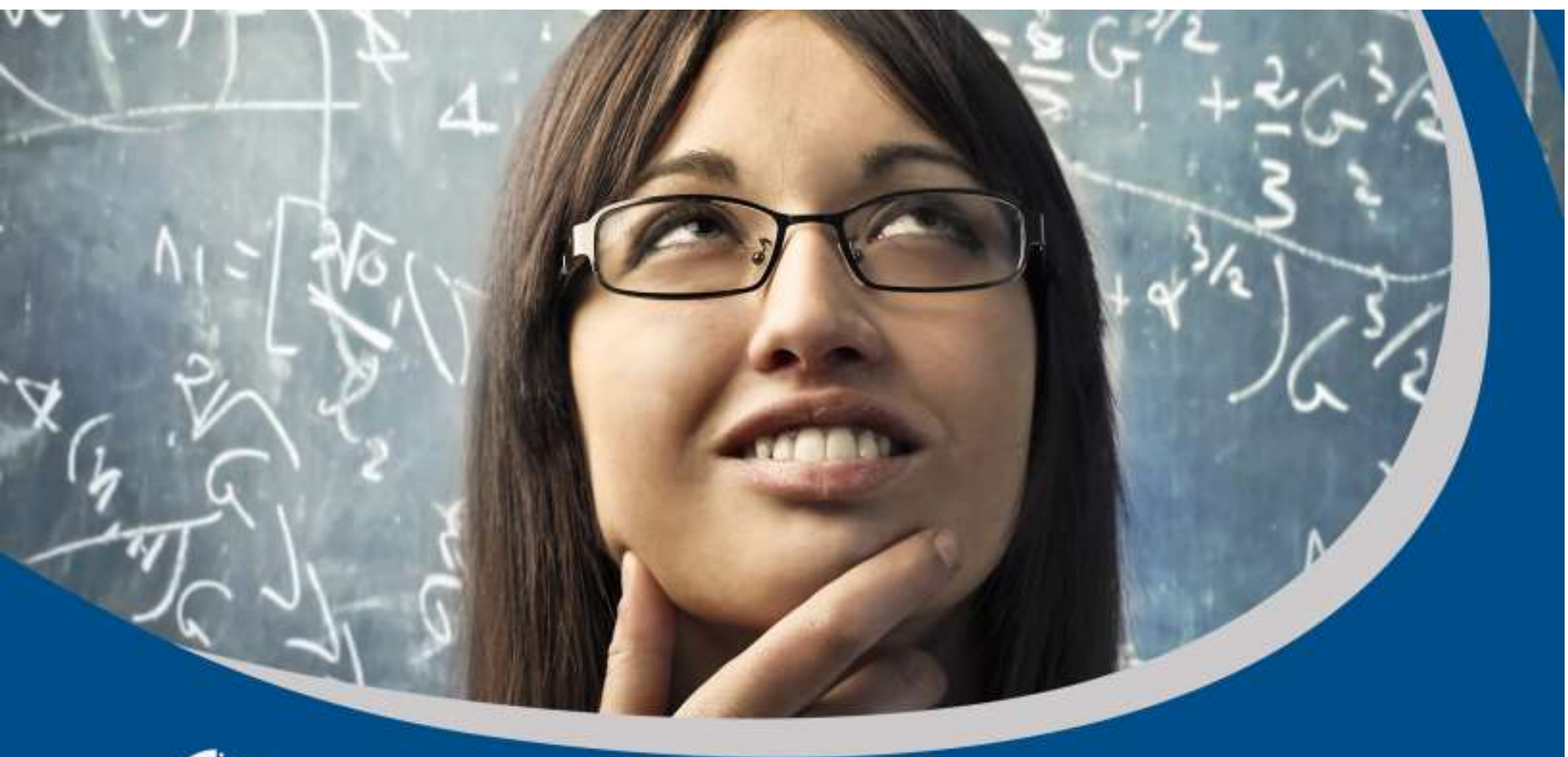

Conceptos y diferentes tipos de funciones y problemas prácticos.
Concepto de límite, así como los diferentes tipos y técnicas para resolverlos.
Concepto de la derivada y los diferentes tipos de derivada, y su aplicación a los problemas de la vida real.
Concepto de la integral definida e indefinida, así como los diferentes tipos de integrales y su aplicación a los problemas de la vida real.
Concepto de una ecuación diferencial ordinaria de primer grado así como los diferentes tipos existentes y su aplicación a los problemas que se presentan en la vida real.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL



UNIDAD 1

Funciones



SUAyED UNAM
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012 2016 actualizado

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá la naturaleza y los diferentes tipos de funciones, así como sus aplicaciones.

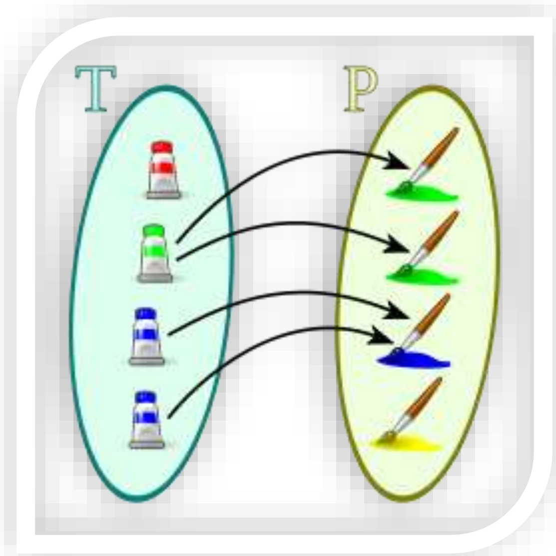
TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

1. Funciones

1.1. Naturaleza y definición de función matemática
1.2. Principales tipos de funciones
1.2.1. Función lineal y su representación geométrica
1.2.2. Función cuadrática y su representación geométrica
1.2.3. Función polinomial y su representación geométrica
1.2.4. Función exponencial y su representación geométrica
1.2.5. Función logarítmica y su representación geométrica
1.3. Aplicaciones de la funciones

INTRODUCCIÓN



En la presente unidad se muestran los conceptos de “Función”, “Dominio” y “Codominio”, los cuales son necesarios para abordar las unidades subsecuentes. También se muestran algunos “Tipos de Funciones” así como aplicaciones de las funciones.

1.1. Naturaleza y definición de función matemática

El concepto de *función* es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Cualquier estudio en el que se utilicen las matemáticas para dar solución a problemas prácticos o en el que se requiera el análisis de datos empíricos se emplea este concepto matemático. La función es una cantidad dependiente que está determinada por otra.

Definición de Función

Una función f(x) es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x del dominio con un solo elemento f(x) de un segundo conjunto (con uno y sólo uno) llamado rango o contra dominio de la función, es decir, si x_1 es diferente de x_2 entonces $f(x_1)$ es diferente de $f(x_2)$.

Una función consta de tres partes:

1. Un conjunto A llamado dominio de la función.
2. Un conjunto B llamado contra dominio de la función.
3. Una regla de correspondencia f que asocia a todo elemento de A, uno y sólo un elemento del conjunto B.

La regla debe tener las siguientes propiedades:

- Ningún elemento del dominio puede quedar sin elemento asociado en el contra dominio.
- Ningún elemento del dominio puede tener más de un elemento asociado en el contra dominio o codominio. Esto no excluye que varios elementos del dominio tengan al mismo algún elemento asociado en el contra dominio.

Si tenemos los conjuntos A y B, y la regla de correspondencia se cumple con las propiedades señaladas, entonces, la terna (A, B, f) es una función cuya notación es:

$$f : A \rightarrow B$$

Función de conjunto A va hacia conjunto B

Otra forma es:

$$f\ (x)$$

Función de X

- Se emplean por lo regular las letras f(x), g(x) o h(x) para simbolizar una función.
- Si (x) es un elemento de A, entonces el elemento de B asociado a (x) por medio de la regla de correspondencia se expresa como f(x) y se le llama la imagen de (x) bajo (f).
- La regla de correspondencia de una función puede estar dada por un diagrama, una ecuación, una tabla de valores y una gráfica.

Diagrama

El diagrama se construye formando dos óvalos y uniendo estos con una flecha que parte del primer óvalo hacia el segundo (dirección de izquierda a derecha).

En el interior del primer óvalo se anotan los valores de entrada de la función (dominio), en el segundo se anotan los valores de salida de la función (contra dominio), se une con una flecha el valor de entrada con el valor de salida como se muestra en la siguiente figura:

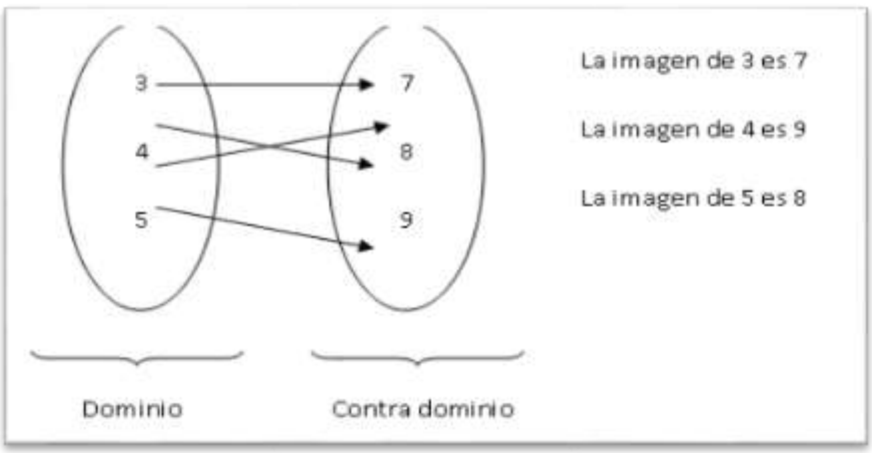


Diagrama de la regla de correspondencia de una función

Ecuación

En este caso se requiere plantear una ecuación con dos incógnitas como la que se muestra a continuación:

$$3x^2 - y + 4 = 0$$

Como primer paso se despeja la variable dependiente (y), $\therefore y = 3x^2 + 4$

A la expresión anterior la presentamos en forma de función $f\ (x) = 3x^2 + 4$, en donde la función (f) es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) tales que x y y satisfacen a la ecuación $3x^2 - y + 4 = 0$, y se denota como:

$$f = \{(x, y)/y = 3x^2 + 4\}$$

En el dominio de la función están todos los posibles valores que toma la variable independiente (x) y los valores extremos; en el contra dominio de la función se encuentran todos los valores posibles que pueden asignarse por el dominio y regla de transformación a la variable dependiente (y).

Ejemplo:

Sea la función (f) cuya regla es $f\ (x) = 3x^2 + 4$

El dominio es: {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}

Los valores extremos son: - 3 y 3

El contra dominio es {31, 16, 7, 4, 7, 16, 31} y está determinado por el dominio y la regla de transformación.

Una función que va de los reales a los reales se expresa con la notación: $f: R \rightarrow R$

Los valores extremos en este caso no están determinados (no existen) en el dominio, porque éste contiene todos los números reales, el contra dominio está formado por todos los números R y la regla de correspondencia está dada por una ecuación.

En los casos en que no se indica o se especifica el dominio de la función, entonces, se debe entender que el dominio incluye todos los números reales (o también llamado dominio natural).

Ejemplo de funciones:

Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$

El dominio es todos los números reales $Rf\{x \in R\}$ y el contra dominio también está formado por todos los R.

Para este tipo de funciones polinomiales el dominio siempre será el conjunto de los números reales R.

Si $f(x) = \frac{4}{x-2}$

$f(x) = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0}$ operación no determinada.

El dominio son todos los reales excepto el 2, ya que la división entre cero no está determinada por lo tanto $f = \{x \in R/x \neq 2\}$

El contra dominio está formado por todos los números reales positivos excepto el cero, D = {y ∊ R+/ (0 < x < ∞)}

Para este tipo de funciones racionales el dominio siempre será el conjunto de los números reales excepto los que hacen cero el denominador de la función.

Si $f(x) = \sqrt{5x + 2}$

- El radical se expresa de la siguiente forma: $5x + 2 \geq 0$
- El signo debe ser $\geq$, porque no existen raíces cuadradas de números negativos.
- Se despeja el valor de x de la inecuación $x \geq -\frac{2}{5}$
- El dominio de $F = \left\{x \in R / x \geq \frac{2}{5}\right\}$

Para este tipo de función con radical y el índice par, el dominio siempre será formado por todos los números que hagan al radical igual o mayor que cero.

Casos en el que una expresión no cumple con ser una función:

a) La expresión $y > x$ no define una función puesto que hay muchos valores de y para cada valor de x.

b) La expresión $x = y^2$ no define una función puesto que hay dos valores de y para cada valor positivo de x.

c) $x^2 + y^2 = 9$ no define una función, porque para cada valor positivo de (x) hay dos de (y).

Tabla de valores

Se selecciona la expresión que se va a analizar.

Se construye una tabla que debe incluir la variable independiente *(x)* y la variable dependiente *(y).*

Dentro de la tabla se anotan los valores de entrada (variable independiente) y se registran todos los valores de salida *(variables dependientes).*

Ejemplo:

Sea la función $f\ (x) = x + 2$

Utilizando la tabulación, se registran los valores que toma (x) para encontrar los valores de y; esto se puede apreciar en la tabla en donde los puntos extremos del dominio son –2 y 4

x	-2	-1	0	1	2	3	4	Dominio
y	0	1	2	3	4	5	6	Contra dominio

Tabulación de la función $f(x) = x + 2$

1.2. Principales tipos de funciones

1.2.1. Función lineal y su representación geométrica

Una función lineal tiene la forma:

$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}$ con $\mathrm{A} \neq 0 \; y \; \mathrm{B} \neq 0$
(A, B, C son constantes)

Es la ecuación general de la línea recta y su representación gráfica es una línea recta.

En particular $f(x) = ax + b$ es una función de primer grado o función lineal. Cuando se expresa en la forma *y* = *mx* + *b* se le llama a la ecuación pendiente-ordenada al origen.

(m) representa la pendiente, (b) es el punto donde corta al eje de las ordenadas (y).

- La pendiente se puede calcular si se conocen dos puntos por donde pase la recta $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ entonces: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Conociendo la pendiente y un punto se puede encontrar la ecuación de la línea recta con la ecuación punto-pendiente. $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

1.2.2. Función cuadrática y su representación geométrica

La función cuadrática tiene la forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \text{con} \quad A \neq 0$$

Es la ecuación general de segundo grado, su representación grafica es una parábola.

La ecuación de una parábola es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Para realizar la gráfica son necesarios tres pasos:

a) Para determinar hacia dónde abre la parábola, es necesario conocer cuál es el signo del coeficiente de x^2.

- a.1) Si es positivo, la parábola abre hacia arriba, $a > 0$
- a.2) Si el signo es negativo, la parábola abre hacia abajo, $a < 0$

b) El vértice de la parábola es el punto máximo o mínimo de la parábola, se encuentra utilizando las siguientes expresiones:

- $Vx = \frac{-b}{2a}$ vértice en x ; $Vy = \frac{4ac-b^2}{4a}$ vértice en y

c) La parábola siempre corta el eje de las ordenadas, para determinar en dónde lo corta se realizan los siguientes pasos:

- c.1) Hacer $x = 0$
- c.2) Sustituir éste en la ecuación: $y = a(0)^2 + b(0) + c = c$, entonces la parábola corta el eje de las ordenadas en el punto $(0, c)$.

Ejemplo:

Sea $y = 3x^2 + 12x$

Entonces:

- La parábola abre hacia arriba porque a = 3 > 0.
- El vértice se encuentra en el punto (-2, -12).
- La parábola corta los ejes en los puntos (0, 0) y (-4, 0).

1.2.3. Función polinomial y su representación geométrica

Cualquier función que pueda obtenerse a partir de la función constante y de la función identidad mediante las operaciones de adición, sustracción y multiplicación se llama función polinomial, es decir f es de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Los valores de a_n , $a_{n-1}, \ldots$ a_0.son constantes (números reales).

Y $a_n \neq 0$ y n es un entero no negativo y también indica el grado de la función polinomial.

1.2.4. Función exponencial y su representación geométrica

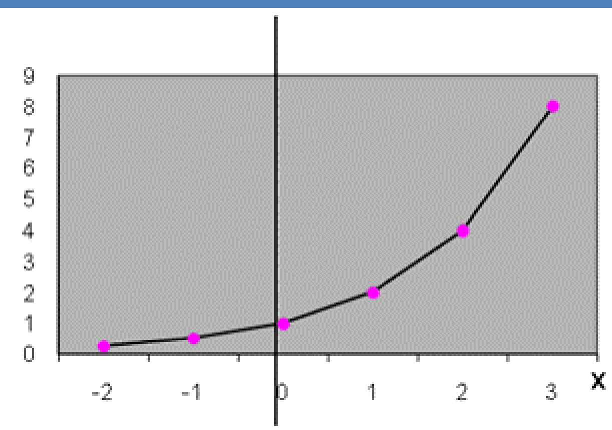
La función exponencial se expresa como:

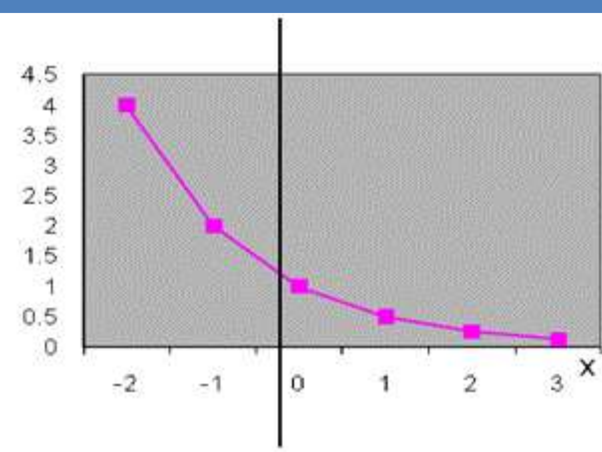
$$f(x) = b^x \quad ; \quad si\; b > 0 \quad y \quad b \neq 1$$

En donde:
b es la base de una función exponencial.
x es el exponente de la función exponencial.

El dominio está formado por todos los números reales $D_f = \{R\}$

Ejemplos:

<table>
<tr><th>a) f(x) = 2^x</th><th>b) f(x) = (1/2)^x</th></tr>
<tr><td>


Función exponencial de base 2
</td><td>


Función exponencial de base 1/2
</td></tr>
</table>

Propiedades de la función exponencial

Si **a > 0, b > 0 y (x), (y)** elementos de los reales (R) entonces:

Teorema 1

- 1.1. $a^x * a^y = a^{x+y}$
- 1.2. $(a^x)^y = a^{xy}$
- 1.3. $(a * b)^x = a^x b^x$
- 1.4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- 1.5. $\left[\frac{a}{b}\right]^{x} = \frac{a^x}{b^x}$

Teorema 2

- 2.1. $Si\ a > 1,\ \begin{cases} a^x > 1, & cuando\ \ x > 0 \\ a^x < 1, & cuando\ \ x < 0 \end{cases}$
- 2.2. $Si\ a < 1,\ \begin{cases} a^x < 1, & cuando\ \ x > 0 \\ a^x > 1, & cuando\ \ x < 0 \end{cases}$

Las leyes de los exponentes facilitan los cálculos de estas funciones.

También dentro de esta función se define la función exponencial natural que tiene como base el número (e) y es de la forma:

$$y = ex$$

1.2.5. Función logarítmica y su representación geométrica

Si **b > 0** y **b ¹ 0**,

entonces:

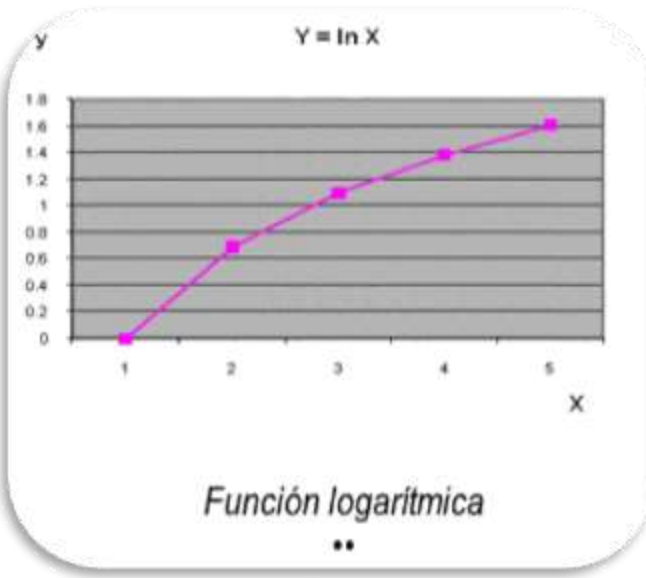
$y = \log_b x$ si y sólo si **$x = b^y$; $x > 0$**

Con el dominio de la función **$D_f = \{R+\}$**

$$y = \log_b x$$

Logaritmo de base (b) de (x) igual a (y)

Los cálculos en funciones logarítmicas se facilitan con las leyes de los logaritmos. Dentro de esta función se define la función logaritmo natural que tiene como base al número (e) y es de la forma: $y = In\ x$



Función logarítmica

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos comunes o de base 10 (Briggs) se denotan como log x, la base 10 no se escribe. El logaritmo natural (neperiano) de base e (e = 2.718281828) se denota como: ln x.

LOGARITMO	
Nombre	**Expresión**
Logaritmo de la base	$\log_a a = 1$
Cambio de base	$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$
Producto	$\log(a * b) = \log a + \log b$
Cociente	$\log(ab) = \log a - \log b$
Potencia	$\log a^n = n \log a$
Raíz	$\log\ {}^{n} a = \frac{1}{n} \log a$
Estas propiedades se cumplen para logaritmo con cualquier base.	
Nota: $\boldsymbol{\log a^n \neq (\log a)\ ^n = \log\ {}^n a}$	

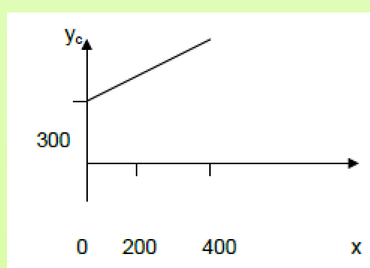
1.3. Aplicaciones de las funciones

Ejemplo de Funciones Lineales:

Producción		
Problema Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de \$150 y los costos fijos son de \$20,000 al día, si vende cada reloj a \$200, ¿cuántos relojes deberá producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?	**Solución** Sea (x) el número de relojes producidos y vendidos cada día. El costo total de producir (x) relojes es: y_c**= costos variables + costos fijos = 150x +20000** Dado que cada reloj se vende a \$200, el ingreso (I) obtenido por vender (x) relojes es **I = 200x** El punto de equilibrio se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir: **200x = 150x + 20000** Obtenemos que 50x = 20000 ó x = 400.	**Resultado** Se deben producir y vender al día **400** relojes para garantizar que no haya ni utilidades ni pérdidas.

Punto de equilibrio de mercado		
Problema La demanda para los bienes producidos por una industria está dada por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, en donde (p) es el precio y (x) es la cantidad de demanda. La oferta está dada por p = x + 7 ¿Cuál es el precio y la cantidad del punto de equilibrio?	**Solución** El precio y la cantidad del punto de equilibrio son los valores positivos de (p) y (x) que satisfacen a la vez las ecuaciones de la oferta y la demanda. $\mathrm{p}^2 + \mathrm{x}^2 = 169 \quad (1)$ $\mathrm{p} = \mathrm{x} + 7 \qquad (2)$ Sustituyendo el valor de (p) de la ecuación (2) en la ecuación (1) y simplificando $(\mathrm{x}+7)^2 + \mathrm{x}^2 = 169$ $2\mathrm{x}^2 + 14\mathrm{x} + 49 = 169$ $\mathrm{x}^2 + 7\mathrm{x} - 60 = 0$ Factorizando encontramos que: $(x+12)(x-5) = 0$ Lo cual da x=-12 ó 5 El valor negativo de x es inadmisible, de modo que x = 5 es el correcto. Sustituyendo x = 5 en la ecuación (2), se tiene: P = 5 + 7 = 12	**Resultado** El precio de equilibrio es 12 y la cantidad de equilibrio es 5.

Modelo de costo lineal

Problema	Solución
Problema El costo de procesar un kilo de granos de café es de $0.50 y los costos fijos por día son de $300. a). Encuentra la ecuación de costo lineal y dibuja su gráfica. b). Determina el costo de procesar 1,000 kilos de granos de café en un día.	**Solución** Si y_c representa el costo de procesar (x) kilos de granos de café por día, entonces se emplea la siguiente expresión: ***Modelo lineal*** Costo total = costo variable total + costos fijos $\mathbf{y_c = mx + b}$ **(1)** **a)** La ecuación (1) es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuyo costo fijo es la ordenada al origen. En este caso m = $0.50 y b = $300, por lo tanto: $\mathbf{y_c = 0.5x + 300}$ **(2)** Para dibujar la gráfica primero encontramos dos puntos sobre ella. Haciendo x = 0 en la ecuación (2), tenemos que y = 300, haciendo x = 200 en la ecuación (2), tenemos que y_c = 0.5 (200) +300 = 400. De modo que dos puntos que satisfacen la ecuación (2) de costo son (0,300) y (200,400). Graficando estos puntos y uniéndolos mediante una línea recta, obtendremos la gráfica que aparece en la gráfica. **b)** Sustituyendo x =1000 en la ecuación (2), obtendremos: $\mathbf{y_c = 0.5(1000) + 300 = 800}$ En consecuencia el costo de procesar l000 kilogramos de café al día será de $800. 

Modelo de costo lineal

Problema

El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de $35,000, mientras que cuesta $60,000 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación entre el costo total y_c de producir (x) máquinas de escribir al día y dibuje su gráfica.

Solución

Se nos dan los puntos (10,35000) y (20,60000) que están sobre la gráfica del modelo lineal, la pendiente de la línea que une estos dos puntos es:
Empleando la fórmula de punto-pendiente:

$$m = \frac{60000 - 35000}{20 - 10} = \frac{25000}{10} = 2500$$

Empleando la fórmula de punto-pendiente:

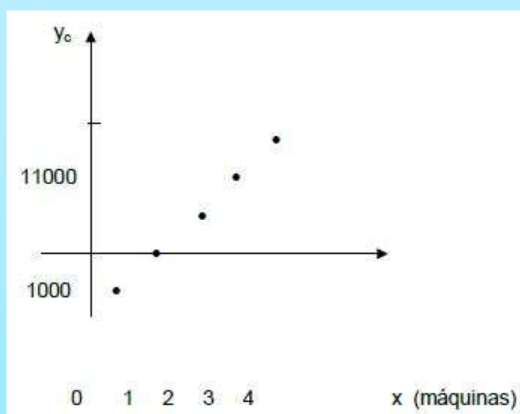
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y_c - 35000 = 2500(x - 10)$$
$$= 2500x - 25000$$

$$y_c = 2500x + 1000$$

X	0	1	2	3	4
y_c	1000	3500	6000	8500	11000

La gráfica de la ecuación (3) no es una línea recta continua porque (x) no puede tomar valores fraccionarios al representar el número de máquinas de escribir producidas. La variable (x) sólo puede tomar valores enteros 0, 1, 2,3,.....



Depreciación lineal

Problema

Una empresa compra maquinaria por $150,000; se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con valor de desecho de cero. Determina la cantidad de depreciación por año y una fórmula para el valor depreciado después de (x) años.

Solución

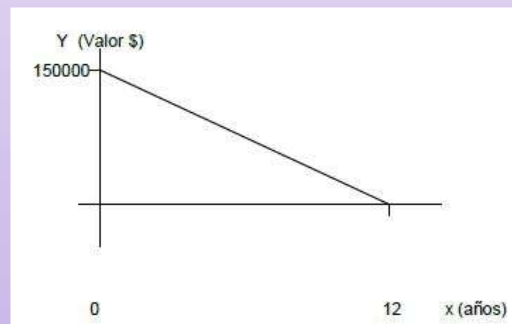
Tasa de depreciación (por año) = (Valor inicial - Valor de desecho) (vida útil en años)

Depreciación por año=(precio de adquisición inicial) ÷ (vida útil en años)

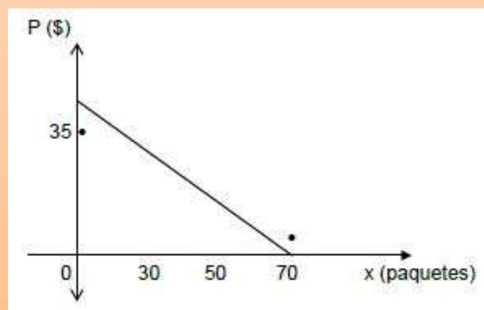
= $ 150000 ÷ 12 años
= $ 12500

Valor después de x años=(valor inicial) – (depreciación por año)(número de años)

y = $ 150, 000 – ($ 12, 500 por año)(x años)
y = $ 150000 – 12500 x



Demanda

Problema	Solución
Un comerciante puede vender 20 paquetes de rastrillos al día al precio de $25 cada uno, pero puede vender 30 si les fija un precio de $20 a cada paquete. Determinar la ecuación de demanda.	x la cantidad de demanda y el precio p por unidad $x = 20,\ p = 25$ y $x = 30,\ p = 20$ La pendiente de la línea recta de demanda es: $m = \frac{20-25}{30-20} = \frac{-5}{10} = -0.5$ La ecuación de la demanda se encuentra a partir de la ecuación general de la línea recta $y - y_1 = m(x - x_1)$ $m = -0.5$ $p - 25 = -0.5(x - 20)$ La ecuación de la demanda es: $p = -0.5 + 35$ 

Interés

Problema	Solución
El licenciado Álvarez cuenta con un capital de $35,000. Parte de este dinero lo invierte en una cuenta de ahorro que le paga el 8% de interés simple y el dinero restante lo invierte en un negocio que produce el 12% de interés simple. ¿Qué cantidad debe invertir en cada caso para obtener una ganancia del 11% sobre su dinero después de un año?	Sea (x) la cantidad invertida en la cuenta de ahorros al 8% y $35,000 – x la cantidad de dinero invertido en el negocio al 12%. El interés obtenido por la cuenta bancaria es: **I = Cnt = x(0.08)(1) = 0.08x (1)** El interés obtenido por la inversión en el negocio es: **I = Cnt = (35000 – x)(0.12)(1) = 0.12(35000 – x) (2)** El interés recibido por las dos al 11% (el total) es: **I = 0.11 (35000) (3)** Sumando la ecuación 1 y 2 e igualando el resultado de estas con la ecuación 3 se tiene: **0.08x + 0.12(35000 - x) = 0.11(35000) (4)** Despejando x: -0.04x = -350 x = 8750 La interpretación de este resultado es el siguiente: en la cuenta de ahorros se depositan $8750. De la ecuación 2 tenemos: 35000 – x = 35000 – 8750 Despejando x x = 26250 La interpretación de este resultado es: **La inversión en el negocio es de $26,250.**

RESUMEN

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requiere calcular valores para diferentes tipos de “Funciones” a fin de que satisfagan la solución de un problema en cuestión.

Para la obtención de estos valores existen diversas metodologías que permiten realizarlo y en esta variedad de metodologías es donde tiene su mayor importancia del cálculo diferencial e integral.

Además las empresas requieren hacer uso muy frecuente de estas metodologías; dado que está conformada por diversas áreas funcionales en donde se toman de manera constante decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Haeussler y Paul (1997)	3. Funciones y Gráficas	83-121
	4. Rectas, Parábolas y Sistemas	124-175
	5. Función Exponencial y Logarítmica	179-218
Hoffman y Bradley (1995)	1. Funciones, Gráficas y Límites	1-79
Leithold (1982)	1. Números Reales, Introducción a la Geometría Analítica y Funciones	2-74
Leithold (1988)	1. Números Reales, Gráficas y Funciones.	3-55
Swokowsky (1983)	3. Funciones	100-156
	4. Funciones Polinomiales	159-206
	5. Funciones Exponenciales y Logarítmicas	209-245

Haeussler Jr. Ernest; Paul, Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Swokowsky, Earl W. (1983). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica.

UNIDAD 2

Límites

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá el concepto, propiedades y aplicaciones de los límites.

TEMARIO DETALLADO

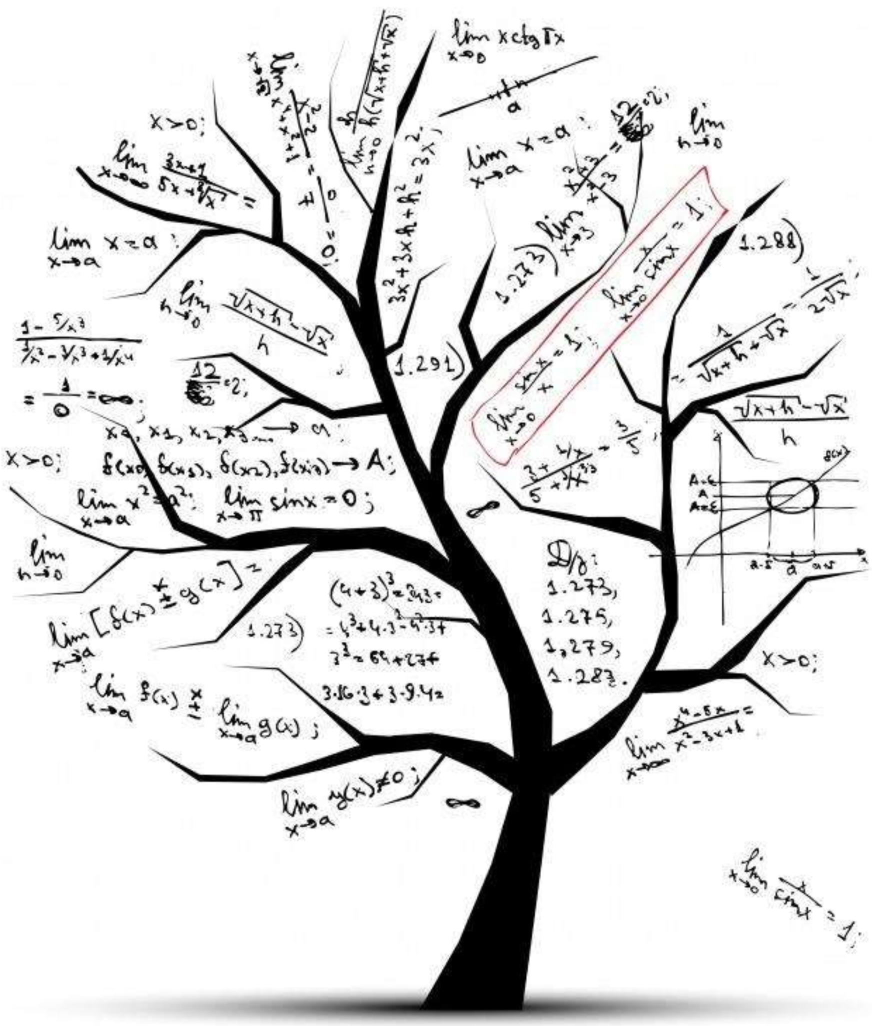
(10 horas)

2. Límites

2.1. Límite de una función
2.2. Propiedades de los límites
2.3. Límites al infinito
2.4. Propiedades de los límites al infinito
2.5. Aplicaciones de los límites

INTRODUCCIÓN

En la presente unidad se muestra el concepto de “Límite” aplicado a todo tipo de funciones; así como sus propiedades y por consiguiente la definición en la cual se establece si las funciones tienen o no límite. Finalmente se muestran las diferentes metodologías para resolver los límites de diferentes tipos de funciones.



2.1. Límite de una función

Sea f(*x*) una función que está definida en todos los valores cercanos a (a), con la excepción de sí mismo. Se dice que L es el límite de f(*x*) cuando (*x*) tiende a (a), si la diferencia entre f(*x*) y (L) puede hacerse tan pequeña como se desee, con sólo restringir (*x*) a estar lo suficientemente cerca de (a).

Quedando entonces representado como:

$$\underset{x \to a}{Lím}\, f(x) = L$$

Ejemplos

1. Considerando la función (f) definida por la ecuación:

$$f(x) = \frac{(2x+3)(-1)}{x-1}$$

Solución*:*

(f) está definida para todos los valores de (x) excepto cuando x = 1. Además, si x→1, el numerador y el denominador pueden ser divididos entre (x – 1) para obtener:

$$f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad x \to 1$$

Como se muestra a continuación:

Toma los valores, 0, 0.25, 0.50, 0.75. 0.9, 0.99, 0.999 y así sucesivamente.

Entonces (*x*) toma valores cada vez más cercanos a 1, pero (*x*) nunca toma el valor de 1, en otras palabras, la variable (*x*) se aproxima por la izquierda a 1 a través de valores que son números menores muy cercanos a éste.

Ahora si analizamos a la variable (*x*) cuando se aproxima por el lado derecho a 1, a través de valores mayores que éste, esto hace, por ejemplo, que (*x*) tome valores de 2, 1.75, 1.50, 1.25, 1.10, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, y así sucesivamente, pero nunca toma el valor de 1.

Acercándonos a 1 por la izquierda se tiene lo siguiente:

x	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999
f(x) = 2x + 3	3	3.5	4	4.5	4.8	4.98	4.998	4.9998

Límite por la izquierda

Pero $x \neq 1$

Acercándonos a 1 por la derecha se tiene lo siguiente y siempre **x ≠ 1**:

X	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001
f (x) = 2x + 3	7	6.5	6	5.5	5.2	5.02	5.002	5.0002

Límite por la derecha

Se observa en ambas tablas a medida que (*x*) se aproxima cada vez más a 1, f(*x*) también se aproxima cada vez a 5 y entre más cerca esté (*x*) de 1, más cerca f (*x*) a 5, en consecuencia, cuando (*x*) se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha, f(*x*)=2x+3 se acerca a 5.

Se indica que el límite de f(*x*) cuando (*x*) tiende a 1 es igual a 5, esto se representa así:

$$lím\ (2x+3)=5\ \ ;\ \ x\to 1$$

Finalmente se puede concluir que el límite de la función (f) es:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} = 5$$

Del ejemplo anterior se puede concluir: f(x) no está definida en x = 1, sin embargo, lím f(x) existe cuando x→ 1y este es igual a 5.

2. Encontrar el límite de la función definida por:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$$

Solución:

Sustituyendo el valor de tres, donde se encuentra la (x), se tiene:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(3)^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}\ operación\ no\ determinada$$

Conclusión:

f(x) no está definida en x = 3, sin embargo, $\lim_{x\to 3} f(x)$ existe porque la podemos escribir como:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = 6$$

Una función f(x) es continua en x = a si la función f(a) como el $\lim_{x \to a} f(x)$ existen y son iguales.

2.2. Propiedades de los límites

Las propiedades básicas de las operaciones con límites de una función: Sean (f) y (g) dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} \text{lím}\, g(x) = M$, si los dos límites existen;

Entonces:

1. $\lim_{x \to a} \mathbf{k[f(x)] = k} \lim_{x \to a} \mathbf{f(x) = kL}$
2. $\lim_{x \to a} \mathbf{f(x) \pm g(x) =} \lim_{x \to a} \mathbf{f(x) \pm} \lim_{x \to a} \mathbf{g(x) = L \pm M}$
3. $\lim_{x \to a} \mathbf{f(x) \bullet g(x) =} \lim_{x \to a} \mathbf{f(x) \bullet} \lim_{x \to a} \mathbf{g(x) = L \bullet M}$
4. $\lim_{x \to a} \mathbf{f(x) \div g(x) =} \lim_{x \to a} \mathbf{f(x) \div} \lim_{x \to a} \mathbf{g(x) = L \div M, \quad M \neq 0}$
5. $\lim_{x \to a} \mathbf{x^n = a^n}$
6. Si $\mathbf{k}$ es una constante $\lim_{x \to a} \mathbf{k = k}$
7. Si $\mathbf{m, b}$ y $\mathbf{c}$ son tres constantes, entonces $\lim_{x \to c} \mathbf{(mx + b) = mc + b}$

De acuerdo con el análisis de las propiedades de límites se podrá observar que el valor límite de una función se puede obtener con la simple sustitución del valor de límite de (x) en la función dada. Este método de sustitución siempre nos lleva a una respuesta correcta, si la función es continua en el límite que se está evaluando.

Todos los polinomios son funciones continuas y cualquier función racional es continua, excepto en los puntos en que el denominador se hace cero, dando como resultado del cálculo de un límite que la operación no esté determinada y se concluye que el límite no existe (0 / 0 ó una constante divida entre cero d /0).

Ejemplos:

1. Calcular el límite de la siguiente función, cuando: $x \to -1$ $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$	Haciendo $x = -1$ en la fórmula válida para $f(x)$, tenemos $f(-1) = \frac{(-1)^2+3(-1)+2}{1-(-1)^2} = \frac{0}{0}$ la operación no esta determinada Factorizando $\lim_{x \to -1} = \frac{x^2+3x+2}{1-x^2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{x+2}{1-x} = \frac{-1+2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ entonces: $\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{2}$

2. Determine: $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$	Racionalizando se tiene: $\lim_{x \to -1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

3. Determine: $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{5x^3 - 15}$	$\lim\limits_{x \to 2} (5x^3 - 15)^{\frac{1}{2}} = \left[\lim\limits_{x \to 2} (5x^3 - 15)\right]^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} = 5$

2.3. Límites al infinito

En ocasiones existen límites que su solución no se puede obtener directamente y en este caso la utilización de la metodología de límites al infinito es una técnica que consiste en transcribir el límite en términos de $\frac{1}{x}$ en lugar del término x, de esta forma se logra que el término $\frac{1}{x}$ cuando x tiende al infinito, el límite tiende a cero.

Una propiedad de un límite al infinito es la siguiente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

3. Determine: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x-1}$	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

2.4. Propiedades de los límites al infinito

A continuación se mencionarán las propiedades de los límites al infinito:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si se tienen dos polinomios

$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots \ldots + a_1 x^1$ y $h(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots \ldots + c_1 x^1$,

entonces el siguiente límite cuando x tiende a infinito es:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)}$$

Una importante propiedad es que los polinomios en el límite se reducen al término con un mayor exponente, es decir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{c_n x^n} = \frac{a}{c}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+4x^2-4x^1+2}{2x^3+6x^2+4x^1+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{2x^3} = \frac{4}{2} = 2$$

2.5. Aplicaciones de los límites

Funciones continuas

Se define función continua como aquella cuya gráfica es una curva continua, la cual no tiene huecos (vacíos) ni está segmentada.

Para poder resolver problemas de la vida real muchas veces se acude a funciones matemáticas, las cuales deben ser capaces de dar un valor para la función de cada uno de los valores de x, y a lo largo de su trayecto.

Se dice que una función es continua para un valor en *x* = a, si cumple con:

$f(a)$ está definida

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Para que en un límite exista la función debe aproximarse al mismo punto x = a por ambos lados.

Ejemplos:

1. La función $f(x) = x^2$ ¿es continua en $x = 3$?	$f(x) = x^2$ está definida
	$\lim\limits_{x \to 3} x^2 = (3)(3) = 9$
	Valor funcional $f(3) = (3)^2 = 9$ $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = f(3)$ $9 = 9$

Por lo tanto: es para x=3

2. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ¿es continua en x3?	$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ esta definida
	$\lim\limits_{x \to 3} \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$
	$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(a)$ $4 = 4$

Por lo tanto: es para x=3

Funciones discontinua

Cuando no se cumplen las condiciones de continuidad de una función, a ésta se le llama discontinua.

Ejemplos:

1. $f(x) = \frac{5}{x-1}$

¿es discontinua para $x = 1$?

$f(x) = \frac{5}{x-1}$ es discontinua para $x = 1$

$\lim_{x \to 1} = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0} =$ no existe el limite

$f(x) = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0}$ la operación no está definida

Por lo tanto, la función es discontinua en $x = 1$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$

¿es continua en $x = 0$?

$f(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 1$

$\lim_{x \to 0} = \frac{1}{x}$ no existe el limite

$f(0) = \frac{1}{0}$ no está definida la operación

La función es discontinua en $x = 0$, pero la función es continua en $x \neq 0$

Por tanto: La función es discontinua en x = 0, pero la función es continua en x ≠ 0.

De acuerdo con lo visto hasta aquí, se puede afirmar que:

Una función f(x) es continua en un intervalo abierto a < x < b, si es continua en cada x del intervalo. En un intervalo cerrado a ≤ x ≤ b si f(*x*) es continua en el intervalo abierto a < x < b y f(*x*) se aproxima a f(*a*) a medida que (*x*) se acerca al valor de (*a*) por la derecha (para a < x) y f(*x*) se aproxima a f(*b*) a medida que (*x*) tiende al valor (*b*) por la izquierda (para x < b).

RESUMEN

Esta unidad abarca cuatro bloques consistentes en el siguiente orden de estudio:

En primera instancia el alumno comprenderá y analizará el concepto de límite de una función; si este existe o no dentro de un intervalo definido en una determinada función a estudiar.

El estudiante podrá aplicar las distintas propiedades que tienen los límites de distintas funciones cuando estas tienden a un valor determinado a (ejemplo: a = 2, -1, ¼, p, etc.).

Posteriormente el alumno comprenderá y analizará las diferentes propiedades de los límites de distintas funciones cuando estas tienden al infinito.

Finalmente el alumno podrá aplicar los conocimientos adquiridos en problemas diversos del campo profesional utilizando como herramienta de trabajo a los límites.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Granville (1985)	2. Variables, Funciones y Límites.	11-22
Haeussler y Paul (1997)	11. Límites y Continuidad	517-559
Laurence y Bradley (1995)	1. Funciones, Gráficas y Límites.	69-74
Leithold (1982)	2. Límites y Continuidad	79-169
Leithold. (1988)	2. La Derivada	60-84

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul, Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

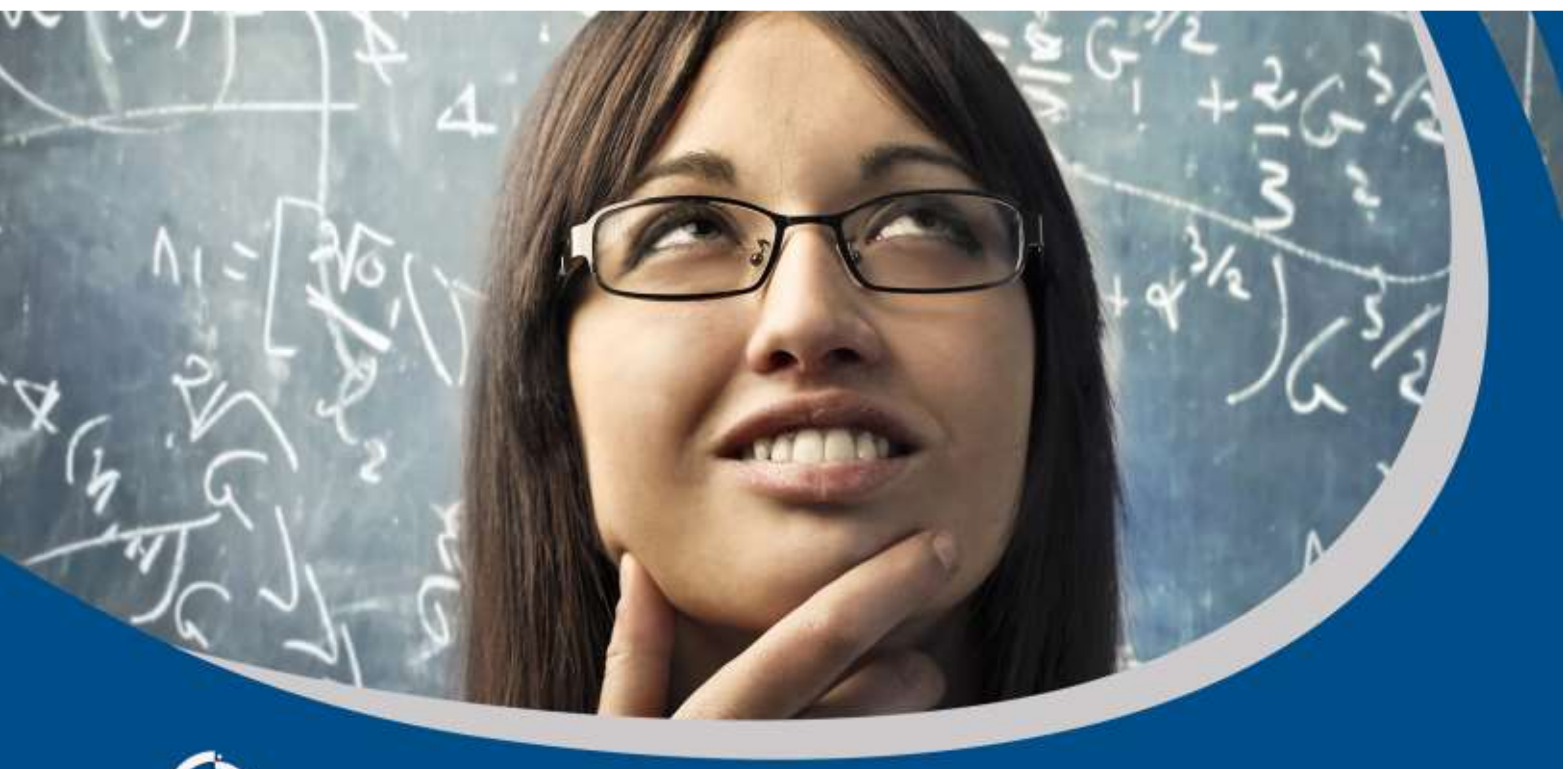
Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

UNIDAD 3

Derivadas



SUAyED UNAM
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012 2016 actualizado

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno interpretará las propiedades y aplicaciones de la derivada.

TEMARIO DETALLADO

(14 horas)

3. Derivadas

3.1. Derivada de una función
3.2. Proceso de cuatro pasos para determinar una derivada
3.3. Uso e interpretación de la derivada
3.4. Reglas para determinar la derivada de una función
3.5. Segunda derivada
3.6. Máximos y mínimos
3.7. Aplicaciones de la derivada

INTRODUCCIÓN

En la presente unidad se muestra el concepto de derivada así como sus propiedades. De igual manera se muestra el método de los cuatro pasos que es la base para la obtención de las fórmulas de las diferentes derivadas. Y por último la aplicación de máximos, mínimos y puntos de inflexión para la solución de problemas diversos que permiten optimizar los recursos de todo tipo.

3.1. Derivada de una función

Interpretación geométrica de la derivada

El cálculo diferencial estudia el cambio que le ocurre a una variable cuando existen variaciones en otra variable de la cual depende la variable original.

Los investigadores del área económico-administrativa se interesan por las razones de cambio promedio e instantáneo y están particularmente interesados en las tasas marginales de cambio, tales como: el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

Para llegar a un concepto claro de derivada, esta sección define lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

Incremento de una variable	Sea y = f(x) una función, con x_1 y x_2, un par de valores en el dominio de (*f*), de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces:	1. El cambio en el valor de *x* al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de *x* y se representa por Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$.
		2. El cambio en el valor de Y al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de y, se representa por ΔY, donde: $\Delta Y = Y_2 - Y_1 = f(X_2) - f(X_1)$

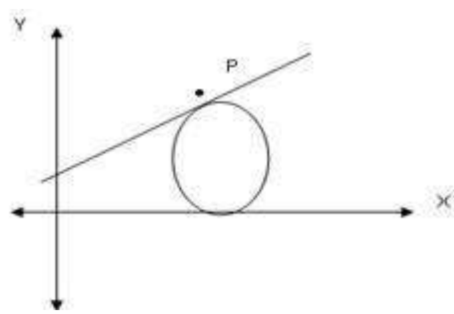
Tasa de cambio

Para entender el comportamiento geométrico de la derivada, se define la tasa de cambio de una función $f(x)$, entre x y$(x + \Delta x)$, al cociente que a continuación se muestra:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Muchos de los problemas importantes del cálculo dependen de encontrar la recta tangente a una curva dada en un punto específico de la curva. Si la curva es una circunferencia, sabemos de la geometría plana que la recta tangente en un punto **P** de la circunferencia se define como la recta que intersecta a la circunferencia únicamente en el punto **P**. Esta definición no es suficiente para cualquier curva en general.

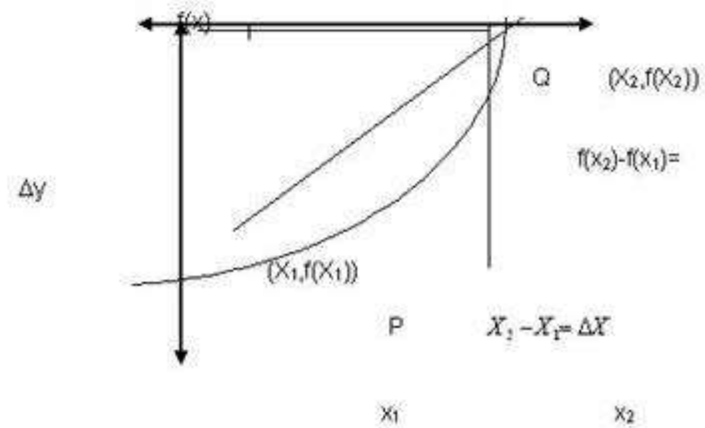
Por ejemplo, en la siguiente figura donde la línea es la recta tangente a la curva en el punto **P**, la cual intersecta a la curva en el punto P.



Para llegar a una definición adecuada de la recta tangente a la gráfica de la función, se comienza por considerar cómo se definiría la pendiente de la recta tangente en un punto, si conocemos la pendiente de una recta y un punto sobre la misma, la recta está determinada (punto-pendiente).

Sea la función (*f*) continua en x_1. Se define la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función (*f*) en P (x_1, $f(x_1)$).

Sea Q (x_2, $f(x_2)$) otro punto sobre la gráfica de la función *f*. que representan la "Pendiente de la Recta Tangente" como sigue:



Cualquier recta que pase por dos puntos de una curva se llama secante; por lo tanto, la recta a través de P y Q es una recta secante. En la figura, está a la derecha de P. Sin embargo, Q puede estar a la derecha o a la izquierda de P.

Denotemos la diferencia de las abscisas de Q y P por Δx tal que:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Δ_x puede ser positivo o negativo. La pendiente de la recta secante PQ está definida por:

$$M_{pq} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ya que $X_2 = X_1 + \Delta x$, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$M_{pq} = \frac{f(x_1 + \Delta_x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Ahora el punto P está fijo, si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia P; entonces Q se aproxima a P. Esto es equivalente a establecer que Δx tiende a cero. Como esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P.

Si esta recta secante tiene un punto límite, a esta posición límite, común de la recta secante se le define como la recta tangente a la curva en P. Así se querría que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en P sea el límite de Mpq cuando Δx se aproxima a cero, y el límite existe.

Esto conduce al proceso denominado método de los cuatro pasos:

1. A la función definida se expresa en función de $f(x + \Delta x)$.

2. A la función $f(x + \Delta x)$ se le resta de $f(x)$. Esto es $f(x + \Delta x) - f(x)$.

3. Después a de $f(x + \Delta x) - f(x)$ se divide entre de Δx.

4. Finalmente a la resultante de los tres pasos desarrollados se le obtiene el límite de $f(x)$ cuando de $\Delta x \rightarrow 0$.

3.2. Derivada de cuatro pasos para determinar la derivada

La **pendiente de una recta** tangente en la gráfica de la función f en el punto $P(x, f(x))$ está dada por:

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta x}$$

Si el límite existe.

El límite que mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $Y = f(x)$en el punto $P(x, f(x))$ recibe el nombre especial de derivada de (f) en (x)).

La derivada de una función (f) con respecto de (x) es la función (f)' (que se lee "f prima de *x*"), definida por:

$$f'(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde el dominio de f' es el conjunto de todas las (x) donde existe límite.

Diferenciación: La operación de calcular la derivada de una función se denomina diferenciación.

Si la derivada de una función existe en un punto (a), se dice que (f) es diferenciable en este punto.

Ejemplo

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto (x_1, y_1)

Si $f(x) = x^2$, entonces:
$f(x_1) = {x_1}^2$ y $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2$

1er. paso

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

2o. paso

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - x_1.^2}{\Delta x}$$

3er. paso

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1.^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - x_1.^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2._1}{\Delta x}$$

Ya que $\Delta x \to 0$ podemos factorizar Δx en el numerador

4o. paso

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1\Delta x_1 - 4}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x$$

Donde: $m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_1 + \Delta x)$

$$m(x_1) = 2x_1$$

Nota: Cuando se obtiene como resultado del cálculo de un límite 0 / 0 o constante / 0, se concluye que el límite no existe.

3.3. Uso e interpretación de la derivada

Cálculo diferencial

Estudia el cambio que le ocurre a una variable cuando existen variaciones en otra variable de la cual depende la variable original.

Los investigadores de las áreas económico-administrativas se interesan por las razones de cambio promedio e instantáneo y están particularmente interesados en las tasas marginales de cambio, tales como: el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

Para llegar a un concepto claro de derivada, esta sección define lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

Definición de incremento de una variable

Sea $y = f(x)$ una función, con x_1 y x_2, un par de valores en el dominio de (f), de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces:

El cambio en el valor de x al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de x y se representa por Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$.

El cambio en el valor de Y al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de Y, se representa por ΔY, donde: $\Delta Y = Y_2 - Y_1 = f(X_2) - f(x_1)$

3.4. Reglas para determinar la derivada de una función

No siempre es sencillo utilizar la definición dada anteriormente para calcular la derivada de algunas funciones, lleva tiempo y cuidado; por ello, es necesario conocer reglas que faciliten este procedimiento. Estas reglas forman lo que se denomina el álgebra de derivadas. La notación $\frac{dy}{dx}$ representa un sólo símbolo y no deberá interpretarse como el cociente de las cantidades de dy y dx, $\frac{dy}{dx}$ indica la derivada dy con respecto a (x) si Y es una función de la variable independiente (x), la derivada también se denota por las siguientes representaciones:

$\frac{d}{dx}(y)$	$\frac{df}{dx}$	$y´$	Dxy	Dxf	$\frac{d}{dx}(f)$

Las principales derivadas algebraicas son las siguientes:

1. Derivada de una constante es igual a cero, si $y = c$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(6) = 0$

b. $\frac{d}{dx}(b) = 0$

Problemas:

a. $\frac{d}{dx} = 18 \quad R. 0$

b. $\frac{d}{dx} = (3b)\ R. 0$

2. La derivada de la potencia *n*-ésima de una variable es el producto del exponente (n) y la potencia del exponente $n - 1$ de la variable, si: $y = xn$

$$\frac{d_y}{d_x} = \frac{d}{d_x}(x^n) = nx^{n-1}$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$

b. $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{8}}\right) = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$

Problemas:

a. $\frac{d}{dx}(x^{-3})\ R. -\frac{3}{x^4}$

b. $\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{5}{3}}\right)\ R. -\frac{5}{3x^{\frac{8}{3}}}$

3. Derivada del producto de una constante y una función.
Si: $y = cu$ en **donde** $u = f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(10x) = 10\frac{d}{dx}(x) = 10$

$\frac{d}{dx}\left(-2x^{\frac{4}{3}}\right) = -2\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{4}{3}}\right) = -2\left[\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{4}{3}-1}\right]$
$= -\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}$

Problemas:

a. $\frac{d}{dx}(4x^3)$ $R. 12x^2$

$\frac{d}{dx}\left(16x^{\frac{1}{2}}\right)$ $R.$ $\frac{8}{x^{\frac{1}{2}}}$

4. Derivada de la suma de un número infinito de funciones. Si: $Y = u + v$ en donde $u = f(x)$ y $v = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$$

Ejemplos:

a. $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x + 2) = 3\frac{d}{dx}(x^2)4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2) = 3(2x) + 4 + 0 = 6x + 4$

b. $\frac{d}{dx}\left(2x - 6x^{-\frac{1}{2}} + 10\right) = 2\frac{d}{dx}(x) - 6\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}(10) = \frac{-3}{x} + 2$

Problemas:

a.1. $\frac{d}{dx}\left(7x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 7x - 5\right)$

$R. \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 7$

a.2. $\frac{d}{dx}\left(16x^{\frac{1}{2}} + 7x + 4\right)$

$R.$ $8x^{-\frac{1}{2}} + 7$

5. Derivada del producto de dos funciones. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$	
Ejemplo: a. $f(x) = (x3+3)(x+2)$ Sea: $u = (x3+3)$ y $v = (x+2)$ b. $f(x) = (x+3)(x+3)$ Sea: $u = x+3$ y $v = x+3$ $(x+3)(1) + \left(x+3\left(\frac{1}{2x}\right)\right)(x+3)\left(\frac{x+3}{2x}\right)$	a. $f(x) = \frac{4}{x^6}$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^6}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{x^{12}}\right)(6x^5) = -\frac{24x^5}{x^{12}} = -24x^{-7}$ b. $f(x) = \frac{36}{x^3+1}$ $\frac{dy}{dx}\left(\frac{36}{x^3+1}\right) = -\frac{108x^2}{(x^3+1)^2}$

a. $f(x) = (x^2+3)^3$ b. $f(x) = (x+3)^{-\frac{1}{3}}$	$\frac{d}{dx}(x^2+3)^3 = 3(x^2+3)^2(2x) = 6x(x^2+3)^2$ $\frac{d}{dx}(x+3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-1}{3(x+3)^{\frac{4}{3}}}$

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas:

Derivada de una constante elevada a una función.

Si: $f(x) = a^n$ en donde $u = f(x)$es una función derivable con respecto a x.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^u) = a^u Lna \frac{du}{dx}$$

a. $f(x) = 2^{-x}$

$\frac{d}{dx}(2^{-x}) =$
$2^{-x}Ln(2)\frac{d}{dx}(-x) - 2^{-x}Ln(2)$

b. $f(x) = 10^{x^2-x}$

$\frac{d}{dx}10^{x^2-x} =$
$10^{x^2-x}In10(2x-1)$

a. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

$$= \frac{x\frac{d}{dx}(e^x) - e^x\frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

b. $f(x) = 10e^{x^2+4}$

$$\frac{d}{dx}\left(10\frac{d}{dx}(x^2+4)\right)$$

$$= 20xe^{x^2+4}$$

a. $f(x) = log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{\log e}{x}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)}{x+1}$$

$$= \frac{\log e}{x\ \ x+1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= \frac{\log e}{x(x+1)}$$

b. $f(x) = \log x$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\log e}{2x\ \log x}$$

3.5. Segunda derivada

Derivadas de las funciones de orden superior: En ocasiones es necesario derivar una función una o más veces. Al resultado de dos o más derivadas en forma consecutiva de una función, se le conoce como derivada de orden superior y se representa de la siguiente forma:

$\frac{d^n y}{dx^n}$ | $f^n(x)$ | y^n

Ejemplo:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

Las derivadas de orden superior son también iguales a cero.

Ejemplo:

b. $f(t) = t^{2+1}$

Solución:

$$\frac{dt}{dy} = t(t^2 + 1)^{-1_2}$$

$$\frac{d^2t}{dy^2} = (t^2 + 1)^{-3_2}$$

$$\frac{d^3t}{dy^3} = -3t(t^2 + 1)^{-5_2}$$

Funciones creciente y decreciente: Este tipo de funciones es también muy importante pues en la vida real una creciente representará los ingresos y ventas que una empresa desea obtener en el presente y futuro así como las decrecientes los gastos y costos.

Función creciente

Se dice que la función es creciente en un intervalo (l), si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$. Si la primera derivada de (f) es positiva en todo un intervalo entonces la pendiente será positiva y (f) será una función creciente en el intervalo.

Función decreciente

Se dice que la función es decreciente en un intervalo (l), si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f\ (x_1) > f(x_2)$. Si la primera derivada de (f) es negativa en todo un intervalo, entonces la pendiente será negativa y (f) será una función decreciente en el intervalo.

Ejemplos:

En $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:

a. Función creciente

b. Función decreciente

c. La función no es creciente no decreciente

Solución: Encontrar la primera derivada

$$f(x) = 5x^2 - 20 + 3$$
$$f(x) = 10x - 20$$

a. (f) será creciente cuando $f(x) > 0$ o cuando: $10x - 20 > 0$ $10x > 20$ $x > 20_{10}$ $x > 2$	b. (f) será decreciente cuando $f(x) < 0$ o cuando: $10x - 20 < 0$ $10x < 20$ $x < 2$	c. (f) no será creciente ni decreciente cuando $f(x) > 0$ o cuando: $10x - 20 = 0$ $10x = 20$ $10X = 2$

En $f(x) = 2x^2 + 10$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:
a. Función creciente
b. Función decreciente
c. La función no es creciente no decreciente
Solución: Encontrar la primera derivada

$$f(x) = 2x^2 + 10$$
$$f(x) = 4x$$

a. (f) será creciente cuando $f(x) > 0$ o cuando: $4x > 0$ $x > 0/4$ $x > 0$	b. (f) será decreciente cuando $f(x) < 0$ o cuando: $4x < 0$ $x < 0/4$ $x < 0$	c. (f) no será creciente ni decreciente cuando $f(x) > 0$ o cuando: $4x = 0$ $x = 0$

En $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$ determinar los intervalos en que f puede describirse como:
a. Función creciente
b. Función decreciente
c. La función no es creciente no decreciente
Solución: Encontrar la primera derivada

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$$
$$f(x) = 3x^2 + 12x$$
$$f(x) = 3x(x + 4)$$

a. (f) será creciente cuando $f(x) > 0$ y cuando $f(x) < -4$: $3x > 0$ $x > 0$ cuando: $x < -4$	b. (f) será decreciente cuando $-4 < f(x) < 0$ o cuando: $3x < 0$ $x < 0$ cuando: $x \succ -4$	c. (f) no será creciente ni decreciente cuando $f(x) = 0$ y cuando $f(x) = -4$: $3x = 0$ $x = 0$ $X + 4 = 0$ $x = -4$

3.6. Máximos y mínimos

Valores máximos y mínimos utilizando el método de la primera derivada.

Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos de una función:

Encontrar la primera derivada de la función y factorizarla hasta obtener los factores de primer grado.

Los factores encontrados en el punto anterior se igualan a cero (cada uno) y se resuelve la ecuación hasta obtener sus raíces, que vienen a ser los valores críticos de la variable o abscisa de un máximo o mínimo.

Se realiza un cuadro en el que se toma como base los valores críticos de la variable, se le dan valores menores y mayores, pero vecinos para cada valor crítico de la variable, los cuales se sustituyen en la ecuación importante de la segunda operación, si el cambio de signo es de más (+) a menos (-) hay un máximo, pero si es de menos (-) a más (+) es un mínimo, si no hay cambio de signo entonces se tiene un punto estacionario.

Los valores críticos de la variable se sustituyen en la función, obteniéndose las ordenadas de los máximos y mínimos.

Los puntos anteriores se utilizan como un procedimiento para localizar los máximos y mínimos que ocurren en los valores de x para los cuales $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas.

Ejemplos:

Caso A

<table>
<tr><td>1.</td><td>$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x^2 + 16}$
$\boldsymbol{f''(x) = 3x^2 - 12x}$
$\boldsymbol{f''(x) = 3x(x-4)}$</td><td>2.</td><td>Valores críticos
3x=0x   4=0
x=0   x=4</td></tr>
<tr><td>3.</td><td><table>
<tr><td rowspan="3">0</td><td>x</td><td>3x(x-4)</td><td rowspan="3">Máximo</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>(-)(-)=+</td></tr>
<tr><td>1</td><td>(+)(-)=-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>3</td><td>(+)(-)=-</td><td rowspan="2">Mínimo</td></tr>
<tr><td>5</td><td>(+)(+)=+</td></tr>
</table></td><td>4.</td><td>a. Ordenada del máximo
$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 16$
$f(0) = 16$
b. Ordenada del mínimo
$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 16$
$f(4) = -16$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="3">Punto del máximo P(0,16);
Punto del mínimo P(4,-16)</td></tr>
</table>

Caso B

<table>
<tr><td>1.</td><td>$f(x) = 3x^4 - 4x^3$
$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$
$= x^2(x-1)$</td><td>2.</td><td>Valores críticos
$X^2=0$ $x-1=0$
$x=0$ $x=1$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
<table>
<tr><td rowspan="3">0</td><td>x</td><td>$X^2(x-1)$</td><td rowspan="3">Punto estacionario</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>(+)(-)=-</td></tr>
<tr><td>1</td><td>No hay signo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>3</td><td>(+)(-)=-</td><td rowspan="2">Mínimo</td></tr>
<tr><td>5</td><td>(+)(+)=+</td></tr>
</table>
</td><td>4.</td><td>a. Ordenada del máximo
$f(0) = 3(0)^4 - 4(0)^3$
$f(0) = 0$
b. Ordenada del mínimo
$f(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3$
$f(1) = -1$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="3">Punto estacionario P(0,0);
Punto del mínimo P(1,-1)</td></tr>
</table>

Caso C

<table>
<tr><td>1.</td><td>$f(x) = 2x^3 - 6x + 5$
$f'(x) = 6x^2 - 6$
$= 6(x^2 - 1)$</td><td>2.</td><td>Valores críticos
6=0 $x^2-1=0$
$x_1 = 1$ y $x_2 = -1$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
<table>
<tr><td rowspan="3">0</td><td>x</td><td>$6(X^2-1)$</td><td rowspan="3">Mínimo</td></tr>
<tr><td>0</td><td>(-)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>(+)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>-2</td><td>(+)</td><td rowspan="2">Máximo</td></tr>
<tr><td>0</td><td>(-)</td></tr>
</table>
</td><td>4.</td><td>a. Ordenada del mínimo
$f(1) = 2(1)^3 - 6(1) + 5$
$f(1) = 1$
b. Ordenada del máximo
$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) + 5$
$f(-1) = 9$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="3">Punto del máximo P(-1,9);
Punto del mínimo P(1,1)</td></tr>
</table>

La derivada de la potencia ***n***-ésima de una variable es el producto del exponente (*n*) y la potencia del exponente *n*-1 de la variable, si: $y = xn$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

1. Si la función tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un valor $x = a$, para el que la primera derivada es continuo, entonces $f'(a) = 0$ f´(a) = 0, si y sólo si.

2. Si $f'(a) = 0$ no necesariamente debe de ser un máximo relativo o un mínimo relativo en $x = a$, puede ser un punto estacionario con tangencia horizontal, pero $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en $x = a$ entonces $f'(a) = 0$.

3. Las condiciones necesarias para que exista un máximo o un mínimo son:
a. $f'(a) = 0$
   o bien
b. $f'(a)$ no está definida

Valores máximos y mínimos utilizando el método de la segunda derivada

La segunda derivada se emplea para determinar en dónde una función tiene una concavidad hacia arriba o hacia abajo.

La segunda derivada $f'(a)$ es la pendiente de la gráfica de $f'(x)$ en el punto $x = 0$.

La segunda derivada $f'(a)$ de una función $y = f(x)$ es positiva, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia arriba y $f'(x)$ es una función de x creciente en $x = a$.

La segunda derivada $f'(a)$ de una función $y = f(x)$ es negativa, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia abajo (convexa) y $f'(x)$ es una función de x decreciente en $x = a$.

Si una función $f(x)$ en un valor $x = a$ para el cual $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas.

a. Geométricamente si $f'(a) = 0$ y $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $x = a$, entonces $f(x)$ tiene un máximo en a.

b. Geométricamente $f'(a) = 0$ y $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $x = a$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo en a.

Si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en $x = a$ y $f'(a) = 0$, entonces:

Mínimo

En $x = a,\ \ f'(a) > 0$

Máximo

En $x = a,\ \ f''(a) < 0$

La prueba no es aplicable

$f''(a) = 0$

Criterio de la segunda derivada para calcular máximos y mínimos.

Obtener la primera derivada y encontrar los factores de primer orden.

Igualar a cero los factores de primer orden y obtener los valores críticos.

Obtener la segunda derivada y sustituir en ellos los valores críticos de la variable y ver si el valor numérico obtenido es positivo $(x > 0)$ existe un mínimo, si el valor es negativo $(x < 0)$ existe un máximo, cuando el valor obtenido es cero $(x = 0)$, el criterio no se aplica y se tiene que regresar al criterio de la primera derivada.

Ejemplos:

A. Encontrar los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.	$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 12}$ $\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 6x - 12}$ $\boldsymbol{f'(x) = 6(x^2 - \mathrm{x} - 2)}$ $\boldsymbol{f'(x) = 6(x + 1)(x - 2)}$	2.	X+1=0 x-2=0 6=0 X=-1 X=2
3.	$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ $f''(x) = 12x - 6$		

	Para $x1 = -1$ $$f''(x) = 12(-1) - 6 = -18$$ Existe un máximo para $x2 = 2$ $$f''(x) = 12(2) - 6 = 18$$ Existe un mínimo Es cóncava hacia abajo en $x = -1$ Es cóncava hacia arriba en $x = 2$

B. Determinar la concavidad de la función en el punto $x = -2$

1.	$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1}$ $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 4x + 1}$	2.	$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 4\mathrm{x} + 1}$ $\boldsymbol{f''(x) = 6x - 4)}$ Para $\boldsymbol{x1 = -2}$ $\boldsymbol{f''(x) = 6(-2) - 4 = -16}$ $\boldsymbol{f''(-2) < 0}$ Existe un máximo para $\boldsymbol{x2 = 3}$ $\boldsymbol{f''(x) = 6(3) - 4 = 14}$ Existe un mínimo Es cóncava hacia abajo en $\boldsymbol{x = -2}$ Es cóncava hacia arriba en $\boldsymbol{x = 3}$

C. Obtener los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.	$\boldsymbol{f(x) = x^4}$ $\boldsymbol{f'(x) = 4x^3}$	2.	$\boldsymbol{4x^3 = 0}$ $\boldsymbol{x = 0}$
3.	$f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$		

	Para $x1 = 0$ $$f''(x) = 12(0) = 0$$ No existe máximo o mínimo, la prueba no es aplicable a. Valor crítico si x < 0 ; f\`($x$) < 0 si x > 0 ; f\`(x) > 0 Entonces existe un mínimo

0	x	$4x^3$	Mínimo
	-1	(-)-	
	1	(+)	

b. Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^4$$

$$f(0) = 0$$

El mínimo está en el punto $P(0,0)$

Es cóncava hacia arriba en $x = 0$

3.7. Aplicaciones de la derivada

Aplicaciones con la primera derivada

Costo Marginal	Se define como el cambio en el costo total $C(x)$ debido al incremento de una unidad en la producción y se escribe como: $$C'(x) = \frac{dc}{dx}$$
Ingreso Marginal	El ingreso marginal es el cambio en el ingreso total R(x) por un incremento de una unidad en la demanda y se representa por: $$R'(x) = \frac{dr}{dx}$$
Costo promedio marginal	Es el costo total dividido entre la cantidad producida, que es la razón C (x)/x, y ésta representa el costo promedio por unidad producida. A la derivada de la razón C (x)/x, con respecto a x se le llama costo promedio marginal y se representa como: $$\frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right]$$ La expresión anterior indica el costo promedio por artículo en la cantidad total producida.

Ejemplos:

1. El costo total de producir un artículo esta dado por: $C(x) = 0.25x^2 + 40x + 100$ pesos, el precio de venta de las x unidades está dado por la ecuación $p(x) = 120 - 0.5x$ pesos por unidad.

a. Encontrar el costo marginal.
b. Calcular el ingreso marginal.
c. ¿Cuál es el costo marginal de la venta de 14 unidades?
d. ¿De cuánto es el ingreso marginal que se obtiene de la venta de 14 unidades?

a)	La ecuación del costo total es: $\boldsymbol{C(x) = 0.25x^2 + 40x + 100}$ La primera derivada nos da el costo marginal: $\boldsymbol{C'(x) = 0.5x + 40}$	b)	El precio de venta está dado por la ecuación $\boldsymbol{p(x) = 120 - 0.5x}$, al venderse "*x*" unidades se expresa como: $\boldsymbol{R(x) = x[p(x)]}$ $\boldsymbol{R(x) = x(120 - 0.5x)}$ Al encontrar la primera derivada obtenemos el ingreso marginal: $\boldsymbol{R'(x) = 120 - x}$
c)	De la ecuación de costo marginal del inciso a), se obtiene: $C'(14) = 0.5(14) + 40 = 47$ pesos.	d)	El ingreso marginal de la venta de 14 unidades: $R'(x) = 120 - x$ $R'(14) = 120 - 14$ $R'(14) = 106$ El ingreso obtenido al vender 14 unidades es 106 pesos.

2. Encontrar el costo promedio marginal de la siguiente ecuación; cuando $x = 150$

$$C(x) = 0.003x^3 - 0.5x^2 + 20x + 1500$$

$$C'(x) = 0.009x^2 - x + 20$$

$$C'(150) = 72.5$$

$$C(150) = 3375$$

$$\frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right] = \frac{1}{150}\left[147.5 - \frac{3375}{150}\right] = 0.8$$

Así, cuando $x = 150$, el costo promedio por unidad aumenta en 0.8 por cada unidad adicional producida.

Costo Marginal

Supóngase que el fabricante de cierto artículo descubre que a fin de producir "x" de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por: $C = 200 + 0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C = 200 + 0.03(100)^2 = 500$. El costo promedio al producir 100 artículos es $\frac{500}{100} = \$5$.

$$-2x(25 - 2x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$C + \Delta C = 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2$$

$$= 200 + 0.03[10{,}000 + 200\Delta x + (\Delta x)^2]$$
$$= 200 + 300 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)2$$
$$= 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)2$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los adicionales es:

$$\Delta C = (C + \Delta C) - C = 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500$$
$$\Delta C = 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 l$$
$$\Delta C = \Delta x(6 + 0.3\Delta x)$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extras es:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\Delta x$$

Si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que el $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a $6 + 0.03(50) = \$7.50$ por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a \$6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el caso anterior:

Costo marginal = $lím\ \Delta c = lím(6 + 0.03\Delta) = 6$

$\Delta x \to 0 \quad \Delta x \quad \Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\,\Delta x) = 6$$

Regla de la cadena

1. Un importador de café mexicano estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p) = \frac{4374}{p^2}$ kilogramos de café por semana cuando el precio sea de p pesos por kilogramos. Se estima que dentro de t semanas, el precio del café mexicano será de $P(t) = 0.02t^2 + 0.1t + 6.0$ pesos el kilogramo. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de café dentro de 10 semanas?

La demanda, ¿Estará creciendo o decreciendo?

$$\frac{dD}{dp} = -\frac{8.748}{p^3} \qquad \frac{dp}{dt} = 0.04t + 0.1$$

Donde:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dp} * \frac{dp}{dt} = \frac{-8.748}{(0.02t^2 + 0.1t + 6)^3}$$

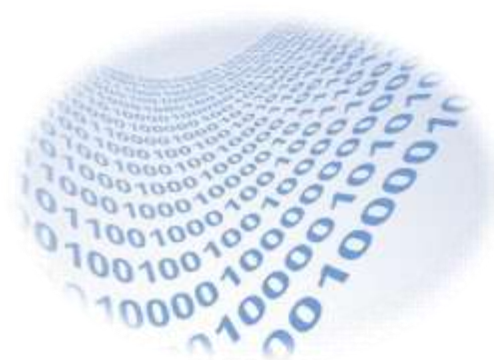
Cuando t = 10 semanas $\frac{dD}{dt} = -0.012$

Por lo tanto, la demanda está decreciendo a un ritmo de 0.012 kilogramos por semana.

A modo de conclusión: Hoy en día se requiere optimizar procesos de muchos tipos en diferentes actividades, por esto se requieren metodologías para la optimización, ya sea maximizando o minimizando dichas actividades; así hemos visto la utilidad de la derivada para su uso constante en la vida real.

RESUMEN

Este tema comprendió siete bloques consistentes en el siguiente orden de estudio: en primera instancia se analizó el concepto de la derivada de una función así como su desarrollo a través del método de los cuatro pasos e inmediatamente después se aplicaron las distintas reglas de la derivada; enseguida se analizó las diferentes aplicaciones de la derivada de distintas situaciones de carácter práctico y, finalmente, se aplicaron los conocimientos adquiridos en problemas diversos del campo profesional utilizando como herramienta de trabajo la derivada.



BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Granville (1985)	3. Derivación	25-32
	4. Reglas para Derivar Funciones Algebraicas	36-49
	5. Aplicaciones de la Derivada	52-82
Haeussler y Paul (1997)	12. Diferenciación	561-613
	13. Temas adicionales sobre Diferenciación	617-643
Hoffman y Bradley (1995)	2. Derivación: Conceptos Básicos	85-156
	3. Aplicaciones adicionales de Derivada	162-243
Leithold (1982)	2. La Derivada	96-12
	3. Aplicaciones de la Derivada	126-164
	4. Valores Extremos	169-205
	5. Más Aplicaciones	210-247
Leithold (1988)	3. La Derivada	174-247
	4. Aplicaciones de la Derivada	252-336

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul, Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

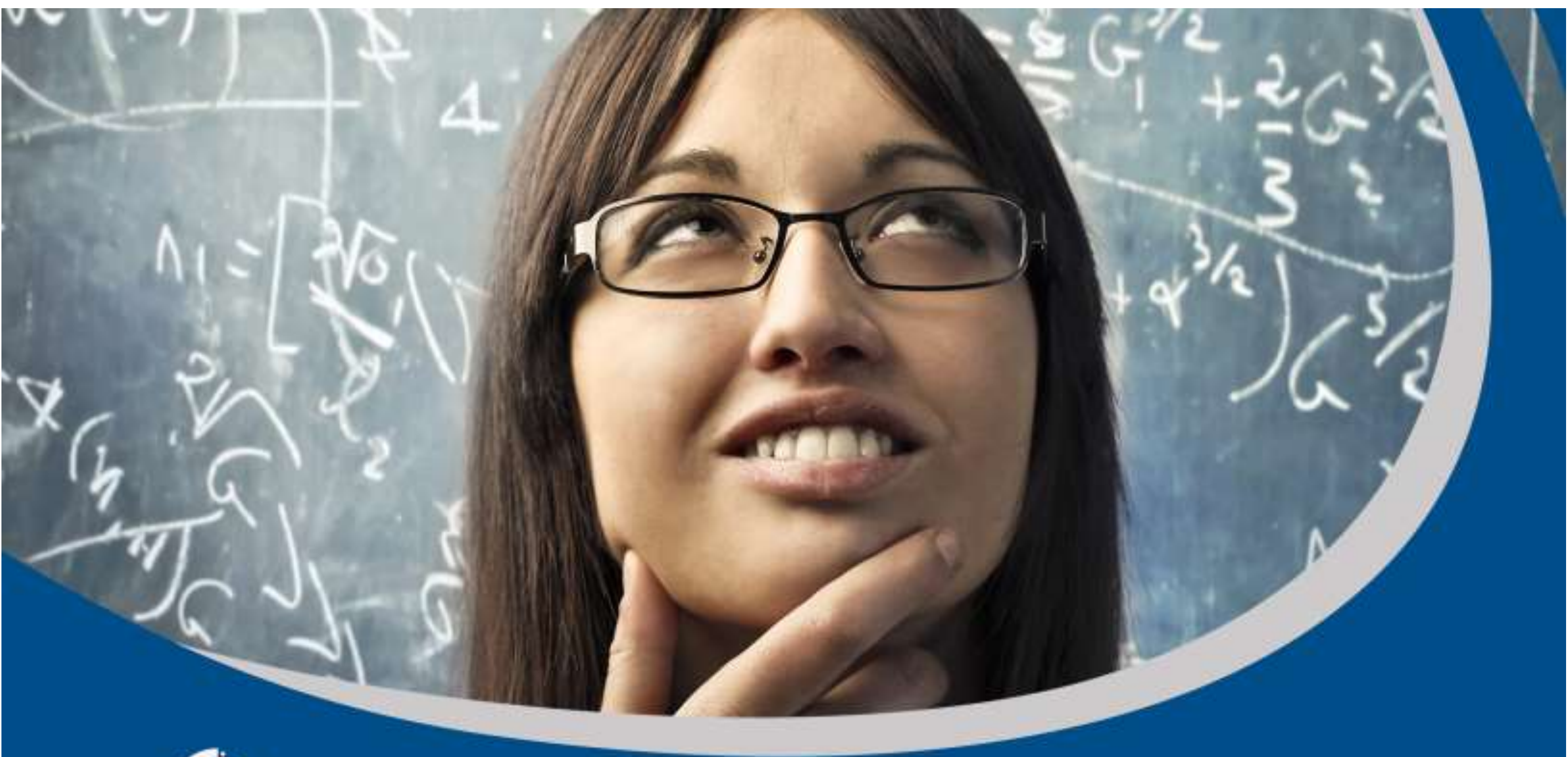
Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1985). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Licenciatura: **Informática**

UNIDAD 4

Integral



SUAyED UNAM

Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012 2016 actualizado

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá el concepto, las propiedades, las aplicaciones y la interpretación de la integral.

TEMARIO DETALLADO

(12 horas)

4. Integral

4.1. Antiderivadas
4.2. Integral indefinida
4.3. Reglas de integración
4.4. Integración por substitución
4.5. Integración por partes
4.6. Integral definida
4.7. Integración por substitución
4.8. Integración por partes
4.9. Aplicación de integral

INTRODUCCIÓN

En la presente unidad se muestra el concepto de la integral definida e indefinida así como sus propiedades. También se muestran diferentes métodos para la obtención de la integral para una función. Y por último la aplicación de la integral para la obtención de áreas bajo la curva y también cálculo de probabilidades.

1.1. Antiderivadas

Empecemos por plantear el concepto de integral en forma general y más adelante se estudiará la integral indefinida y definida.

La integral de una función (f) se denota: $\int f(x)dx$

Donde:

$f(x)$	Función a integrar o integrando
dx	Diferencia de la variable x
$\int \square$	Signo de integración

La derivada de la función x es 1. Esto es: $dx(x) = 1$.

Por lo tanto la antiderivada o integral de 1 es: $\int 1dx = x + C$

$$F(x) = x + 3$$

$$F(x) = x + 2$$

$$F(x) = x + 1$$

$$F(x) = x + 0$$

$$F(x) = x - 1$$

Todos los casos anteriores son antiderivadas de la función $f(x) = 1$, con lo que se afirma que una función f es una antiderivada de f en un intervalo, si:

$$F'(x) = f(x)$$

Las funciones $F(x) = x + C$ representan una familia de rectas, todas ellas con pendiente igual a 1.

Ejemplo

La derivada de la función $f(x) = x^2$, es $2x$. Esto es:$dx(x^2) = 2x$.

Por lo tanto la antiderivada o integral de $2x$ es: $\int 2x = x^2 + C$

En donde “C” es una constante de integración que puede tomar cualquier valor, así decimos que:

$$F(x) = x^2 + 3$$

$$F(x) = x^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

$$F(x) = x^2 + 0$$

$$F(x) = x^2 - 1$$

Todos los casos anteriores son antiderivadas de la función $f(x) = 2x$, entonces se puede afirmar que una función f es una antiderivada de f en un intervalo, si:

$$F'(x) = f(x)$$

Las funciones $F(x) = x^2 + C$ representan una familia de curvas.

Hasta aquí podemos concluir que si conocemos la derivada de una función, entonces también conocemos su antiderivada o Integral.

4.2. Integral indefinida

La integral indefinida de cualquier función (f) con respecto a x es una antiderivada indefinida (arbitraria) de (f), y se denota como:

$$\int f(x)dx$$

Se afirma que todas las antiderivadas de f difieren sólo en una constante.

La antiderivada general de $f(x)$ es $F(x) + C$

Por lo tanto: $\int f(x)dx = F(x) + C$

a) $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

b) $\int 3x^2dx = 3\int x^3dx = 3\left[\frac{x^3}{3} + c\right] = x^3 + C$

Ejemplo

Aplicando a la fórmula anterior la siguiente:

Fórmula

$$\int x^n dx = \int x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] = x^{n+1} + C$$

Se tiene entonces:

$$\int (1 - x)dx = \int dx - \int xdx = x - \frac{x^2}{2} + C$$

4.3. Reglas de integración

Algunas de las propiedades de la integral definida:

1. Si tenemos una función que se está multiplicando por una constante; podemos colocar a la constante fuera de la integral.	En forma general: $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$ Ejemplo: $$\int_2^4 6x^3dx = 6\int_2^4 x^3dx = 6\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big\|_2^4 = 6\left[\tfrac{1}{4}(4)^4 - 1/4(2)^4\right] = 360$$
2. Si *k* es cualquier constante, entonces:	$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$ Ejemplo: $$\int_2^4 2xdx = (2x\ )\Big\|_2^6 = 2(6-2) = 8$$
3. Si estamos calculando la integral de la suma o resta de 2 funciones:	$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$$ Ejemplo: $$\int_0^3 (x^2 + x^3)dx = \int_0^3 x^2dx + \int_0^3 x^3dx = 1/3(x^3)\ \Big\|_0^3 + 1/4(x^4)\ \Big\|_0^3$$ $$= 1/3[(3)^3 - (0)^3] + 1/4[(3)^4 - (0)^4] = 9 + 20.25 = 29.25$$

4. La inversa del orden de los límites de integración cambia el signo de la integración.	$$\int_a^b F(x)dx = -\int_a^b F(x)dx$$ $$\int_1^2 dx = (x)\Big\|_1^2 = (2-1) = 1$$ Entonces invirtiendo los límites de integración tenemos: $$\int_2^1 dx = (x)\Big\|_2^1 = -(1-2) = -(-1) = 1$$
5. Si el límite superior de integraciones es igual al límite inferior de integración, el valor de la integración definida es cero.	$$\int_a^b F(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$
6. La integral definida puede expresarse como la suma de sub integrales.	$$\int_a^c F(x)DX = \int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx$$ $$a \leq b \leq c$$

Fórmulas Básicas de Integración

$$\int dx = x + C$$

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{2}dx = Ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Ejercicios de integrales

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C\, \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4x^4} + C$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{7}{2}} dx = \frac{x^{\frac{7}{2}+1}}{\frac{7}{2}+1} + C\, \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} + C$$

$$\int x(x + x^5) dx = \int (x^2 +$$

$$\int (2 + y^2)^2 dx = \int (4 + 4y^2$$

$$\int \left(3x^5 + 4x^{\frac{3}{2}}\right.$$

4.4. Integración por sustitución

De las fórmulas de las integrales se desprende que es limitado el número de ellas.

Existen dos principios que permiten ampliar el alcance:

- Cada regla de integración representa un patrón.
- Las diferenciales suministran una pauta a dicho patrón.

Por ejemplo:

$$\int (x+3)^{50} d(x+3) = \frac{(x+3)^{50+1}}{51} + C$$

Donde a la expresión $(x+3)$ se le saca la derivada con respecto a x.

4.5. Integración por partes

La integral por partes es una fórmula muy eficiente que se basa en el producto de una integral.

La fórmula de integración por partes es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para ejemplificar tenemos el siguiente ejemplo:

$$\int x \cos x dx$$

Sea: $U = x\ dv = \cos x$ $V = sen\ x\ \ du = dx$

Entonces:

$$\int xcosxdx = xsenx - \int sexdx = xsenx + cosx + C$$

4.6. Integral definida

La integral definida" de una función $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ se denota como:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Se puede interpretar como el área de la región limitada por la gráfica $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje "x".

Los valores "a" y "b" reciben el nombre de límite inferior y superior de integración respectivamente.

Una definición más precisa es mencionar que el área bajo una gráfica de una función continua puede expresarse como la integral definida de $F(x)$ sobre el intervalo de "a" hasta "b" escrito matemáticamente como:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{lím}{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(x)\Delta xi$$

Al contrario de *la integral indefinida*, que es un conjunto de funciones que contiene todas las antiderivadas de $F(x)$, la integral definida es un número real que puede ser evaluado empleando el teorema fundamental del cálculo que establece lo siguiente:

El valor numérico de la integral definida de una función continua $F(x)$ sobre el intervalo de (a) hasta (b) está dado por la antiderivada $F(x) + C$ evaluada en el límite superior de integración (b), menos la misma antiderivada $F(x) + C$ evaluada en el límite inferior de integración (a), con (C) común a ambos, la constante de integración se elimina en la sustracción matemática expresada.

Donde el símbolo $\Big|_a^b$, $\Big]_a^b$, ó $[\ldots]_a^b$ indica que los límites de (b) y (a) deben sustituirse sucesivamente para x.

Ejemplo: $\int_0^3 (x-1)dx$	Calcular: a. Primero el cálculo del área. b. El concepto de “Antiderivada” que plantea la pregunta ¿qué función al derivarla da como resultado (x – 1)? y se obtiene lo siguiente: $\int_0^3 (x-1)dx = \int_0^3 xdx - \int_0^3 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^3$ $= \left[\frac{1}{2}(3)^2 - (3)\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - 0\right]$	El resultado es: $\int_0^3 (x-1)dx = \frac{3}{2}$

Propiedades de la integral definida

Algunas de las propiedades de la integral definida.

1. Si tenemos una función que se está multiplicando por una constante; podemos colocar a la constante fuera de la integral.	En forma general: $$\int_a^b \boldsymbol{kf(x)dx} = \boldsymbol{k}\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$$ Ejemplo:

	$$\int_{2}^{4} 6x^3dx = 6\int_{2}^{4} x^3dx = 6(\frac{1}{4}x^4)\Big\vert_{2}^{4} = 6[\frac{1}{4}(4)^4 - \frac{1}{4}(2)^4] = 360$$
2. Si k es cualquier constante, entonces:	$$\int_{a}^{b} kdx = k(b-a)$$ Ejemplo $$\int_{2}^{5} 6xdx = (\frac{6}{2}x^2)\Big\vert_{2}^{5} = 3(5-2) = 3(3) = 9$$
3. Si estamos calculando la integral de la suma o resta de 2 funciones:	$$\int_{a}^{b} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)$$ Ejemplo $$\int_0^4 (2x+5)dx = \int_0^4 2xdx + \int_0^4 5dx = 1/2(2x^2)$$ $$\Big\vert_0^4 + 5x \Big\vert_0^4 = (4^2-0)+5(4-0) = 16-2$$
4. La inversa del orden de los límites de integración cambia el signo de la integración.	$$\int_a^b F(x)dx = -\int_a^b F(x)dx$$
5. Si el límite superior de integraciones es igual al límite inferior de integración, el valor de la integración definida es cero.	$$\int_a^b F(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

6. La integral definida puede expresarse como la suma de subintegrales.	$\int_a^c F(x)dx = \int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx \qquad a \leq b \leq c$

Problemas de integrales definidas

$$\int_2^4 3x^2dx = 3\int_2^4 x^2dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = (4)^3 - (2)^3 = 56$$

$$\int_4^{36} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_4^{36} x^{\frac{-1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_4^{36} = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^{36} = 2(36)^{\frac{1}{2}} - 2(4)^{\frac{1}{2}} = 12 - 4 = 8$$

$$\int_1^5 3x^{-1}dx = 3\int_1^5 x^{-1}dx = 3[\ln x]_1^5 = 3\ln 5 - 3(\ln 1) = 3(\ln 5) = 4.82$$

$$\int_0^1 e^{\frac{t}{2}}dt = \left[2e^{t/2}\right]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} - 2e^0 = 2(e^{\frac{1}{2}} - 1)$$

4.7. Integración por sustitución

De las fórmulas de las integrales se desprende que es limitado el número de ellas.

Existen dos principios que permiten ampliar el alcance.

- Cada regla de integración representa un patrón.
- Las diferenciales suministran una pauta a dicho patrón.

Por ejemplo:

$$\int_0^4 8e^x dx = 8(e^4 - e^0) = 8(54.598 - 1) = 8(53.598) = 428.784$$

Donde a la expresión $(x + 3)$ se le saca la derivada con respecto a x.

4.8. Integración por partes

La integral por partes es una fórmula muy eficiente que se basa en el producto de una integral.

La fórmula de integración por partes es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para ejemplificar tenemos el siguiente ejemplo:

$$\int_0^{\pi} xcosxdx$$

Sea:

$$U = x \; dv = \cos x$$

$$V = sen \; x \; du = dx$$

Entonces se tiene:

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = xsenx$$

$$- \int_0^{\pi} senxdx = (xsenx + cosx)|_0^{\pi} = [(\pi sen\pi + cos\pi) - 0sen0 + cos0)]$$

$$= (0 - 1) - (0 + 1) = -1 - 1$$

4.9. Aplicación de integral

1. La gerencia de la compañía de equipo para oficina determinó que la función de ingresos marginales diarios asociados con la producción y venta de su sacapuntas de baterías está dada por: $R'(x) = -0.0006x + 6$. Donde (x) denota las unidades producidas y $R'(x)$ se mide en dólares por unidad.

a) Determinar la función de ingresos $R(x)$ asociada con la producción y venta de estos sacapuntas

b) ¿Cuál es la ecuación de demanda que relaciona el precio unitario al mayoreo con estos sacapuntas con la cantidad demandada?

Solución:

a) La función de ingresos R se encuentra integrando la función de ingresos marginales $R'(x)$.

Así, $R(x) = (-0.0006x + 6)$

$$R(x) = \int R'(x)dx = \int (-0.0006x + 6)dx = -0.0006 \int xdx + 6 \int dx = -0.0003x^2 + 6x + C$$

Para determinar el valor de la constante (C), hemos de darnos cuenta de que los ingresos totales de la empresa son cero cuando el nivel de producción y ventas son nulos; es decir, $R(0) = 0$. Esta condición indica que:

$$R(0) = -0.0003(0)^2 + 6(0) + C = 0$$

Por lo tanto: $C = 0$

Así la función de ingresos requerida está dada por:

$$R(x) = -0.0003x^2 + 6x$$

b) Sea (p) el precio unitario al mayoreo de los sacapuntas, entonces:

Ingresos: $R(x) = px =$ (Precio)(número de sacapuntas)

Despejando:

$$p = \frac{R(x)}{x} = \frac{-0.0003x^2 + 6x}{x} = -0.0003x + 6$$

La ecuación de demanda es:

$$p = -0.0003x + 6$$

2. Las tasas de costos e ingresos de cierta operación minera están dadas por:

$$C'(t) = 5 + 2t^{\frac{2}{3}} \text{ y } R'(t) = 17 - t^{\frac{2}{3}}$$

En donde (C) y (R) se miden en millones de pesos y (t) en años, determine:

a) ¿Qué tanto deberá prolongarse la operación?

b) Encuentre la utilidad total que puede obtenerse durante este periodo.

Solución:

a) El instante óptimo (t) que dará como resultado la utilidad máxima es el instante en que el costo y el ingreso son iguales, es decir:

$\boldsymbol{C'(t) = R'(t)}$
$5 + 2t^{\frac{2}{3}} = 17 - t^{\frac{2}{3}}$
$3t^{\frac{2}{3}} = 17 - 5$
$3t^{\frac{2}{3}} = 12$
$3t^{\frac{2}{3}} = \frac{12}{3}$
$3t^{\frac{2}{3}} = 4$
$t = 4^{\frac{2}{3}} = 8$

Por lo tanto, la operación deberá mantenerse por t =8 años.

b. La utilidad que puede obtenerse durante este periodo de 8 años está dada por:

Utilidad = $\int_0^8 [R'(t) - C'(t)]dt$
$\int_0^8 \left[17 - t^{\frac{2}{3}} - (5 + 2t^{\frac{2}{3}})\right] dt$
$\int_0^8 \left[17 - t^{\frac{2}{3}} - 5 - 2t^{\frac{2}{3}}\right] dt$
$\int_0^8 (12 - 3t^{\frac{2}{3})}dt$
$12t - \frac{3t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \Big\vert_0^8$
$12(8) - \frac{9}{5}(8)^{\frac{5}{3}}$
$96 - 57.6 = 38.4$ millones de pesos

3. La función de costo marginal de un fabricante está dada por la $\frac{dc}{dq} = 0.8q + 4$. Si la producción es alta, esto es, es casi igual a q = 90 unidades por semana ¿Cuánto costaría incrementar la producción a 110 unidades por semana?

Solución:

La tasa de cambio del costo es $\frac{dc}{dq}$.

$$\boldsymbol{C(110) - C(90) = \int_{90}^{110} \frac{dc}{dq} dq = \int_{90}^{110} (0.8q + 4)dq}$$

$$\boldsymbol{= 0.8 \int_{90}^{100} q dq + 4 \int_{90}^{110} dq = \frac{0.8q^2}{2} + 4q]_{90}^{110} = 5280 - 3600 = 1680}$$

Finalmente: El costo para aumentar la producción de 90 a 110 unidades es $1680.

4. El valor actual de un flujo continuo de ingresos de $5000 al año durante 10 años al 4% compuesto continuamente esta dado por: $\int_0^{10} 5000e^{-0.04t}dt.$

a). Calcule el valor actual.

Solución:

a) Determinando el valor actual:

$$\int_0^{10} 5000e^{-0.04t}dt = 5000\int_0^{10} e^{-0.04t}\,dt = 5000\left[-\frac{e^{-0.04t}}{0.04}\right]_0^{10} = -83790.0 + 125000$$

Finalmente el Valor Actual = $ 41,210.00

Nota: Dentro del campo de la estadística se puede aplicar con frecuencia a la "Integral". Tal es el caso del estudio de una función de densidad de probabilidad (f) de una variable (x), en donde (x) toma todos los valores del intervalo $[a, b]$ tiene las siguientes propiedades:

$F(x) \geq 0$

$\int_a^b F(x)dx = 1$

$P(c \leq x \leq d = \int_c^d F(x)dx$

5. Supón que (y) tiene la función de densidad $F(y) = C$ y en el intervalo $0 \leq$ y ≤ 2.

Solución

a) Encuentra el valor de la constante C que hace de $F(y)$ una función de densidad de probabilidad.

$$F(y) = \int_0^2 Cydy = 1 \qquad C\int_0^2 ydy = \frac{Cy^2}{2}\Big|_0^2 = 1$$

Finalmente se tiene que:

$$2C = 1 \;\therefore\; C = \frac{1}{2}$$

b) Encuentra la probabilidad de $P(1 \leq y \leq 2)$:

$$P(1 \leq y \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{2} y dy = \frac{1}{2}\int_1^2 y dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]\begin{matrix}2\\1\end{matrix} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Finalmente se tiene que:

$$P(1 \leq y \leq 2) = \frac{3}{4}$$

6. El tiempo requerido por un grupo de estudiantes de la Facultad de Contaduría para presentar un examen de 1 hora es una variable aleatoria continua con una función de densidad dada por $F(y) = cy^2 + y$ que se comporta en el intervalo de $0 \leq y \leq 1 \;\; 0 \leq y \leq 1$.

Determinar el valor de C:

Solución:

a) El valor de C.

$$F(y) = \int_0^1 [Cy^2 + y]dy = 1$$

$$\left[\frac{cy^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = 1$$

$$\frac{C}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

$$C = \frac{3}{2}$$

b) La probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.

$$P(0 \leq y \leq 0.5) = \int_0^{0.5} \left[\frac{3}{2} y^2 + y\right] dy = \left[\frac{3}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]\begin{matrix}0.5\\{}_0\,0\end{matrix} = 0.1875$$

Así como se utiliza la integral para calcular el área que tiene una superficie irregular, la cual se puede descomponer en diferentes figuras geométricas para el cálculo de sus áreas y así obtener el área total.

La integral se utiliza en el ambiente administrativo para calcular los ingresos y costos acumulados de una empresa, por eso es posible utilizarla y de hecho se utiliza en la vida real en muchos cálculos.

RESUMEN

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requiere resolver problemas diversos referentes a usar como herramienta de solución a la integral. Ésta se define como la antiderivada de una función determinada y por consecuencia nos lleva a tomar decisiones en cualquier campo de la ciencia y la investigación. Esto por efecto resultante nos indica la importancia que tiene hoy en día el cálculo integral.

En el caso de las empresas; éstas requieren hacer uso muy frecuente de dichas metodologías; dado que están conformadas por diversas áreas funcionales en donde de manera constante se toman decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Leithold (1985)	6. La Diferencial y la Antidiferenciación.	252-283
	7. La Integral Definida.	286-361
	9. Técnicas de Integración.	450-505
	12. Diferenciación	561-613
Leithold (1982)	5. La Diferencial y la Antidiferencial.	342-388
	6. La Integral Definida.	392-455
	7. Aplicación de la Integral Definida.	456-498
	8. Técnicas de Integración.	631-675
Hoffman y Bradley (1995)	5. Antiderivación.	309-342
	6. Temas adicionales de Integración.	345-403
Haeussler y Paul (1997)	16. Integración.	722-794
	17. Métodos y aplicaciones de la Integración.	797-849
Granville (1985)	12. Integración.	227-274
	13. Constante de Integración.	277-281
	14. Integral Definida.	287-305

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

UNIDAD 5
Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado

Plan 2012 2016 actualizado

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno comprenderá los métodos de resolución y aplicación de las ecuaciones diferenciales.

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado

5.1. Concepto de ecuación diferencial
5.2. Soluciones general y particular
5.3. Ecuaciones diferenciales separables
5.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
5.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de esta unidad se muestra el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer grado. De igual forma los diferentes métodos para la obtención de la ecuación diferencial ordinaria de primer grado para una función.

5.1. Concepto de ecuación diferencial

Dada una función $y = f(x)$, la derivada es: $dy/_{dx} = f'(x)$.

Es también una función de (x) y se encuentra mediante alguna regla apropiada. Por ejemplo, si $y = e^{x^\wedge 2}$entonces $dy/_{dx} = 2xe^{x^\wedge 2}$o bien $dy/_{dx} = 2xy$

El problema que se desea resolver es $dy/_{dx} = 2xy$, de tal forma que se encuentre de alguna manera una función $y = f(x)$ que satisfaga la ecuación. En una palabra, se desea resolver ecuaciones diferenciales.

Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales se dividen de acuerdo a lo siguiente:

Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una "Ecuación Diferencial Ordinaria".

Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama "Ecuación Diferencial Parcial".

El orden de la más alta derivada en una ecuación diferencial se llama orden de la ecuación.

5.2. Soluciones general y particular

Una solución general de una ecuación diferencial de primer orden" es de la forma: $y\acute{} + ky = 0$, en la cual k es una constante.

Esta ecuación diferencial tiene como solución la siguiente expresión matemática: $y = ce^{-kx}$.

Donde c es una constante cualquiera que esta sea, y así la expresión matemática anterior representa una solución general.

Una solución particular es aquella donde las constantes c y k están determinadas por un valor en particular para cada una de ellas.

Dándole un valor a $k = 2$ y $c = 4$ tenemos que la ecuación diferencial de primer orden es: $y\acute{} + 2y = 0$. Y su solución particular es: $y = 4e^{-2x}$.

5.3. Ecuaciones diferenciales separables

Una ecuación diferenciable separable es una ecuación diferenciable que puede describirse de la forma siguiente:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dx}{dy}=0 \qquad \text{Ec. (1)}$$

En forma análoga la Ec. (1) que representa a una ecuación diferenciable separable, se puede describir de la siguiente manera:

$$M(x,y)\frac{dx}{dy}=-N(x,y) \qquad \text{Ec. (2)}$$

Y la Ec. (2) a su vez se puede simplificar en la siguiente expresión:

$$M(x,y)dx=-N(x,y)dy \qquad \text{Ec. (3)}$$

Integrando la Ec. (3) se tiene como resultado la Ec. 4, de la siguiente forma:

$$\int M\,(x,y)dx + \int(n(x,y)dy = c \qquad \text{Ec. (4)}$$

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación diferencial , por $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2+y^2}$ separación de variables.	Despejando el término x^2 tenemos lo siguiente: $$-x^2+(2+y^2)\frac{dy}{dx}=0$$
	Como sí se pudo despejar, es una ecuación diferencial separable su solución está dada por: $$(2+y^2)dy=x^2dx$$
	Integrando la expresión en ambos lados de la igualdad: $$\int(2+y^2)dy=\int x^2dx$$ $$\int(2+y^2)dy=2y+\frac{y^3}{3}+a$$ $$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+b$$
	Con a,b constantes, se tiene lo siguiente: $$2y+\frac{y^3}{3}+a=\frac{x^3}{3}+b$$
	Multiplicando la expresión matemática por 3 obtenemos (para eliminar el valor de 3 que divide a algunos de los elementos): $$6y+y^3+3a=x^3+3b$$
	Despejando a x en función de y $$x^3+3b=y^3+6y+3a$$ $$x^3=y^3+6y+3a-3b$$ $$x=\sqrt[3]{y^3+6y+3a-3b}$$ Que es la solución.

5.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial lineal de primer orden se representa matemáticamente de la siguiente manera:

$$y' + f(x)y = h(x)$$

Considerando que $h(x)$ y $f(x)$ son dos funciones continuas dadas en un intervalo $a < x < b$, su solución se encuentra dada por:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int (\mu(x)h(x)dx)\right] + c$$

Donde:

$$\mu(x) = e\left[\int f(x)dx\right]$$

Ejemplo:

Determine la solución general de la siguiente ecuación diferencial: $y' + 4xy = x$

Sea: $f(x) = 4x$ y $h(x) = x$

Primero encontramos $\mu(x)$; resultando:

$$\mu(x) = e^{\int 4xdx}$$

$$\mu(x) = e^{2z^2}$$

$$Y = \frac{1}{e^{2x^2}}\left[\int xe^{2x^2}\,dx\right] + c = \frac{1}{e^{2x^2}}\left[\frac{1}{4}\int 4xe^{2x^2}dx + c\right] = \frac{1}{4^{2x^2}}\left[e^{2x^2} + c\right] = \frac{1}{4} + \frac{c}{e^{2x^2}}$$

5.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

En este punto se muestra cómo las ecuaciones diferenciales de primer grado tienen diversos tipos de aplicaciones en los diferentes campos profesionales.

Problema de mezclas: A veces, el mezclar dos líquidos da lugar a una ecuación diferencial lineal de primer orden.

En el siguiente ejemplo se considera la mezcla de dos soluciones salinas de concentraciones diferentes:

Se disuelven inicialmente 50 libras (lb) de sal en un tanque que contiene 300 galones (gal) de agua. Posteriormente se bombea salmuera al tanque a razón de 3 galones por minuto; luego la solución, adecuadamente mezclada, se bombea fuera del tanque, también a razón de 3 galones / minuto. Si la concentración de la solución que entra es de 2 lb / gal, determine la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Cuánta después de un tiempo largo?

Solución:

Sea A(t) la cantidad de sal (en libras) que hay en el tanque en un instante cualquiera. En problemas de esta clase, la rapidez neta con que A(t) cambia está dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} rapidez\ con\ la\ que \\ la\ sustancia\ entra \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} rapidez\ con\ la\ que \\ la\ sustancia\ sale \end{pmatrix} = R_1 - R_2$$

Ahora bien, la rapidez con que la sal entra al tanque es, en libras por minuto, $R_1 = (3\ gal/min) * (2lb/gal) = ib/min$ en tanto que la rapidez con que la sal sale es:

$$R_2 = (3gal/min) * \left(\frac{A}{300} lb/gal\right) = \frac{A}{100} lb/min$$

En consecuencia, la primera ecuación se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}$$

La resolvemos sujeta a la condición inicial $A(0) = 50$.

Puesto que el factor integrante es $e^{t/100}$, puede escribirse como:

$$d/dt\left[e^{t/100}A\right]6e^{t/100}$$

Por lo tanto:

$$e^{t/100}A = 600e^{t/100} + C$$

$$A = 600 + ce^{-t/100}$$

Cuando $t = 0$ se tiene $A = 50$; se halla así que $c = -550$. Finalmente, se obtiene:

$$A(t) = 600 - 550e^{-t/100} = 600 - 550e^{-50/100} = 600 - 550e^{-.5}$$

$$= 600 - 550(0{,}6065306597) = 600 - 333.5918628 = 266.408$$

Para $t = 50$ *se tiene que* $A(50) = 266.41$ lb. Además, cuando $t \to \infty$, de la ecuación anterior y en la siguiente tabla se puede ver que $A \to 600$. Por supuesto, esto es lo que se esperaría; después de un periodo largo, entonces el número de libras de sal presente en la solución debe ser:

(300 gal)(2lb / gal) = 600 lb	
t (minutos)	**A (libras)**
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

En el ejemplo anterior se supuso que la rapidez con que la solución se bombea al tanque es igual a la rapidez con que la solución se bombeó hacia fuera. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así; la salmuera mezclada podría ser bombeada hacia fuera con una rapidez mayor o menor que la rapidez con que la otra solución se bombea hacia el interior. La ecuación diferencial que resulta en este caso es lineal con un coeficiente variable.

RESUMEN

Hoy en día existen muchas situaciones en el campo profesional en las cuales se requiere calcular valores para diferentes tipos de problemas diversos cuya resolución involucra a las ecuaciones diferenciales, a fin de que satisfaga una toma de decisión que beneficie por consiguiente a la sociedad en cualquier entorno de la ciencia y la investigación.

Además, las empresas requieren hacer uso muy frecuente de estas metodologías, dado que están conformadas por diversas áreas funcionales en donde se toman de manera constante decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Leithold(1988)	10. Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables.	508-590
Leithold (1982)	18. Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables.	1102-1176
Hoffman y Bradley (1995)	7. Ecuaciones Diferenciales	407-435 617-643
Haeussler y Paul (1997)	19. Cálculo de Varias Variables.	873-936
Granville (1985)	21. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.	458-496

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

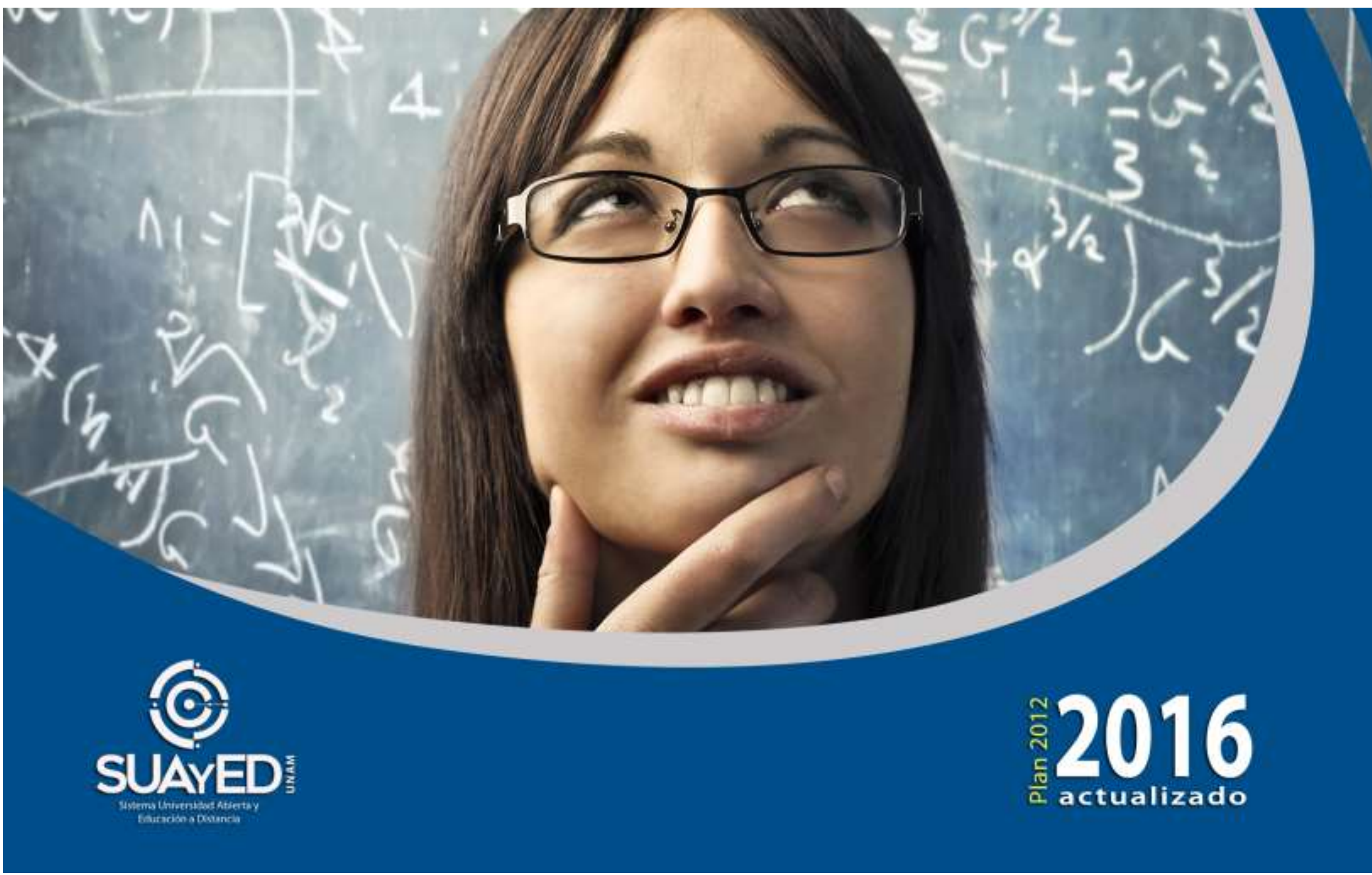
Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

UNIDAD 6

Prácticas de laboratorio



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno resolverá problemas de cálculo utilizando software.

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

6. Prácticas de laboratorio

6.1. Prácticas de laboratorio

INTRODUCCIÓN

El alumno utilizará los conceptos y propiedades de función, límite, derivada, integral y ecuaciones diferenciales para desarrollar modelos matemáticos con el uso de la hoja Excel y de esta manera resolver problemas de la vida real.

6.1. Prácticas de laboratorio

El Departamento de Biología estima que una bacteria se reproduce siguiendo el comportamiento de la siguiente función:

$$f(t) = -0.26t^2 + 440t + 80$$

Si el tiempo t está dado en segundos, cuántas existirán en la colonia durante un periodo de tres minutos.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel:

1. Colocamos en un renglón y celda el valor de los segundos totales.

	A	B	C
1			
2			
3		=3*60	
4			
5			
6			

Resultando:

	A	B	C
1			
2			
3		180	
4			
5			

2. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5		-0.26	440	80	
6					

3. Multiplicamos la celda del paso uno por cada uno de los coeficientes de la función, en este caso la celda del paso uno al cuadrado por la primera celda del paso dos, más la celda del paso uno por la segunda celda del paso dos más la tercera celda del paso dos.

	A	B	C
6			
7		=B5*B3^2	
8			

	C	D
6		
7	=C5*B3	
8		

Resultado de las operaciones anteriores lo siguiente:

	A	B	C	D
6				
7		-8424	79200	
8				

Posteriormente se obtiene la suma

	A	B	C
8			
9		=B7+C7+D5	
10			

Resultando de la suma la siguiente cantidad:

	A	B	C
8			
9		70,856	
10			

Finalmente: Los valores obtenidos en el paso tres es el resultado buscado en el ejemplo mostrado.

Caso práctico de "Límite"

El tanque de aire de una gasolinera soporta una presión máxima dada por la siguiente función $f(t) = (x^2 + 248t - 500)/(x-2)$ Si la presión a que se le somete en un momento dado es de $2\,psi$, ¿cuál será la presión total soportada por el tanque?

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel:

1. En una celda de un renglón se coloca el valor de 2.0001 y enseguida el valor de 1.9999.

	A	B	C	D
1				
2		2.0001	1.9999	
3				
4				

2. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la primera celda del paso uno.

	A	B	C	D
3				
4		=(B2^2+248*B2-500)/(B2-2)		
5				

Resultando del cálculo anterior lo siguiente:

	A	B	C
3			
4		252.0001	
5			

3. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la segunda celda del paso uno.

	A	B	C	D
5				
6		=(C2^2+248*C2-500)/(C2-2)		
7				

Resultado del cálculo anterior la siguiente cantidad:

	A	B	C
5			
6		251.9999	
7			

4. Ambos valores (paso dos y tres) deben ser muy parecidos a número entero el cual es el resultado buscado. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la segunda celda del paso uno.

Vemos que los valores anteriores tienden al valor de 252 que es el valor buscado.

Caso práctico de "Derivada"

El Departamento de Biología estima que una bacteria se reproduce siguiendo el comportamiento de la siguiente función $f(t) = -0.26t^2 + 1640t + 80$. Maximizar el número de bacterias en una colonia.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

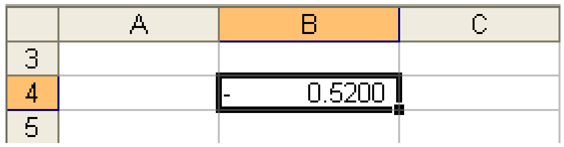
1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función.

	A	B	C	D	E
1					
2		-0.26	1640	80	
3					
4					

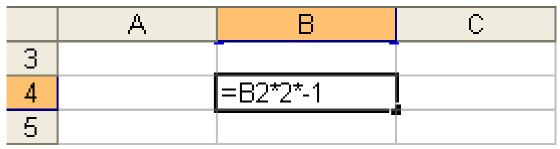
2. Multiplicamos la primera celda por 2 y se guarda en una celda de otro renglón.

	A	B	C
3			
4		=B2*2	
5			

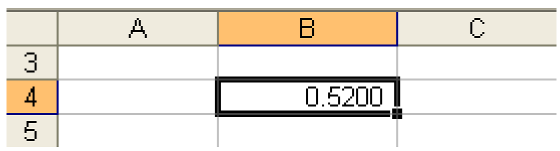
Resultando lo siguiente:



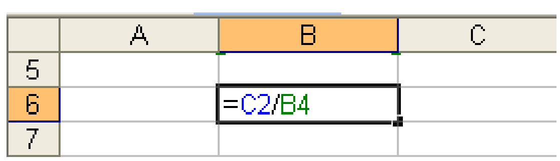
3. Se le cambia el signo a la cantidad resultante del paso 2, el resultado se coloca en una celda distinta.



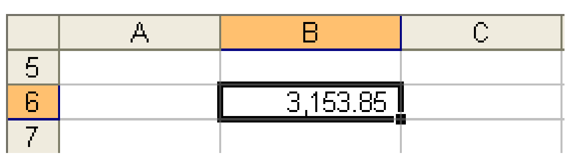
Resultando lo siguiente:



4. A continuación el valor de la segunda celda del paso uno se divide entre valor del paso tres, la resultante es el resultado buscado.



Resultando lo siguiente:



Finalmente: Los valores obtenidos en el paso cuatro es el resultado buscado en el ejemplo mostrado.

Caso práctico "Integral"

La función que describe el ingreso marginal de un producto es:

$$Ingreso\ marginal = -0.08\,x + 26.$$

Obtenga el ingreso total a obtener con la venta de 440 unidades del producto, integrando la función del ingreso marginal, y tomando como límites de integración 0 y 440.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función.

	A	B	C	D
1				
2		-0.08	26	
3				

2. Colocamos en otro renglón los límites de integración.

	A	B	C	D
3				
4		-	400	
5				

3. Se coloca en una celda de otro renglón la primera celda del paso uno dividida entre dos y multiplicada por el cuadrado de la segunda celda del paso dos.

	A	B	C
5			
6		=B2/2*C4^2	
7			

Resultando:

	A	B	C
5			
6		- 6,400	
7			

4. Se coloca en una celda de otro renglón la segunda celda del paso uno y se multiplica por la segunda celda del paso dos.

	A	B	C
7			
8		=C2*C4	
9			

Resultando:

	A	B	C
7			
8		10,400	
9			

5. El resultado de los pasos tres y cuatro se suman dando como resultado la cantidad buscada.

	A	B	C
9			
10		=B6+B8	
11			

Resultando lo siguiente:

	A	B	C
9			
10		4,000	
11			

Finalmente: Los valores obtenidos en el paso cinco es el resultado buscado en el ejemplo mostrado.

Caso Práctico de "Ecuaciones Diferenciales"

Se disuelven inicialmente 50 libras (lb) de sal en un tanque que contiene 300 galones (gal) de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 galones por minuto; luego la solución, mezclada adecuadamente, se bombea fuera del tanque, también a razón de 3 galones/minuto. Si la concentración de la solución que entra es de 2 lb/gal, determina la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 44 min? ¿Cuánta después de un tiempo más largo?

Para resolver este ejercicio utilizaremos una hoja de Excel

1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la ecuación diferencial $A = 600 - 550\, e^{-t/100}$

	A	B	C	D	E
1					
2		600	-550	100	
3					

2. Colocamos en otro renglón el valor de los 44 minutos que transcurrirán.

	A	B	C
3			
4		44	
5			

3. Se sustituye el valor del paso 2 en la función del paso 1

	A	B	C
5			
6		=B2+C2*EXP(-B4/D2)	
7			

Dando como resultado, lo siguiente:

	A	B	C
5			
6		245.78	
7			

Finalmente: Los valores obtenidos en el paso tres es el resultado buscado en el ejemplo mostrado.

RESUMEN

De acuerdo con la pregunta que se te formuló al principio de ésta unidad; se presupone que tu respuesta con respecto a qué sabes de los softwares; seguramente habrás contestado que sí has tenido contacto con ellos; específicamente con el Excel.

La idea del software para la resolución de problemas matemáticos diversos proviene del Siglo XX en donde el hombre se preocupó por entender y comprender el desarrollo tecnológico con que este iba evolucionando de una forma acelerada hasta nuestros días.

La resolución de problemas matemáticos por medio del uso de los softwares se ha hecho más presente hoy en día (2009) ante el constante cambio que el hombre ha tenido en su relación con el medio en el cual se desenvuelve dentro de este planeta llamado Tierra en donde su desarrollo comprende muchas áreas que el mismo ha descrito y definido con el fin de tener un mejor bienestar y seguir sobreviviendo.

En esta unidad veremos lo que se refiere a las aplicaciones a través de los softwares (Excel) de los diversos temas vistos a los largo de las unidades anteriores; a fin de poder dar solución de una manera más rápida a todo tipo de problemas diversos en el campo profesional de la licenciatura en Informática y su relación con las áreas Contables-Administrativas.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo
Haeussler y Paul (1997)	Ver todos los indicados anteriormente
Hoffman y Bradley (1995)	
Leithold (1982)	
Leithold (1988)	
Swokowsky (1983)	

Haeussler Jr. Ernest; Paul Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Swokowsky, Earl W. (1983). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica.

Plan 2012

2016

actualizado