UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN
DIVISIÓN SISTEMA UNIVERSIDAD ABIERTA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

APUNTE ELECTRÓNICO

Matemáticas I (Álgebra Lineal)

Licenciatura en Informática

SUAYED UNAM
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012 2016 actualizado

COLABORADORES

DIRECTOR DE LA FCA
Dr. Juan Alberto Adam Siade

SECRETARIO GENERAL
Mtro. Tomás Humberto Rubio Pérez

– – –

COORDINACIÓN GENERAL
Mtra. Gabriela Montero Montiel
Jefe de la División SUAyED-FCA-UNAM

COORDINACIÓN ACADÉMICA
Mtro. Francisco Hernández Mendoza
FCA-UNAM

– – –

COAUTORES
Act. Alberto De La Rosa Elizalde
M. I. Antonio Martín Garcés Madrigal
Lic. Juan Carlos Luna Sánchez
Act. Soledad Alicia Rivera Rosales
Mtra. Adriana Rodríguez Domínguez
Mtra. Guadalupe Adriana Sánchez Ramiro

REVISIÓN PEDAGÓGICA
Lic. Chantal Ramírez Pérez
Mayra Lilia Velasco Chacón

CORRECCIÓN DE ESTILO
Mtro. Carlos Rodolfo Rodríguez de Alba

DISEÑO DE PORTADAS
L.CG. Ricardo Alberto Báez Caballero
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

DISEÑO EDITORIAL
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

Matemáticas I (Algebra lineal)
Apunte electrónico

Edición: agosto de 2017

Facultad de Contaduría y Administración
Circuito Exterior s/n, Ciudad Universitaria
Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, Distrito Federal.

ISBN: En trámite
Plan de estudios 2012, actualizado 2016.

OBJETIVO GENERAL

Al término del curso el alumno aplicará la teoría del álgebra lineal en el planteamiento y resolución de modelos matemáticos afines al área informática.

TEMARIO OFICIAL

(Horas 64)

	Horas
1. Sistemas de ecuaciones lineales	10
2. Espacios vectoriales	8
3. Transformaciones lineales	8
4. Producto interno	10
5. Matrices	8
6. Determinantes	8
7. Prácticas en laboratorio	12

INTRODUCCIÓN
A LA ASIGNATURA

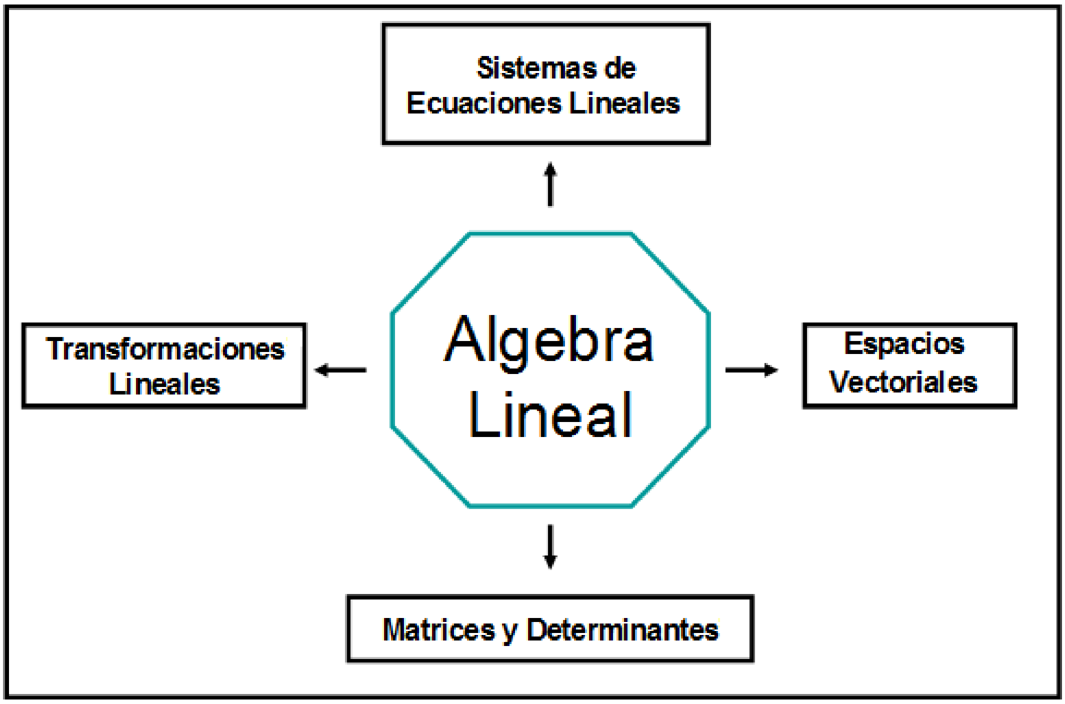
Las matemáticas constituyen una parte fundamental en la formación académica de los estudiantes y profesionales de las Ciencias Sociales y más aún para los que se encuentran en áreas en donde es necesario resolver problemas relacionados con la producción, la organización, la toma de decisiones, etc. El álgebra lineal es la rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y en un enfoque más formal, espacios vectoriales, y sus transformaciones lineales. Es un área que tiene conexiones con muchas áreas dentro y fuera de las matemáticas como análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, etc. La historia del álgebra lineal se remonta a los años de 1843 cuando William Rowan Hamilton (de quien proviene el uso del término *vector*) creó los cuaterniones; y en 1844 fue cuando Hermann Grassmann publicó su libro *Die lineale Ausdehnungslehre* (*La teoría lineal de extensión*).

William Rowan Hamilton

Hermann Grassmann

En la actualidad la herramienta fundamental de todo estudiante, académico y científico, así como investigador es la computadora, producto final (hasta ahora) de las matemáticas junto al desarrollo informático.

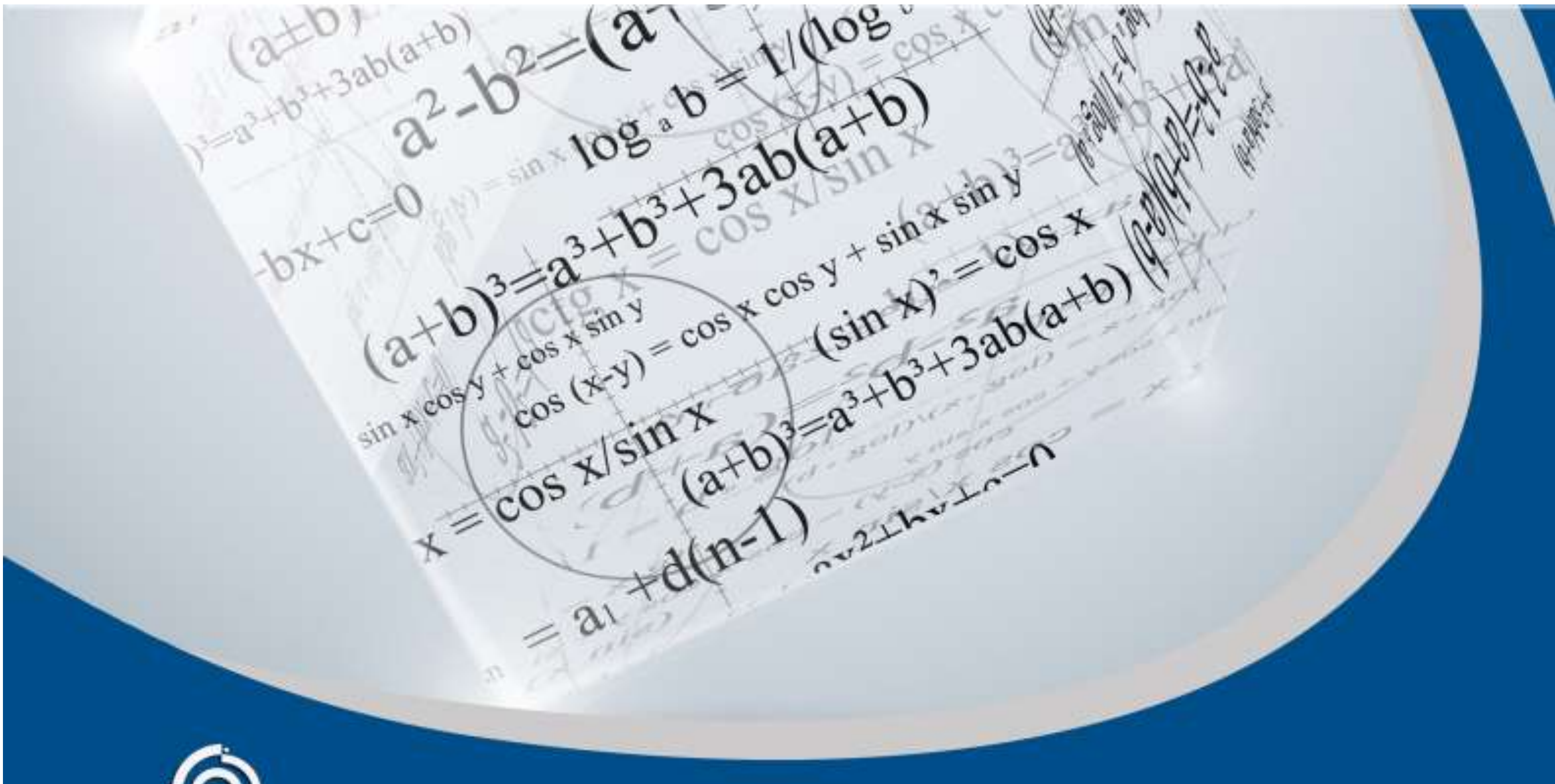
ESTRUCTURA CONCEPTUAL



Solución de problemas y aplicaciones actuales del Álgebra Lineal

UNIDAD 1

Sistemas de ecuaciones lineales



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificará los elementos que intervienen en el planteamiento y solución de ecuaciones lineales.

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

1. Sistemas de ecuaciones lineales
1.1.Concepto
1.2.Ecuaciones lineales
1.3. Vectores, Matrices
1.4.Sistemas de m Ecuaciones con n incógnitas
1.4.Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan
1.5.Sistemas homogéneos

INTRODUCCIÓN

La importancia del álgebra lineal para las aplicaciones se ha elevado en proporción directa al aumento del poder de las computadoras, cada nueva generación de equipo y programas de cómputo dispara una demanda de capacidades aún mayores. Por lo tanto, la ciencia de las computadoras está sólidamente ligada al algebra lineal mediante el crecimiento explosivo de los procesamientos paralelos de datos y los cálculos a gran escala.

Aplicación en programación lineal. En la actualidad muchas decisiones administrativas, importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. Por ejemplo, la industria de las aerolíneas emplea programas lineales para crear los itinerarios de las tripulaciones de vuelo, monitorear las ubicaciones de los aviones, o planear los diversos programas de servicios de apoyo como mantenimiento, y operaciones en terminal.

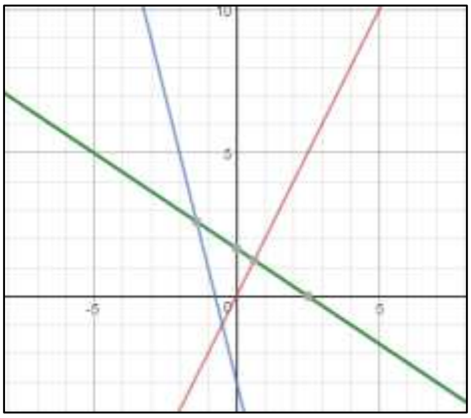
Por tanto, el álgebra lineal es una herramienta muy importante que utilizan los profesionales egresados de la Licenciatura en Informática. En este caso, el punto de vista de esta unidad se concreta a que el estudiante en Informática debe saber lo siguiente:

- a) Tener una noción fundamental para definir y conceptualizar qué son los Sistemas de Ecuaciones Lineales.
- b) Reconocer las diversas formas y los diferentes tipos de Sistemas de Ecuaciones Lineales.
- c) Reconocer los diferentes tipos de solución de los Sistemas de Ecuaciones Lineales .
- d) Utilizar los diferentes métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales con la finalidad de utilizarlos en distintas aplicaciones de los temas subsecuentes que comprenden la asignatura

1.1. Concepto

Una gran cantidad de problemas que se presentan en las ciencias naturales, en las ciencias sociales, así como en ingeniería y en ciencias físicas, tienen que ver con ecuaciones que relacionan dos conjuntos de variables.

Una ecuación del tipo $ax = b$ que expresa la variable b (variable independiente) en términos de la variable$x$ (variable dependiente), se denomina ecuación lineal. El término lineal expresa que la gráfica de la ecuación anterior es una línea recta.



Ejemplos:

$$4x = 2y$$

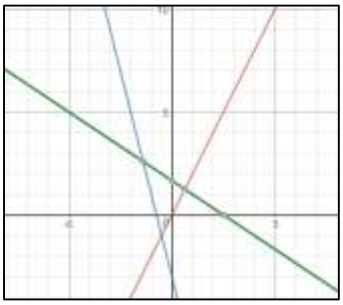
$$-3_{x1} + 9 = 12_{x2}$$

$$2x + 3y = 5$$

1.2. Ecuaciones lineales

De manera análoga existen muchas situaciones en las cuales se requiere relacionar más de dos variables independientes con las cuales puede satisfacer infinidad de procesos y de esta manera obtener solución a diferentes actividades en algún área específica de una empresa.

En este caso la representación de ecuaciones con más de dos incógnitas es la siguiente:



Forma general de una ecuación con *n* variables:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Ejemplo**:**

$$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5$$

$$5z + 8w - 9k = 12$$

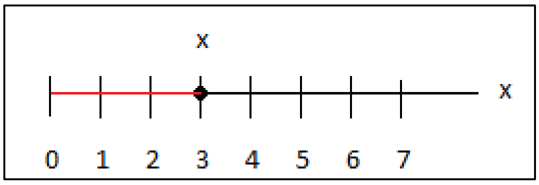
Dónde:

$$x_{1,}x_2, x_3 \; y \; z, w, k$$

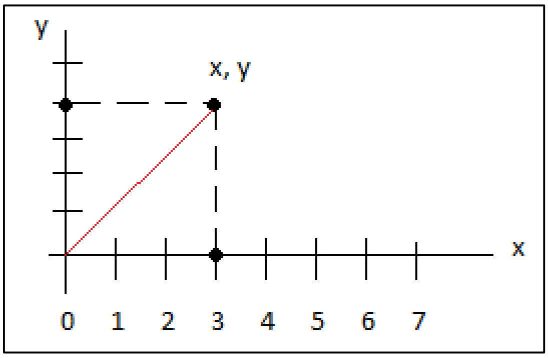
Son las variables de las ecuaciones, las cuales encontramos a través de métodos algebraicos que estudiaremos más adelante.

1.3. Vectores, matrices

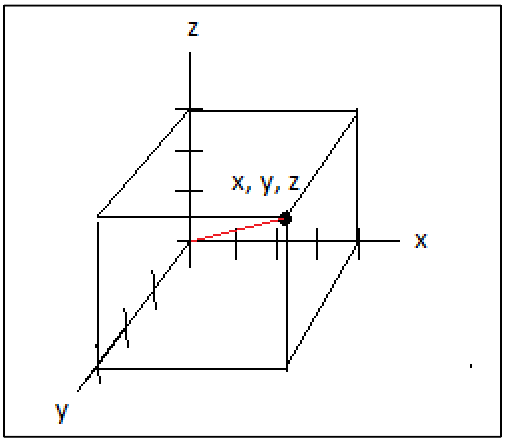
En el desarrollo de la humanidad ha habido diversos problemas que, en su momento, han sido paradigmas a partir de los cuales se han obtenido avances muy relevantes en el campo de las matemáticas. Empezando por conceptos como la recta euclídea, que por medio de un número (x) defineuna ubicación única en la recta.



En tanto que en el plano cartesiano se requiere de una pareja ordenada de números (x, y) para poder determinar una ubicación específica en una superficie.



Y en el espacio tridimensional se necesita de una terna ordenada de números (x, y, z) para poder determinar la posición de un punto en el espacio.



A partir de estos escenarios se observó la posibilidad de enfrentar problemas en los que ya no hay un equivalente físico o geométrico y para los que se construyeron conceptos conocidos como estructuras o espacios vectoriales. La base de ellos es el vector, que es un grupo de valores ordenados, distinguidos como n-tuplas, a partir de los cuales se puede determinar otro valor de manera unívoca, su notación se muestra a continuación:

$$v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

En estas estructuras, meramente matemáticas, se relacionan de manera simultánea las variables independientes$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con otro valor dependiente de ellas (v). Las nuevas estructuras matemáticas, sin embargo, mantienen cierta similitud con modelos anteriormente desarrollados para problemas de menos variables; por ejemplo, con la ecuación de una recta como la que se muestra a continuación:

$$4x = 2y \textit{(a)}$$

En ella se observa una variable libre, en este caso *x*, con una variable dependiente *y*.

Los vectores también pueden relacionarse con otros vectores y de esta forma tener configuraciones denominadas sistemas de ecuaciones, que simultáneamente requieren ser satisfechos, esto se denota de la siguiente forma:

$$v = (a_1, a_2, \ldots, a_n$$

$$u = (b_1, b_2, \dots, ab_n) \qquad \text{(b)}$$
$$z = (m_1, m_2, \dots, m_n)$$

Estas nuevas ecuaciones requieren la creación de un lenguaje y una estructura matemática de soporte que permita desarrollar métodos para poder trabajar con estos entes abstractos. Bajo estos arreglos, al grupo de variables independientes {$(a_1, a_2, \dots, an), (b_1, b_2, \dots, bn) \dots (m_1, m_2, \dots, mn)$}se le puede descomponer, por medio de un proceso multiplicativo (ver capítulo5),en dos elementos separados, estableciendo así una estructura parecida a la presentada en la ecuación (a), y por medio de esto reexpresar la ecuación (b) como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} d_{1,}d_{2,} & \cdots & d_n \\ e_{1,}e_{2,} & \dots & e_n \\ p_{1,}p_{2,} & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \\ \dots \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}$$

Al grupo ordenado de elementos (d_1, d2, …p_1...p_n), distribuido como un arreglo de renglones-columnas, y que se coloca entre corchetes, se le llama matriz de coeficientes, en tanto los grupos ordenados por columna (x_1,x_2…x_n) y (v,u,…z), son nominados vector independiente y vector dependiente, respectivamente; a la ecuación (c) se le conoce también como ecuación matricial lineal, por razones obvias, y se denota con la siguiente ecuación:

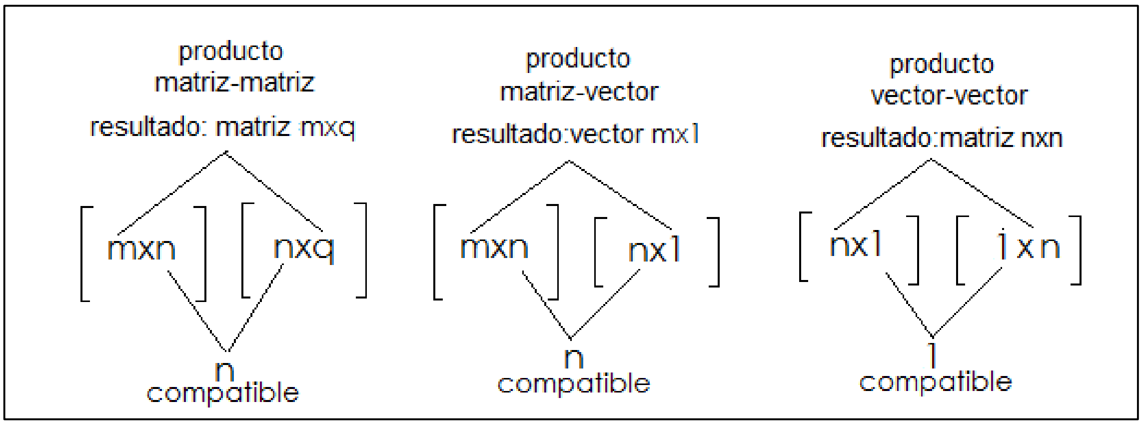
$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \text{(d)}$$

Donde ***A*** representa a la matriz de coeficientes (d_1, d_2, …p_1...p_n) y las letras ***x***, ***y*** representan en ese orden a los vectores independiente y dependiente.

Es importante resaltar las características mxn (renglones-columnas) de una matriz o vector, ya que a partir de éstas será posible realizar operaciones matemáticas entre ellos. A diferencia de los números reales, a los que siempre es posible sumarlos, restarlos o multiplicarlos, en el caso de las operaciones entre matrices o matriz-vector debe verificarse previamente su compatibilidad.

La compatibilidad se determina de la siguiente manera:

1) Para la operación de suma se requiere que el parámetro renglón columna mxn (también conocido como orden de la matriz o vector),de ambos elementos a sumar, sean idénticos.
2) En el caso de la multiplicación, la compatibilidad renglón-columna se verifica de la siguiente forma: para que una matriz de coeficientes de orden mxn se pueda multiplicar con otra matriz o vector, cualquiera de estos debe tener un orden nxq (matriz) o nx1 (vector), de tal forma que al colocarlos en el orden indicado por la multiplicación, las literales que describen los renglones y columnas (o sus correspondientes números) contiguos deben de ser iguales, en tanto que el orden renglones-columnas del resultado de la operación lo proporcionan las literales (o números) no contiguos, esto se muestra a continuación:



Un ejemplo de multiplicación entre una matriz de coeficientes 3x3 y un vector independiente 3x1, dan como resultado un vector dependiente 3x1, como se muestra a continuación:

$$Ax = y$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$3 \times \mathbf{33} \times 13 \times 1$$

Para profundizar en el conocimiento de las propiedades matemáticas y los procesos algorítmicos entre matrices y vectores se recomienda revisar el capítulo 5 de estos apuntes.

El orden de una matriz se refiere a la pareja de números mxn que describen el número de renglones y columnas presentes en una matriz o vector y que es necesario conocer para poder determinar la compatibilidad para los procesos de suma, resta y multiplicación de vectores y matrices.

Indicada la compatibilidad de matrices para las operaciones de suma y multiplicación, es necesario indicar que, de manera general, la multiplicación de matrices no es conmutativa, esto es, que dadas las matrices A y B tenemos:

AB ≠BA

A continuación, se resumen algunas propiedades del álgebra de matrices, considerando que A, B y C son matrices en tanto que “k” y “q” son escalares.

1) A+B=B+A
2) A+(B+C) =(A+B) +C
3) A(BC)=(AB)C
4) A(B+C) =AB+AC
5) (B+C) A=BA+CA
6) k(A+B) =kA+kB
7) (k+q) A=kA+qA
8) (kq)A=k(qA)
9) k(AB)=A(kB)
10) En términos generales AB≠BA

Para las propiedades algebraicas anteriormente listadas en las operaciones de suma es indistinto cambiar el signo más (+) de suma por el signo menos (-) de resta.

Finalizamos mostrando una nomenclatura muy utilizada de vectores y matrices, así como algunas propiedades algebraicas adicionales.

Vector renglón: [a1, a2, …an]

Vector Columna:

$$\begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ \dots \\ an \end{bmatrix}$$

Vector cero: [0, 0, …, 0]

Matriz cero o nula de orden 3x3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad (I) de 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior 3x3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Las Letras a-d-f forman la diagonal principal de la matriz

Matriz triangular inferior 3x3

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Las letras a-c-f forman la diagonal principal de la matriz

Para toda matriz A existe una matriz –A tal que A+-A=0

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para toda matriz A existe una única matriz nula tal que A+0=A

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1.4. Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas

Unsistema de m ecuaciones con n incógnitas se le representa como:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = z_1 \ldots (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = z_2 \ldots (2)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = z_m \ldots (m)$$

Dónde:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \ldots, a_{m1}, a_{mn}\ Son\ los\ coeficientes\ de\ las\ variables.$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n\ \ Son\ las\ variables\ de\ las\ ecuaciones$$

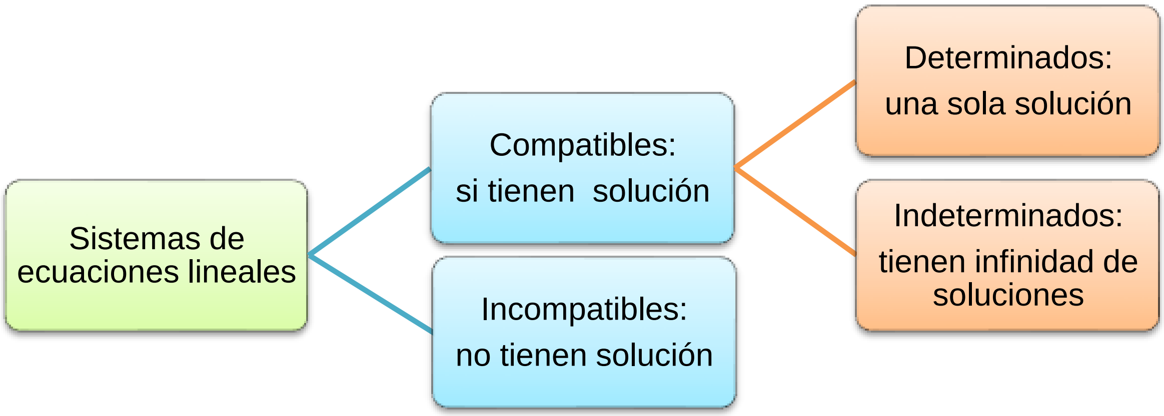
$$1{,}2{,}3 \ldots, m\ Son\ las\ ecuaciones$$

$$y\ en\ donde\ dado\ elemento\ a_{ij}\ los\ subindices\ ij\ indican$$

$$correspondientemente\ el\ renglon\ y\ la\ columna\ en\ el\ que\ se\ ubican$$

$$dentro\ de\ una\ matriz\ o\ vector$$

A diferencia de las ecuaciones lineales, en los sistemas de ecuaciones lineales podemos encontrar diferentes tipos de solución, esto se muestra a continuación:



1.5. Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan

La eliminación Gauss-Jordan de un sistema de m ecuaciones y n incógnitas es una metodología que permite determinar si existe un grupo de valores $x_2, x_2, \ldots, x_{n1}$que sean solución de un sistema de ecuaciones.

Como ya se ha mencionado al sistema de m ecuaciones con n incógnitas se le representa como:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = z_1 \ldots (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = z_2 \ldots (2)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = z_m \ldots (m)$$

Donde $1,2,3, \ldots, m$ son las ecuaciones y $x_1, x_{2,} \ldots, x_n$son las variables independientes de las ecuaciones.

El método Gauss-Jordan

El método de eliminación Gauss-Jordan consiste en representar primeramente el sistema de ecuaciones por medio de una matriz, y a partir de ésta obtener lo que se define como la matriz escalonada equivalente, a través de la cual se determina el tipo de solución de la ecuación. Un tipo de matriz escalonada se representa en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El procedimiento de escalonamiento de la matriz se realiza mediante la aplicación de tres operaciones permitidas por el método y éstas se indican a continuación:

1.- Intercambio de renglones
2.- Multiplicar un renglón por cualquier número real, diferente de cero
3.- Multiplicar un renglón por un número real y luego sumarlo con otro renglón.

Nota: no es válido multiplicar o sumar entre columnas.

Ejemplo 1:

$$x_2 - 4x_a = 8$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_a = 1$$

$$5x_1 - 8x_2 + 7x_a = 1$$

Determine si el siguiente sistema es compatible o incompatible.

Solución: el método requiere incluir en una sola matriz todos los valores numéricos del sistema de ecuaciones, como se indica en seguida:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior se denomina matriz aumentada del sistema, e incluye tanto a la matriz de coeficientes como el vector de valores dependientes en su estructura.

Para desarrollar el método y obtener la matriz escalonada, el procedimiento considera la selección de un pivote. Este elemento se escoge de tal forma que mediante la aplicación de las operaciones permitidas se vayan eliminando los elementos debajo de él y así ir generando la matriz escalonada. En este caso se intercambian los renglones 1 y 2 de la matriz, una vez hecho esto seleccionaremos del primer renglón el valor 2 correspondiente a la variable x_1, del sistema de ecuaciones original, esto se ilustra seguidamente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez escogido el pivote se eliminará el término 5 del tercer renglón; esto se logra multiplicando el primer renglón por (-5/2) y luego se suma con el tercero:

$$\xrightarrow{\frac{-5}{2}R_1+R_3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Es importante notar que el proceso indicado se realiza solamente para afectar el tercer renglón ya que el renglón uno, como se observa, queda como originalmente se planteó. Por claridad es común indicar con R_i las operaciones realizadas entre renglones, pero esta situación no es obligatoria.

Una vez que se hizo cero a los elementos bajo el pivote inicial (2), ahora se toma como nuevo pivote el valor 1 de la izquierda en el segundo renglón, se multiplica el renglón dos por (½) y se suma con el renglón tres:

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2+R_3}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 & 25 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Después de realizar las operaciones permitidas por el método de Gauss, el tercer renglón ha quedado, de acuerdo a los coeficientes que se observan en el tercer renglón de la matriz, como: $0\mathrm{x}1 + 0\mathrm{x}_2 + 0\mathrm{x}_3 = 5/2$ o $0 = 5/2$, desde luego esta ecuación nunca es verdadera, por lo que se concluye que el sistema original es incompatible, es decir, no tiene solución.

Ejemplo 2:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, representado por su matriz aumentada, indique por el método de Gauss si es compatible o incompatible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución: tomamos como pivote el valor 1 del tercer renglón, entonces a este renglón lo multiplicamos por (-2/·3) y lo sumamos con el primer renglón:

$$\xrightarrow{-\frac{2}{3}R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Así se obtiene la matriz escalonada de la derecha, en la cual podemos observar que el sistema de ecuaciones es compatible y los valores que satisfacen la ecuación matricial se obtienen directamente:

$$X = -4, \ldots..Y = 2, \ldots.Z = 10$$

Es importante indicar que el proceso de escalonamiento sobre la matriz aumentada solo se realiza considerando la parte correspondiente a la matriz de coeficientes, esto es, que el escalonamiento no se lleva a cabo sobre el vector independiente, aunque este sí se ve afectado por todas las operaciones realizadas por el método de Gauss.

El método de Gauss mostrado es un procedimiento que simplifica y acelera notoriamente la obtención de la solucione de un sistema de ecuaciones, y es además un método que facilita el desarrollo de algoritmos por computadora y, por tanto, es de amplio uso en la práctica profesional.

Una liga que se recomienda para practicar y fortalecer los conocimientos vistos en este apartado se encuentra en la Red Universitaria de Aprendizaje en:

http://fcasua.contad.unam.mx/clases_virtuales/informatica/1168/sesion_02/player.html

1.6. Sistemas homogéneos

Los sistemas de ecuaciones homogéneos están dados por la siguiente expresión:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}$$

En forma matricial el sistema se escribe como:

$$Ax = 0$$

Es importante indicar que todo sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial, **x**=**0** como se indica a continuación:

$$x_1 = x_2 = x_3 \ldots = x_n = 0X = -4, \ldots\ldots Y = 2, \ldots . Z = 10$$

Sin embargo, es posible que el sistema tenga soluciones diferentes a la trivial; en este punto es conveniente recordar que un sistema compatible de ecuaciones puede tener una o múltiples soluciones. Un ejercicio relacionado lo mostramos abajo:

Ejemplo 3. Obtener la solución del sistema homogéneo:

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$-x + 3y + 2z = 0$$

$$2x + y - 2z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

En las figuras anteriores se muestra el sistema original de ecuaciones y la matriz aumentada, en esta última se aplicará el metodo de Gauss-Jordan.

A continuación se muestran los diferentes pasos para obtener la matriz escalonada, asociada al sistema de ecuaciones:

a) $R_1 + R_2$
b) $-2\mathrm{R}_1 + R_3$
c) $\frac{1}{5} R_2$
d) $3\ R_2 + R_3$
e) $\frac{1}{5} R_3$

$$a)\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & 5 & 0\\ 0 & -3 & -8 & 0\end{bmatrix}$$

$$b),c)\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -8 & 0\end{bmatrix}$$

$$d)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 0\end{bmatrix}$$

$$e)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}x=0\\ y=0\\ z=0\end{matrix}$$

De lo que se desprende que el sistema propuesto solo tiene la solución trivial:

$$x = y = z = 0$$

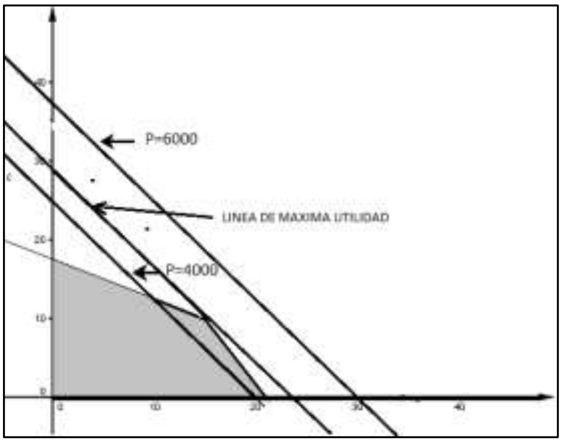
Es apropiado mencionar que para este tipo de sistemas de ecuaciones es posible reducir la matriz aumentada a la matriz de coeficientes, ya que, como se observa tras el desarrollo, la última columna solo tiene ceros, sin embargo, la matriz aumentada se ha dejado “completa” con el fin de facilitar una aplicación general del método de Gauss, en especial considerando la obtención de las soluciones por medio de programas de cómputo.

El Método de Gauss Jordán es uno de los métodos más versátiles del algebra lineal, ya que tiene diversas aplicaciones directas en los sistemas de ecuaciones lineales, en inversión de matrices, evaluación de determinantes e independencia lineal. Así mismo es uno de los métodos que mejor se adapta a ser aplicado por métodos computacionales, razón por la cual es de sumo interés en nuestro campo de acción: la informática.

RESUMEN

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requiere calcular valores para diferentes incógnitas que conforman los "Sistemas de Ecuaciones Lineales" a fin de que satisfagan al sistema. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales son generados de acuerdo con las condiciones en que se dan las variables experimentales de un problema o proceso en estudio. Para la obtención de estos valores existen diversas metodologías, como el método de Gauss-Jordan mostrado, que permiten resolver el sistema propuesto y en esta variedad de recursos es donde tiene su mayor importancia el "álgebra lineal".

Actualmente,las empresas requieren usar frecuentemente estos recursos debido a que están conformadas internamente por diversas áreas de análisis, en donde se toman de manera constante decisiones que forman parte de los planes de desarrollo y crecimiento de las organizaciones.



BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

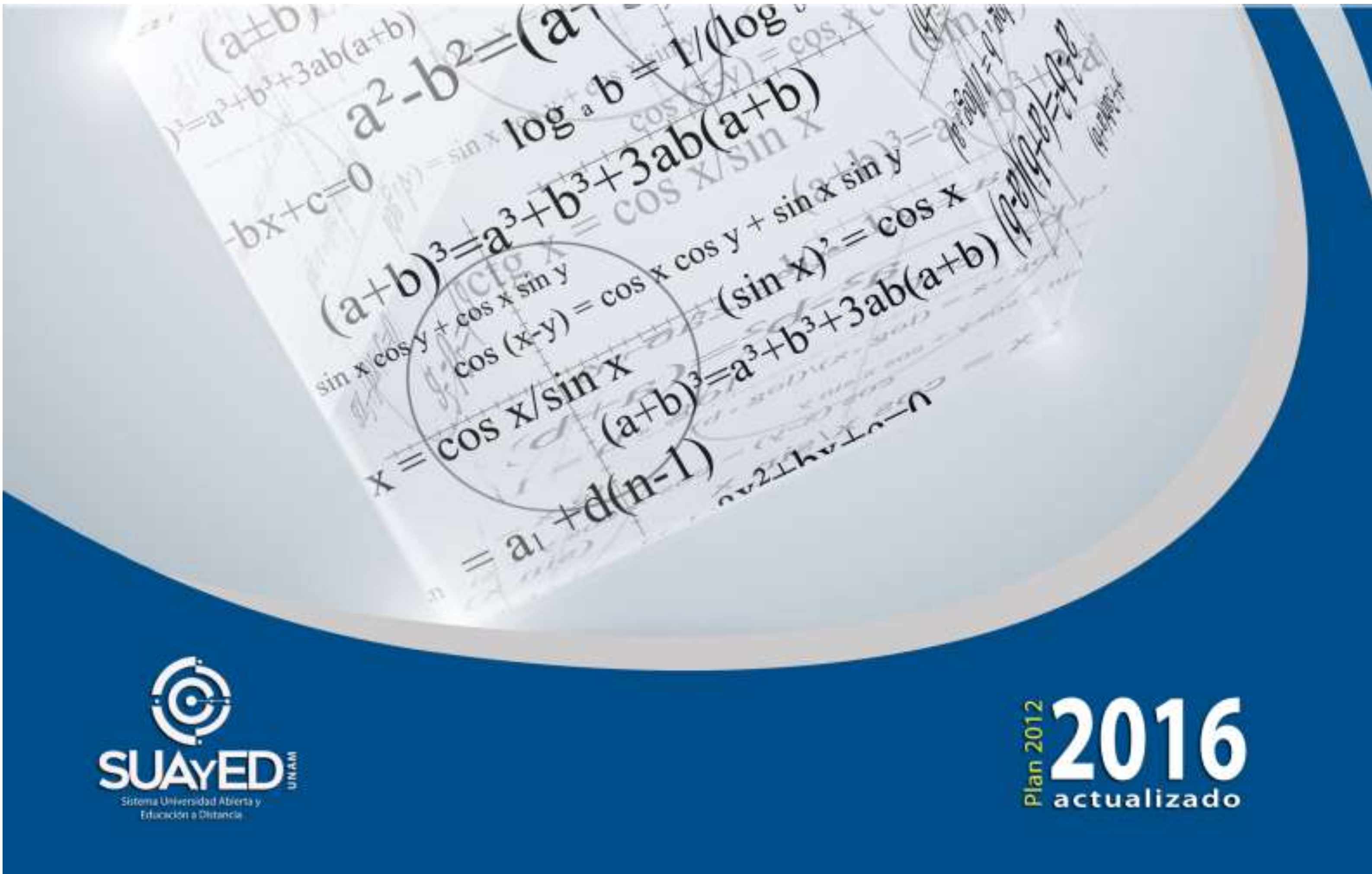
Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard y David Hill (2006). *Algebra lineal.*	1	1-9 y 62 90
Poole, David (2004).*Algebra lineal. Una introducción moderna*.	2	57-88

Kolman, Bernard y Hill, David R. (2006).*Algebra lineal* (Octava Edición). México: Pearson Prentice Hall, 648 pp.

Poole, David (2004).*Algebra lineal: Una introducción moderna*. México: Thomson, 763pp.

Unidad 2

Espacios vectoriales



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificará los elementos y propiedades de los espacios vectoriales.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

2. Espacios vectoriales

2.1. Definición y propiedades básicas

2.2.Subespacios[2]

2.3.Bases ortonormales y proyecciones en "R^2"

INTRODUCCIÓN

En diversas ramas de la ingeniería y de las ciencias es común encontrar problemas en los que se relacionan factores que entre sí tienen una completa representación física y geométrica. Tal es el caso de un punto dentro de un horno en un proceso industrial y en el que por medio de relacionar las variables de altura, profundidad, anchura y temperatura se puede definir vectorialmente la condición de cada punto en su interior. Sin embargo, en el planteamiento de diversos problemas de la administración, la contabilidad y la informática, cuando se requiere relacionar los factores que conforman un problema dado, no siempre es posible obtener un escenario físico o geométrico equivalente. La situación anterior fue un entorno común en diversas disciplinas de las ciencias sociales y administrativas, hasta que se pudo establecer una relación matemática de equivalencia entre lo que es un espacio de variables físicas y un espacio de variables conceptuales, a través de los conceptos de vector y espacio vectorial.

Este hecho y la posibilidad de contar con un conjunto de herramientas matemáticas de análisis ya desarrolladas para las ciencias y las ingenierías, ha permitido un avance sorprendente en disciplinas de nuestro campo de interés. En este capítulo abordaremos algunas de estas ideas y conceptos.

Simbología y convenciones para este capítulo

Una letra minúscula o número en negritas representa un vector: **v**,**w,0**, **1**, etc.
R^i representa un espacio vectorial, donde i puede ser un número o una letra.
Una letra mayúscula representa un subconjunto de R^i: G, S, etc.

2.1. Definición y propiedades básicas

En el campo de las matemáticas el concepto de vector, como vimos en la unidad 1, se refiere a un conjunto ordenado de números que se representan por medio de una n-tupla(a_1, a_2..., an) dada; así mismo al conjunto de todas las posibles n-tuplas ordenadas se le denomina espacio cartesiano de n dimensiones y se representa por R^n. En el caso de n=2 se llama plano o superficie cartesiana y para n=3 se tiene un espacio como en el que nos desenvolvemos los humanos; para ambos casos, de manera correspondiente, a las n-tuplas se les nomina par ordenado de números y terna ordenada de números.

Un punto de interés acerca de los espacios vectoriales es la idea de dimensión (ver unidad 4). Esta versa sobre el hecho de una variable que es independiente de cualquier otra; la situación la podemos ejemplificar claramente en un espacio de tres dimensiones R^3como en el que vivimos y que cuenta con altura, profundidad y anchura y en donde ninguna de las variables depende, o queda determinada, por la estipulación de cualquiera de las otras.

A partir de las ideas anteriormente expuestas procedemos a definir el concepto matemático de Espacio Vectorial R^n. Éste, como ya se mencionó, es el conjunto de todos los vectores o n-tuplas posibles sobre las que se definen las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar. Para nuestro caso particular la suma entre dos vectores **v** =(v_1,v_2, …v_n) y **w** =(w_1,w_2, …, wn) del espacio vectorial R^nse define como:

$$\begin{aligned} v + w &= (v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \end{aligned}$$

Es decir, sumando componente a componente cada uno de los elementos de un vector, por ejemplo, para los vectores v_1= (3, 0,4) y v_2= (2, 1,5), la suma v_1+v_2:

$$v_1 + v_2 = (3,0,4) + (2,1,5) = (3 + 2,0 + 1,4 + 5) = (5,1,9)$$

En tanto, el producto por un escalar k:

$$kv = k(v_1, v_2, \dots, v_n) = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$$

Ejemplo, dado el escalar k=5 y el vector v= (2, 0,4) el producto kv es:

$$v = 5(2,0,4) = (5 \times 2,5 \times 0,5 \times 4) = (10,0,20)$$

Adicionalmente, se debe cumplir que para cualesquiera vectores **u**,**v,w** de R^n y escalares, *k* y *q* de los números reales, se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ también es un elemento deR^n
- ii) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$
- iii) $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u})$
- iv) Existe un vector **0**, tal que $\boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$
- v) Para todo vector **v**, existe un vector denominado –**v**, tal que **v**+(-**v**) =**0**
- vi) Para todo k perteneciente a los números reales se cumple que k**v** también pertenece a R^n
- vii) $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{kv} + \boldsymbol{kw}$
- viii) $(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{kv} + \boldsymbol{qv}$
- ix) $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{qv}) = (\boldsymbol{kq})\boldsymbol{v}$
- x) para el escalar 1 se cumple que 1**v**=**v**

Es importante resaltar que las propiedades lista das son puramente matemáticas, pero solamente a través de la verificación del cumplimiento de todas ellas, será posible aplicar en nuestros problemas reales de estudio las herramientas del álgebra lineal, que serán revisadas en capítulos posteriores, de ahí la relevancia de definirlas.

Un espacio vectorial V es un conjunto de n-tuplas, denominados vectores, sobre los que se definen las operaciones de adición de vectores y multiplicación por un escalar y cumplen un conjunto de 10 propiedades básicas.

2.2. Subespacios

Subespacio vectorial

El concepto se refiere al hecho en el que un subconjunto particular de vectores G, perteneciente a un espacio vectorial R^n, por sí mismo puede ser un espacio vectorial, bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar definido en R^n.

Un par de condiciones matemáticas suficientes para determinar si un subconjunto de vectores G perteneciente al espacio vectorial R^n es un subespacio vectorial de éste, están dadas por:

1) Si **v**,**w** son vectores de G, entonces $(v + w)$ también es un vector de G
2) Sí kk es un escalar de los números reales, entonces $\boldsymbol{kv}$ también es un elemento de G

Un par de condiciones matemáticas suficientes para determinar si un subconjunto de vectores G pertenecientes al espacio vectorial R, es un subespacio vectorial de éste, están dadas por el concepto de cerradura, esto es, que bajo la suma y multiplicación por un escalar los vectores resultantes pertenecerán también al conjunto G.

Ejemplo:

Considere el conjunto de todos los vectores G del plano cartesianoR^2, tal que todo vector $v = (x, y)$ cumple que el signo del elemento x es igual al signo del elemento y.

Para determinar si G es un subespacio vectorial, tomaremos un par de vectores **v**, **w** para verificar las condiciones anteriormente enunciadas.

i) $v + w = (x, y) + (x_1 + y_1) = (x + x_1, y + y_1)$debe pertenecer a G

ii) $kv = k(x, y)$debe pertenecer a G

La parte más sencilla de verificar es la del inciso ii) ya que $kv = (kx, ky)$

sí $k > 0; x, y$ serán ambas del mismo signo y pertenecen a G

sí $k < 0; x, y$ también tendrán el mismo signo y pertenecen a G

Para el caso de i) es conveniente ir verificando su pertenencia a G para diferentes conformaciones de los vectores, y así comprobar que tanto x_i como y_i, cumplen con el requisito, esto es, tener el mismo signo.

Para probarlo tomaremos como primera opción los vectores $v = (3,5)$, $w = (-5, -3)$que pertenecen a G.

Al sumarlos obtendremos:

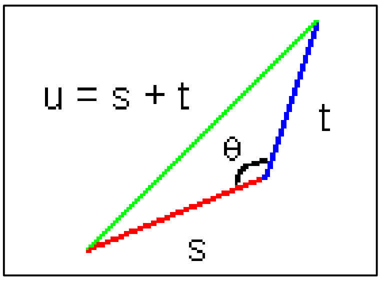
$$v + w = (3,5) + (-5, -3) = (3 - 5\ , 5 - 3) = (-2,2)$$

De este resultado observamos que el signo de “x” es diferente al de “y”, por lo que G no es un subespacio vectorial bajo la suma de vectores.

Es conveniente remarcar que todo espacio vectorial V tiene por lo menos dos subespacios vectoriales de manera ineludible, éstos son el mismo espacio vectorial V, ya que por las propiedades lógicas de los conjuntos todo conjunto es un subconjunto de sí mismo; en tanto que el segundo subespacio vectorial está dado por G= {**0**}, también conocido como subespacio trivial. Estos dos subespacios cumplen con las propiedades de dimensión enunciadas por la ecuación (a) en la página 54 del capítulo 3 de estos apuntes.

2.3. Bases ortonormales y proyecciones en "R^2"

En el ámbito de los vectores es interesante notar a partir de la propiedad i) (inciso 2.1) de los espacios vectoriales, que todo vector **u** del espacio vectorial R^n puede ser expresado por la suma de otros vectores del mismo espacio estudiado. Este hecho se ilustra en la siguiente figura, en un espacio R^2.

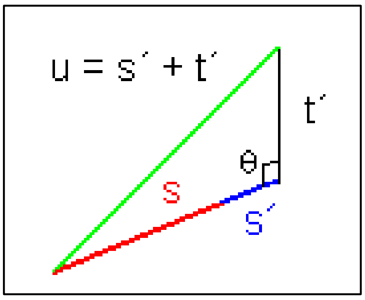


Bajo esta óptica, y retomando los conocimientos de la trigonometría, podemos escribir que para todo triángulo de lados s,t,u se cumple que la magnitud de sus lados está dada por la ecuación:

$$u^2 = s^2 + t^2 - 2(st)(\cos\theta) \qquad \text{(a)}$$

Esta expresión es también conocida como ley de los cosenos o generalización del teorema de Pitágoras y es una ecuación de uso general, sin embargo, para su aplicación se requiere saber tanto las características propias de los vectores **s**,**t,** así como el ángulo θ que estos forman y su evaluación en la función coseno.

Dada esta posibilidad de poder expresar todo vector **u** como la suma de cualesquiera vectores, entonces sería conveniente poder escoger aquellos vectores que faciliten la realización de las operaciones numéricas relacionadas a la obtención de éste. Si observamos la expresión (a) podemos notar que entonces sería deseable que el término (-2(st)(cosΘ)) se anulara y de esta forma solo requeriríamos conocer las características básicas de los vectores **s**,**t** reduciendo de esta manera la necesidad de información y de operaciones necesarias para poder determinar el vector **u**. Esto es posible si consideramos la opción de que los vectores **s**,**t** sean perpendiculares $(\theta = \frac{\pi}{2}, (\cos \pi/2) = 0)$entre sí y de esta forma poder obtener el vector **u** a partir del teorema de Pitágoras, situación que se muestra en la siguiente figura en el plano (R^2).



De la figura observamos que los vectores **s** y **s´** son proporcionales (colineales) entre sí y se relacionan por la expresión:

$s´ = ks,$ donde k es una constante

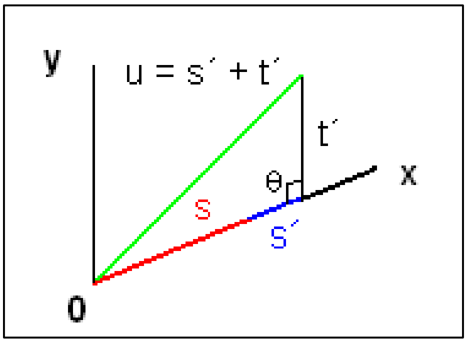
En tanto, los vectores $s´$ yt', como habíamos propuesto, son perpendiculares entre sí (θ=90°=$\pi/2$),por lo que la ecuación que ahora relaciona los vectores $s´, t´, u$ está dada por el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos, y se enuncia a continuación:

$$u^2 = s'^2 + t'^2$$

Dado también que:

$$u = s' + t' \text{(b)}$$

Ahora si hacemos la consideración que el vértice formado por **u** y **s´** es el origen de coordenadas (x, y)en el plano cartesianoR^2, podemos expresar a **u** como:



$$u = (s', t') = (ks, t')$$

Si tomamos la expresión (b) anteriormente enunciada y realizamos una operación algebraica vectorial en donde hagamos el producto punto (ver sección 4.2 de estos apuntes) del vector **s** en ambos lados de (b), observaremos:

$$u \cdot s = s' \cdot s + t' \cdot s = ks \cdot s + 0 = k \, \|s\|^2 \qquad \text{(c)}$$

Recordando que como **s** y **t´** son perpendiculares, de la sección 4.2 sabemos que $t' \cdot s = 0$ ydespejando k de (c):

$$k = \frac{u \cdot s}{\|s\|^2} \qquad (d)$$

De la ecuación (d) debemos notar que k es un valor escalar ya que tanto el producto punto $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{s})$ como la norma al cuadrado de s$\left(\|s\|^2\right)$son valores escalares (ver sección 4.2) y, por tanto, su cociente es un valor escalar, tal como se propuso originalmente.

Sustituyendo el valor de $k$en$\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{ks}$ tenemos.

$$s' = \left(\frac{u \cdot s}{\|s\|^2}\right) s \qquad \text{(e)}$$

Regresando a la expresión (b) y despejando **t´**

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{s}' + \boldsymbol{t}' \qquad \text{(b)}$$
$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{s}' = \boldsymbol{u} - \left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|^2}\right) \boldsymbol{s}$$
$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{u} - \left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|^2}\right) \boldsymbol{s} \qquad (f)$$

Las expresiones (e) y (f) nos permiten que, dados dos vectores$\boldsymbol{u}$y$\boldsymbol{s}$ en R^n, descomponer a $\boldsymbol{u}$ en dos vectores de proyección s', t'**,** ortogonales (perpendiculares) entre sí.

Dados dos vectores **U** y **S** es posible descomponer a **U** como la suma de dos vectores ortogonales **S'** y **t'** haciendo que:

$$s' = \left(\frac{u \cdot s}{\|s\|^2}\right) s$$
$$t' = u = \left(\frac{u \cdot s}{\|s\|^2}\right) s$$

Para ilustrar la aplicación del concepto y el procedimiento, presentamos el siguiente ejemplo en R^2.

Ejemplo. Considere los vectores $\boldsymbol{u} = (4,3)$ y el vector $\boldsymbol{s} = (2,1)$, descomponga $\boldsymbol{u}$ en dos proyecciones ortogonales $\boldsymbol{s}', \boldsymbol{t}'$.

De la expresión (e) tenemos que:

$$s' = \left(\frac{u \cdot s}{\|s\|^2}\right) s$$

1)

$$k = \left(\frac{u \cdot s}{\|s\|^2}\right) = \frac{(4,3)(2,1)}{(2^2+1^2)} = \frac{(4\times2+3\times1)}{5} = \frac{11}{5} = k \text{ (valor escalar)}$$

2)

$$\left(\frac{u \cdot s}{\|s\|^2}\right) s = \left(\frac{11}{5}\right)(2,1) = \left(11 \times \frac{2}{5}, 11 \times \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right) = (4.4,2.2) = s'$$

y el vector ***t´*** está dado por (f):

$$\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{u} - \left(\frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|^2}\right) \boldsymbol{s} = (4,3) - (4.4,2.2) = (4 - 4.4, 3 - 2.2) = (-0.4,0.8)$$

Resumiendo,

$$s' = (4.4, 2.2)$$
$$\boldsymbol{t}' = (-0.4, 0.8)$$

Comprobando que ***s´y t´*** son ortogonales por medio del producto punto:

$$t \cdot s' = (-0.4,0.8) \cdot (4.4,2.2) = (-0.4 \times 4.4) + (2.2 \times 0.8)$$
$$= -1.76 + 1.76 = 0$$

De esta forma se comprueba que **t´,s** son ortogonales entre sí, además se cumple que:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{s}' + \boldsymbol{t}' = (4.4,2.2) + (-0.4,0.8) = (4.4 - 0.4,2.2 + 0.8) = (4,3)$$

En esta sección obtuvimos los elementos para que dados dos vectores en R^n se obtenga un par de vectores ortogonales a uno de ellos; este procedimiento es conocido como proyección ortogonal de vectores y es suficiente para obtener una base ortogonal de vectores en un plano cartesiano (R^2), sin embargo, para obtener una base similar de vectores para espacios de mayores dimensiones (R^n) es necesario establecer una generalización del procedimiento aquí aplicado, esta generalización se abordará en el capítulo 4 de estos apuntes.

Otra idea que se tratará en este apartado se refiere al concepto de bases ortonormales. Esta se asocia a un conjunto de vectores H pertenecientes a R^n, por medio de los cuales es posible obtener cualquier otro vector del espacio R^n al que pertenecen; además, los vectores de H presentan las características de que todos sus elementos son perpendiculares entre sí y la longitud o norma de cada vector del conjunto es unitaria, esto se define matemáticamente a continuación.

Dado un conjunto de vectores $H = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$de un espacio vectorial R^n se dice que este conjunto de vectores es una base ortonormal de R^nsi cumple que:

i) Cualquier vector **u** perteneciente a Rn se puede representar como una combinación lineal de los elementos de H, esto es:

$$u = k_1w_1 + k_2w_2 + \cdots + k_nw_n \text{ donde } k_i \text{ son valores escalares}$$

El producto punto (ver sección 4.2) para cualesquiera dos vectores $\boldsymbol{wi}, \boldsymbol{wj}$ de H es igual a cero:

$$\boldsymbol{wi} \cdot \boldsymbol{wj} = \boldsymbol{0}$$

ii) La longitud o norma (ver sección 4.2) del vector $\boldsymbol{w_j} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_n})$, denotada por $\|w_j\|$ y obtenida a partir de la siguiente ecuación, es 1:

$$\|\boldsymbol{w_j}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a_1}^2 + \boldsymbol{a_2}^2 + \cdots + \boldsymbol{a_n}^2)} = \boldsymbol{1}$$

La ventaja de contar con un grupo de vectores ortonormales se debe a que muchas de las operaciones en los algoritmos que se desarrollarán posteriormente (y que también se utilizan en fórmulas como las indicadas en los incisos (c) a (f) de este tema) se simplifican al generar algunos elementos nulos (ceros), lo que disminuye ampliamente tanto el número de operaciones, así como su complejidad y de esta forma se obtienen de manera más rápida y fácil los resultados buscados en los problemas abordados; con este tipo de vectores también es posible mejorar la interpretación de resultados al tener en muchos casos elementos de evaluación de tipo escalar (números) en vez de vectores, particularmente para los casos de dimensiones mayores a tres, en los cuales ya no es posible o conveniente tener interpretaciones físicas o geométricas.

Un conjunto de vectores H se dice que es Ortonormal si todos sus elementos son perpendiculares entre sí y la norma o tamaño de cada uno es igual a 1.

Un conjunto de vectores G se dice que es una base de un espacio vectorial R^n, si es linealmente independiente (ver capítulo 4) y por medio de combinaciones lineales de sus elementos puede generar cualquier otro vector perteneciente al espacio vectorial R^n.

Una liga que se recomienda para practicar y fortalecer los conocimientos vistos en este apartado se encuentra en la Red Universitaria de Aprendizaje en:

http://fcasua.contad.unam.mx/clases_virtuales/informatica/1168/sesion_10/player.html

RESUMEN

La potencia de análisis que proporciona el álgebra lineal es un recurso que no debe ser desaprovechado por las disciplinas de nuestro campo de estudio, sin embargo, antes de poder aplicar sus métodos es necesario determinar para nuestros problemas las características vectoriales de sus entornos y su espacio de acción (esto es, el espacio vectorial); asimismo, poder operar con conjuntos reducidos o muestras de estos escenarios (subespacios vectoriales),ya que en ocasiones están constituidos por una gran cantidad de elementos y casos, para finalmente establecer las bases de análisis (bases ortonormales) que nos permitirán modelar, resolver y analizar matemáticamente de una forma más rápida, fácil y sólida los diversos problemas que abordaremos en la práctica profesional.

Es importante remarcar que, pese a su aparente aridez, dada su formalidad matemática, es de suma importancia aprender acerca de los espacios vectoriales y, en general, del algebra lineal, para hacernos del lenguaje matemático asociado y de su simbología, con el fin de poder aplicar a nuestros problemas profesionales un amplio arsenal de herramientas matemáticas que potenciarán, facilitarán y acelerarán nuestras capacidades de análisis y desarrollo, lo que redundará, sin duda, en ampliar nuestro espectro de oportunidades laborales.

BIBLIOGRAFÍA

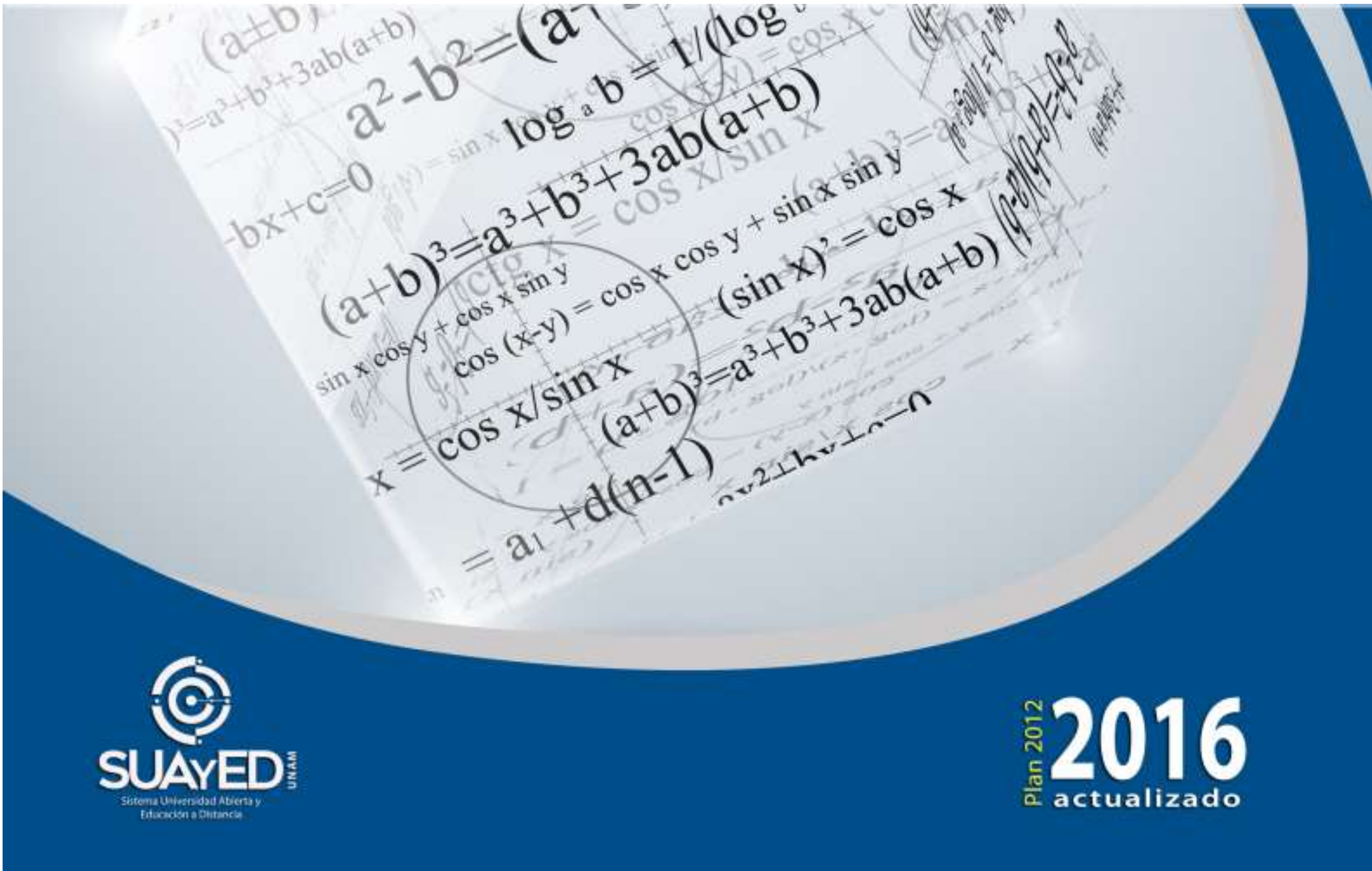
SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Howard, Anton (1983). *Introducción al álgebra lineal* (sexta edición). México: Limusa.		

Howard, Anton (1983). *Introducción al álgebra lineal* (sexta edición). México: Limusa.

UNIDAD 3

Transformaciones lineales



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno comprenderá la representación matricial de las transformaciones lineales.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

3. Transformación lineal
3.1. Definición y ejemplos
3.2.Imagen y Kernel
3.3. Representación matricial de una transformación lineal
3.4. Isomorfismos

INTRODUCCIÓN

En la vida actual es muy importante resolver problemas utilizando las matemáticas.

Cuando se trabaja con espacios vectoriales surgen situaciones en las cuales es de utilidad usar las transformaciones lineales para la solución de problemas, una parte importante es la representación matricial de una transformación lineal. Kolman, (2006) pp. 272 y 521.

Aplicaciones de las Transformaciones lineales.

Se aplican en sistemas de ecuaciones lineales, codificación de información, edición de imagenes y en un sinnúmero de otros problemas; gracias a las transformaciones lineales sabemos acerca del dominio e imagen de un problema, y así ayudar a determinar si es un espacio vectorial. Poole, D (2007) pag.201.

El *álgebra lineal*es un recurso “invisible” ampliamente utilizado en las actividades cotidianas, por ejemplo, en la manipulación de imágenes en programas de edición como Photoshop, en la realización de compras por Internet que se realizan a través del protocolo SSL o en las búsquedas de información en la Web que se realizan por medio de los servicios de búsqueda como Google, en ellas las transformaciones lineales juegan un papel relevante para poder llevarlas a cabo.

3.1. Definición y ejemplos

A continuación, se tiene la simbología que se utilizará en este capítulo:

- Una letra minúscula **a**, **b**,…… representa un "Vector".
- Una letra mayúscula A, B… un "Espacio Vectorial" y también "Sub-espacios Vectoriales". **A**, **B** indica una matriz.
- "Vectores" entre llaves {a, b…} son una "Base Generadora" de un espacio R^n.
- "T: V→W" Representa una "Transformación Lineal" con su dominio y contradominio.
- dim (V) Representa la Dimensión de un Espacio Vectorial.

Transformación lineal

Definimos una "Transformación lineal" Tde un espacio vectorial R sobre otro espacio vectorial S,a una función que asigna a cada vector **r** € R un único vector **s** de S. Es decir, si R y S son espacios vectoriales una función T: R→ S recibe el nombre de transformación lineal si:

a) T(u+v) =T(u)+T(v) cualesquiera vectores **u** y **v** en V.

b) T(k**u**) = k T(**u**), para cada **u** en V y cada escalar k en R .(Kolman, (2006), p. 502)

Ejemplo

Consideremos la función

$T: R^3 \rightarrow R^2$ definida bajo la regla $T(x, y, z) = (x, y)$, es decir, pasar de la visualización de un punto en el espacio a una proyección en el plano; indique si es una transformación lineal.

Sí se tiene que:

$$T(a) = T(8,5,9) = (8,5) \text{ y } \mathrm{T(b)} = \mathrm{T}(2,3,4) = (2,3), \text{entonces}$$

$$\mathrm{T(a+b)} = \mathrm{T}\big((8,5,9) + (2,3,4)\big) = \mathrm{T}(10,8,13) = (10,8)$$

$$\mathrm{T(a)} + \mathrm{T(b)} = \mathrm{T}(8,5) + \mathrm{T}(2,3) = (10,8)$$

$$así\ mismo\ aplicando\ el\ producto\ escalar\ (ver\ capítulo\ 5):$$

$$\mathrm{T(kb)} = \mathrm{T}\big(\mathrm{k}(2,3,4)\big) = \mathrm{T}(\mathrm{k}2, \mathrm{k}3, \mathrm{k}4) = (\mathrm{k}2, \mathrm{k}3)$$

$$\mathrm{kT(b)} = \mathrm{kT}(2,3,4) = \mathrm{k}(2,3) = (\mathrm{k}2, \mathrm{k}3)$$

Por lo que la transformación propuesta es una transformación lineal.

Ejemplo:

Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$:considere la transformación de un punto en el espacio a una proyección en el plano dada por la regla de asignación:

$$T(x, y, z) = (z, 2z)$$

Se asignan los valores: primero a cada “x” le corresponde directamente el valor de “z”, enseguida el valor de “z” es multiplicado por 2 y se coloca en la posición de “y”.

$T(x, y, z) = (z, 2z),$ entonces, dado el vector (2, 1,4), su transformación sería:

$$(2,1,4) = (4,8)$$

Se deja al alumno comprobar si el ejemplo propuesto es una transformación lineal.

Para esto recuerda que una transformación es lineal si cumple las siguientes condiciones:

i. $T(v1 + v2) = T(v1) + T(v2)$

ii. $\mathrm{T}(\alpha v1) = \alpha T(v1)$

Como hemos mencionado, hay diversas aplicaciones de las transformaciones lineales; una de ellas es la de simplificar la óptica de observación de un problema. Esto puede ilustrarse a través de la siguiente ecuación que relaciona dos variables:”x” e “y”:

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0 \qquad \text{(a)}$$

La ecuación a simple vista se observa confusa, ya que escrita de esta forma no nos permite identificar de forma directa sus características geométricas.

Para facilitar la determinación de la naturaleza de la ecuación expresada podemos agrupar y despejar los términos en “x” e “y” de la siguiente manera:

$$(2x^2 - 12x) + (y^2 - 4y) = -18$$

Factorizando el “2”en el término “x”:

$$2(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -18$$

Completando los binomios expresados en términos de “x” e “y”:

$$2(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -18 + 18 + 4$$

$$2(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0 \quad \text{(a)}$$

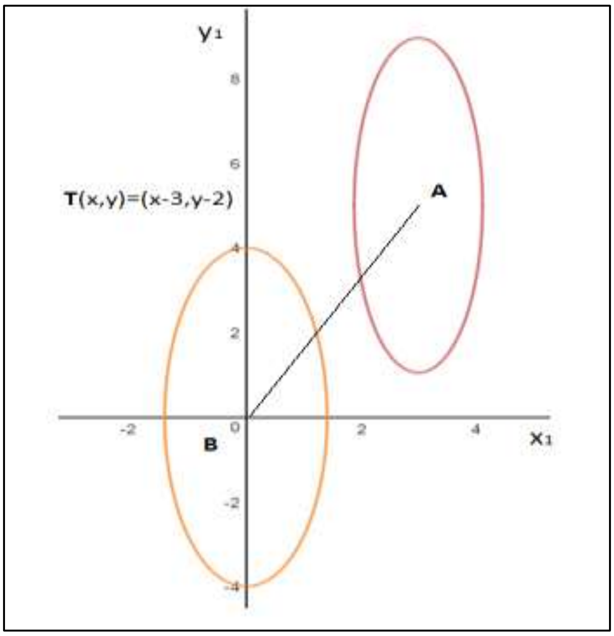
Dividiendo entre 4:

$$\frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Si ahora aplicamos una regla de transformación como:$x_1 = (x-3)$y $y_1 = (y-2)$, la expresión quedará en la forma:

$$\frac{x_{1^2}}{2} + \frac{y_{1^2}}{4} = 1 \quad \text{(b)}$$

Las gráficas de las ecuaciones (a) y (b), (a) en rojo, se muestran en la siguiente figura:



Efecto de la transformación lineal $T\ A \to B$

Entonces es posible proponer una transformación T:

$$T(x, y) = (x - 3, y - 2)$$

De esta forma es posible manejar una representación gráfica como la que se observa en la figura anterior. La transformación aplicada nos facilita la identificación y la determinación de las características de la elipse correspondiente con respecto a los ejes coordenados "x_1-y_1". Es importante observar la relación gráfica de equivalencia entre ambas representaciones antes y después de aplicar la transformación lineal.

Otras propiedades de las transformaciones lineales son:

Si T: R→S es una transformación lineal, entonces la transformación aplicada sobre el vector cero es $\mathrm{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
Sea T: R→S una transformación lineal. Si $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \dots, \boldsymbol{r_n}\}$es una base de R, entonces el conjunto $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{Tr_1}, \boldsymbol{Tr_2}, \dots, \boldsymbol{Tr_n}\}$es un generador del espacio vectorial S.

3.2. Imagen y Kernel

Consideremos, en primer lugar, la transformación de R^3en R^2, definida por:

$$S(x, y, z) = (y, 3y)$$

De lo propuesto se observa que en este caso la imagen de cualquier vector del dominio (R^3) bajo la transformación es una pareja ordenada (R^2) cuya segunda coordenada es el triple de la primera.

Al conjunto de todos los vectores obtenidos aplicando esta regla de asignación se les conoce como "imagen" de la transformación S.

Una vez definida la imagen de una transformación, nos introduciremos en la definición de núcleo.

Se llama núcleo de una transformación al conjunto de vectores cuya imagen es el vector cero.

La utilidad de los conceptos de núcleo e imagen está asociada a determinar las características de una trasformación lineal en lo que se conoce como la dimensión del espacio solución. Para una trasformación T(V) ->W esto queda expresado por la ecuación:

$$Dim(V) = \dim(Imagen) + \dim(kernel) \quad \text{(a)}$$

Ejemplo. Considere la transformación indicada por la relación:

$$T(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Ahora obtendremos la Imagen y el Kernel de esta transformación:

Las imágenes de T estarán dadas por los vectores **v**= (a, b, 0), es decir, con el tercer componente vectorial nulo, con cualesquiera valores ay b pertenecientes a los números reales.

En tanto el Kernel (los vectores que *mapean* al vector cero$(0,0,0)$), en este caso serán todos los vectores de la forma $\boldsymbol{v} = (0,0,z)$ ya que $T(0,0,z) = (0,0,0)$

Imagen es el conjunto de vectores {(a, b, 0), para las dos variables independientes "x", "y" pertenecientes a los números reales)}

Kernel= {(0, 0, c) para la variable independiente "z" perteneciente a los números reales)}

El espacio original *V* es R^3 y su dimensión es 3 (tres variables x, y, z), la imagen mapea sobre R^2 (dos variables a, b) y el núcleo sobre R^1 (una variable, c) por lo que la ecuación (a) se verifica:

$$\dim R^3 = dim\,(R^2) + \dim\,(R^1)$$
$$3 = 2 + 1$$

En una transformación Lineal T (V) ->W, La relación entre las dimensiones de los espacios V, la imagen de la transformación & el núcleo de ésta se determina por la ecuación:

Dim (V) = Dim (Imagen) + Dim (Kernel) (a)

A través de ella se puede comprobar la coherencia matemática de los resultados obtenidos al aplicar la transformación lineal en un problema dado.

3.3. Representación matricial de una transformación lineal

La representación matricial de una transformación lineal nos indica la relación existente entre ambas, y es de interés saber cómo a partir de una transformación lineal se puede obtener su representación matricial.

Para aclarar este concepto consideremos la transformación $\mathrm{T}{:}R^3$ ->R^2definida por:

$$\boldsymbol{T(x,y,z)=(x+2y,3x-z)}$$

Tratemos de encontrar una matriz **A** tal que el producto de ésta por cualquier vector (ver capítulo 5) del dominio nos proporcione la imagen de dicho vector bajo la transformación T, es decir, una matriz **A** que cumpla,

$$\boldsymbol{Av=T(v)}$$

En este ejemplo, como **v** es un vector de R^3y $\mathrm{T}(\mathbf{v})$ es un vector de R^2la igualdad anterior sólo podrá lograrse mediante una matriz A de 2x3; esto se puede observar a partir del álgebra de matrices (ver capítulos 1 y 5) en donde para ser compatible el producto **Av** se requiere para el vector **v** inicial:

$(3 \times 1, (x, y, z))$ una matriz **A** de orden 2x3,ya que el producto **Av** tendrá como resultado un vector de orden 2x1, esto es:

$$(2 \times \mathbf{3})(\mathbf{3} \times 1) = 2 \times 1 = (x + 2y, 3x - z).$$

Por esta razón, la matriz **A**tendrá la forma(Lay, (2004) p..75):

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{bmatrix}$$

Y satisface la igualdad

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & + & 2y \\ 3x & - & z \end{bmatrix}$$

Desarrollando la multiplicación **Ax**:

$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = x + 2y$ y $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 3x - z$

De la ecuación de la izquierda observamos:

$a_{11}x = x \quad a_{12}y = 2y \quad a_{13}z = 0z$
por lo que: a_{11}=1; a_{12}=2 y a_{13}=0

De la expresión de la derecha tenemos:

$a_{11}x = 3x \quad a_{12}y = 0y \quad a_{13}z = -z$
por lo que: a_{11}=3; a_{12}=0 y a_{13}=−1

Resumiendo:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 0$$
$$a_{21} = 3, a_{22} = 0, a_{23} = -1$$

Construyendo la matriz A, esta quedará de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz **A** se conoce como matriz asociada a la transformación T.

Una vez calculada nuestra matriz asociada, estudiemos las imágenes del conjunto de vectores R^3 que son su base canónica (secuencialmente solo un elemento de cada n-tupla es igual a 1 y los demás valores son iguales a cero) paraR^3, tenemos:

$$R = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

Bajo la transformación T definida con anterioridad tenemos que:

$$T(1,0,0) = (1,3)$$
$$T(0,1,0) = (2,0)$$
$$T(0,0,1) = (0,-1)$$

Observando con cuidado lo anterior notaremos que estos elementos no son más que los vectores columna que integran la matriz **A** asociada a T:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo cual, podemos afirmar que, para obtener la matriz asociada a una transformación lineal, basta con calcular las imágenes de los vectores que integran la base canónica del dominio.

Para obtener la matriz asociada a una transformación lineal basta con calcular las imágenes de los vectores que integran la base canónica del domino.

Podemos concluir entonces que para toda transformación lineal de $R^n en\ R^m$existe una matriz $\boldsymbol{A}$de $m \times n$ que cumple $Tx = \boldsymbol{A}x$ para toda $\boldsymbol{x} \in R^n$Anton (1983), p. 225).

Definición: Sea$T$: $R^n \rightarrow R^m$una transformación lineal. Entonces existe una matriz *única* $\boldsymbol{A}$ de $m \times n$tal que $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$para toda $\boldsymbol{x}$.

A continuación, se muestran dos ejemplos con aplicación de las Transformaciones Lineales

Ejemplo 1:

Una casa editora publica un libro en tres ediciones diferentes: cubierta dura, cubierta blanda y cubierta de lujo. Cada libro requiere cierta cantidad de papel y de material para la cubierta. Los requisitos están dados en gramos por la siguiente tabla:

	Cubierta dura	**Cubierta blanda**	**Cubierta de lujo**
Papel	300	500	800
Material para la cubierta	40	50	60

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sea que $\boldsymbol{x}$ represente el vector producción, donde (x_1, x_2, x_3) representan el número de libros con cubierta dura, cubierta blanda y cubierta de lujo respectivamente, que se publican. La transformación lineal $T: R^3 \to R^2$ definida por $T(x) = A(x)$ nos da el vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, donde y_1 representa la cantidad total de papel requerido y y_2 la cantidad de material para la cubierta. Suponga que

Entonces,

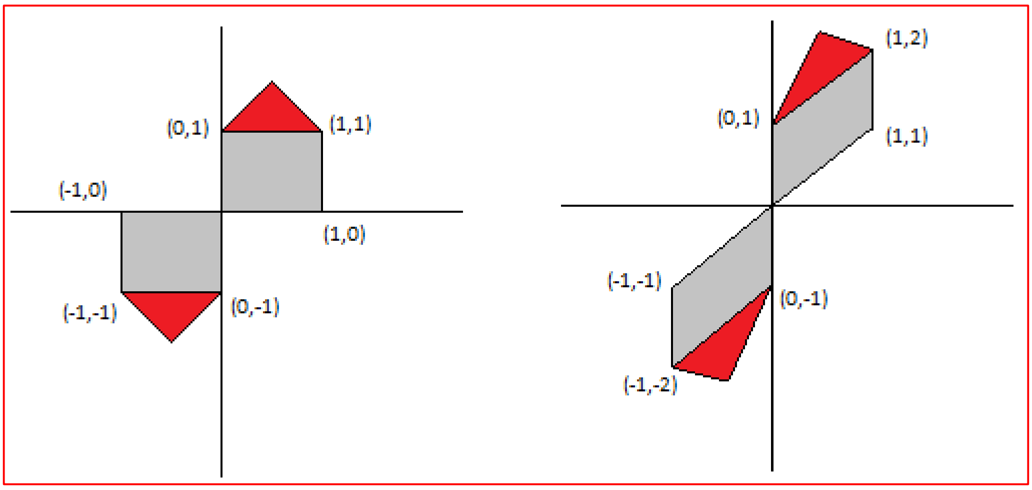
$$x = \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix} \text{entonces}, T(x) = A(x) = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 810{,}000 \\ 87{,}000 \end{pmatrix}$$

Por lo que se requiere 810,000 gramos en papel y 87,000 gramos en material para la cubierta.

Ejemplo 2.

¿Puede una transformación lineal generar un efecto de perspectiva en una imagen? Observemos cómo la transformación $T: R^2 \to R^2$ definida por) $T(x, y) = (x, x + y)$ cambia las siguientes imágenes:



Verificando las condiciones matemáticas de la transformación lineal propuesta observamos que

$$\boldsymbol{T(0,0) = (0,0+0) = (0,0)}$$

Y tomando los vectores $\boldsymbol{v_1 = (0,0)}$ y $\boldsymbol{v_2 = (1,0)}$ tendremos

$$\boldsymbol{T(v_1+v_2) = T\big((0,0)+(1,0)\big) = T(1,0) = T(1,0+1) = (1,1)}$$

Aplicando por separado,

$$\boldsymbol{T(v_1)+T(v_2) = (0,0+0)+(1,0+1) = (0,0)+(1,1) = (1,1)}$$

Por lo que la transformación propuesta es una transformación lineal, según lo indicado en los incisos i) e ii) de la página 36.

Este ejemplo nos permite ver cómo a través de una transformación lineal es posible realizar modificaciones en imágenes. En programas de edición de imágenes podemos aplicar "filtros" que generen efectos de perspectiva, distorsión, rotación, ampliación o reducción de la imagen y en un momento dado poder ir de uno a otro efecto sin que esto ocasione una irreversibilidad en los procesos.

Para ver un ejemplo de la aplicación del álgebra lineal en el procesamiento de imágenes lo puede consultar en la siguiente liga: http://www.nibcode.com/es/blog/12/algebra-lineal-y-el-procesamiento-digital-de-imagenes-parte-I

Algunas de las ventajas de representar una trasformación lineal por medio de matrices se debe al hecho de poder utilizar una amplia variedad de herramientas y métodos de análisis del álgebra lineal, que simplifican y aceleran de manera importante los procesos algorítmicos aplicados, sus variaciones, los elementos de juicio y la obtención de los resultados.

En la siguiente liga puede consultar la aplicación del álgebra lineal y el uso de filtros aplicados a cada pixel de una matriz para cambiar su color:

http://www.nibcode.com/es/blog/13/algebra-lineal-y-el-procesamiento-digital-de-imagenes-parte-II-filtros

3.4. Isomorfismo

Para introducirnos en el estudio de los isomorfismos debemos tener claras algunas definiciones que se presentan a continuación.

Definición:

Se dice que la transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es un isomorfismo si T es biyectiva sobre los espacios vectoriales V y W, además cumple que (Lipschutz, 1982:169):

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2) $T(kv_1) = kT(v_1)$
3) $T(v_1 v_2) = T(v_1)T(v_2)$

Otro tipo de procesamiento de imágenes consiste en cambiar la posición de los pixeles dentro de la imagen, pero sin alterar su color. En el siguiente enlace puede ver un ejemplo de este proceso:

http://www.nibcode.com/es/blog/14/algebra-lineal-y-el-procesamiento-digital-de-imagenes-parte-III-transformaciones-

La transformación de T sobre los espacios V y W se lee:"T de V sobre W".

El hecho de que una relación sea biyectiva implica que para dos conjuntos V y W y cualquier par de elementos v_1,v_2 de V yw_1,w_2 de Wse tiene que cumplir:

i) $T(v_1) = w_1 \text{y}\, T(v_2) = w_2 con w_1 = w_2 \text{sí y sólo sí} v_1 = v_2$; es decir, a cada v_i le corresponde un w_i diferente, esto es:

$$T(v_1) = w_1 \text{y}\, T(v_2) = w_2 con w_1 = w_2 \text{sí y sólo sí} v_1 = v_2$$

ii) La cardinalidad de V es igual a la cardinalidad de W, es decir todos y cada uno de los elementos de V y de Westán relacionados por la transformación T.

Resumiendo:

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, se dice que T es uno a uno (notación 1 - 1) si ocurre:$Tv_1 = Tv_2 \to v_1 = v_2$

Y

Sea $T: V \to W$una transformación linealsí para toda $w \in W$existe una $v \in V$tal que$T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

Ejemplo:

Sea$T = R^3 \to P2$ (de los vectores de tres dimensiones a los polinomios de segundo grado) definida por:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$$

Verificando,$T(0)$ entonces, $a = b = c = 0$. Es decir, núcleo de $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ypara cada$(a, b, c)$ diferentes la imagen será diferente y única por lo que la transformación es biyectiva $(1 - 1)$e isomórfica.

La importancia de la relación de *isomorfismo* entre 2 espacios vectoriales A y B es en sí una relación biyectiva en la que se manifiesta la equivalencia entre ambos espacios (Lipschulz, 1982: 169), y nos indica las condiciones necesarias para poder establecer y escoger alguna representación alterna, coherente desde el punto de vista matemático, y que, a su vez, nos facilite el planeamiento y solución de un problema abordado.

Una liga que se recomienda para practicar y fortalecer los conocimientos vistos en este apartado se encuentra en la Red Universitaria de Aprendizaje en:

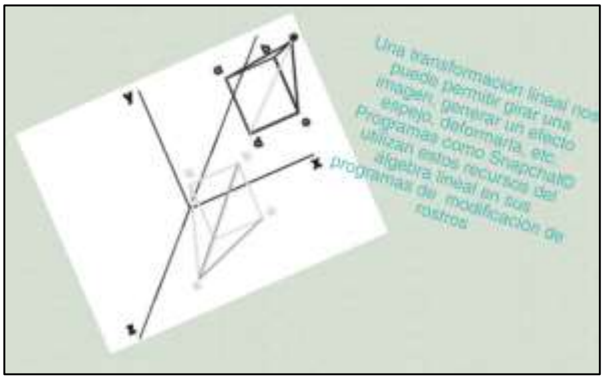
http://fcasua.contad.unam.mx/clases_virtuales/informatica/1168/sesion_14/player.html

RESUMEN

En diversas ramas de las matemáticas, la física y las distintas ciencias sociales se utilizan con frecuencia modelos que emplean en su estructura funciones vectoriales de variable vectorial; es decir, funciones de la forma $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$; donde $\boldsymbol{w}$y$\boldsymbol{v}$son "vectores". A tales funciones se denomina usualmente "transformaciones".

En esta unidad se refirió a una clase especial de "Transformaciones"; llamadas "Transformaciones Lineales"; las cuales son las más simples y también las de mayor aplicación.

En la práctica profesional, muchos problemas que involucran "Transformaciones" de tipo general suelen resolverse aproximando éstas por medio de las "Transformaciones Lineales".



Para otras aplicaciones geométricas de las transformaciones lineales consulte:
http://www.dcb.unam.mx/users/normapla/EfectosGeo.pdf

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard y David Hill(2006). *Algebra lineal.*	1	214-219; 224-247; 272-360; 294-317
	10	502-521
Poole, David (2004).*Algebra lineal. Una introducción moderna*.	6	470-480; 481-495

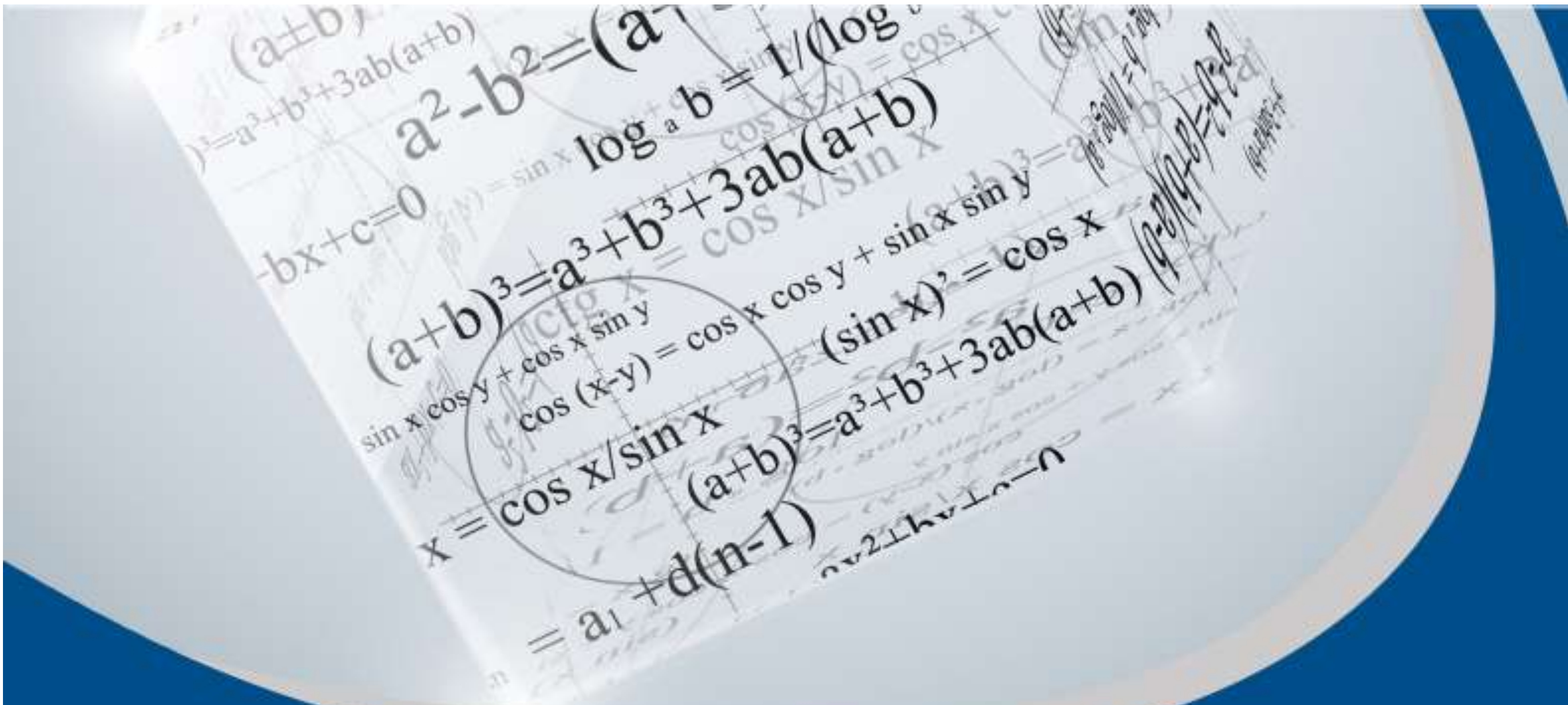
Kolman, Bernard y David Hill (2006). *Algebra lineal*(Octava Edición).México: Pearson. Prentice Hall, 648pp.

Poole, David (2004). *Algebra lineal. Una introducción moderna*. México: Thomson, 763 pp.

Lipschutz, Martin, M. (1982). *Procesamiento de datos*. México: Mc. Graw Hill, 218 pp.

UNIDAD 4

Producto interno



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá las diferentes aplicaciones del producto interno.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

4. Producto interno

4.1. Ortogonalidad

4.2. Aplicaciones del producto interno

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el planteamiento de problemas complejos de las áreas económicas, administrativas y de la informática comprende navegar en entornos conceptuales del álgebra lineal, en particular dentro de los espacios vectoriales.

La complejidad versa no solo en los elementos factoriales del problema y su interrelación, sino también en su modelado y en la mecánica algorítmica para poder resolverlos. Bajo esta óptica abstracta el manejo y aprovechamiento de las ideas de producto interno, ortogonalidad, independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial, así como la geometría y la métrica de sus elementos juegan un rol relevante para la obtención de resultados susceptibles de análisis, por esto es indispensable compenetrarnos en el dominio de estos conceptos de los espacios vectoriales y en sus aplicaciones.

4.1. Ortogonalidad

El concepto de ortogonalidad, tal como se observó en la discusión de producto interno abordada en esta unidad, es la situación en la cual dos vectores **a** y **b** son perpendiculares (ortogonales) entre sí. Una de las propiedades de que un grupo de vectores sean ortogonales entres sí es el hecho de que en esas condiciones pueden ser una *base* de un espacio vectorial *V* dado. Esta afirmación puede ser compleja de aceptar sin antes abordar la idea de independencia lineal y su significado. Para aclararlo proponemos un ejemplo, este considera que para un espacio de dos dimensiones (un plano, una hoja de papel) y que denotamos R^2, se cuenta con dos vectores$a = (x, y), b = (u, v)$y mostraremos que es posible representar a través de una combinación lineal de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$cualquier otro vector, digamos$\boldsymbol{c} = (m, n)$, dentro del espacio vectorial V propuesto.

Con el fin de ilustrarla idea mostramos una representación matemática de esta afirmación, digamos entonces que:

$$\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} \qquad (1)$$

(Lo que significa que el vector$c$es resultado de sumar los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$multiplicados independientemente por dos escalaresk_1 y k_2.)

Sustituyendo $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$tenemos:

$$(m, n) = k_1(x, y) + k_2(u, v)$$

Realizando las operaciones correspondientes, tendremos un sistema de ecuaciones lineales:

$$m = k_1 x + k_2 u$$

$$n = k_1 y + k_2 v$$

El anterior sistema de ecuaciones lineales puede ser compatible o incompatible (tener o no solución, ver unidad 1) y esto puede ser determinado por el método de Gauss ya revisado.

Si el sistema tiene solución nos indica que efectivamente hay una representación posible de **c** a partir de $\boldsymbol{a}$ **y** $\boldsymbol{b}$por medio de los valoresk_1 yk_2y estos valores serán la solución del sistema de ecuaciones propuesto; esto se muestra a continuación:

$$q_1 + 0 = m$$

$$0 + q_2 = n$$

Donde q_1, q_2, m y n fueron obtenidos de las operaciones indicadas durante el método de Gauss referido.

En caso contrario (no tener solución) se asumiría que al aplicar el método de Gauss el sistema de ecuaciones quedó reducido a la forma:

$$q_1 + 0 = m$$

$$0 + 0q_2 = n$$

Este último resultado muestra que no hay solución posible después de haber realizado las operaciones indicadas por el método de Gauss, ya que no hay un número q_2 que al multiplicarse por cero proporcione como resultado n.

Para consolidar la afirmación particularicemos numéricamente los siguientes dos casos.

Caso 1. ¿Los vectores $\boldsymbol{a} = (1,0)$ y$\boldsymbol{b} = (0,1)$pueden representar al vector$\boldsymbol{c} = (2,3)$?

Retomando el sistema de ecuaciones (1):

$$(2,3) = k_1(1,0) + k_2(0,1)$$

Realizando las operaciones:

$$2 = k_1 + k_2 0$$
$$3 = k_1 0 + k_2$$

De las dos igualdades es fácil observar que $k_1 = 2$ y $k_2 = 3$y con estos valores es posible obtener el vector **c** propuesto:

$$\boldsymbol{c} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} = 2(1,0) + 3(0,1) = (2,0) + (0,3) = (2,3)$$

Caso 2. Para éste consideremos que $\boldsymbol{a} = (1,0)$ y $\boldsymbol{b} = (2,0)$ y trataremos de obtener el mismo vector $\boldsymbol{c} = (2,3)$, diciendo que esto es posible a través de dos constantes k_1 y k_2 dadas. Del mismo sistema de ecuaciones (1):

$$\boldsymbol{c} = (2,3) = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} = k_1(1,0) + k_2(2,0)$$

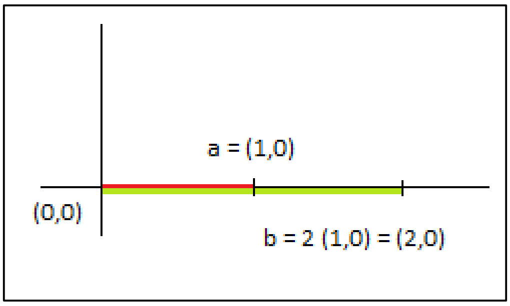
O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 &= 2 \\ 0 + 0k_2 &= 3 \end{aligned}$$

La segunda ecuación claramente nos muestra que este sistema no tiene solución, ya que no existe un número k_2 que multiplicado por cero nos de tres, y por tanto en este caso $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no pueden generar al vector $\boldsymbol{c}$.

Esto es consecuencia de que $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a}$, es decir los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son proporcionales entre sí. El hecho de que dos vectores sean proporcionales entre sí indica una relación geométrica de colinealidado proporcionalidad entre ellos.

$$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a} = 2(1,0) = (2,0)$$



Bajo la óptica de los casos revisados es posible en este momento introducir el concepto matemático de ***independencia lineal***, que para un grupo de vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots \boldsymbol{z}$, está dada por la siguiente ecuación:

$$k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + \cdots + k_n\boldsymbol{z} = 0 \quad (2)$$

Se dice que un conjunto de vectores es linealmente independiente sí y solo sí la ecuación (2) se cumple solamente para los valores$k_1 = k_2 = \cdots k_n = 0$, esto significa que ningún vector del conjunto $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots \boldsymbol{z}$ puede ser obtenido como una combinación lineal de los vectores restantes.

Desde un punto de vista operativo la independencia lineal se puede comprobar a partir de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, cuya única solución sea la solución trivial (unidad 1); para el planteamiento de verificación de esta situación, el vector independiente del sistema de ecuaciones lineales homogéneo estará conformado por los elementos k_i. En el caso 1 previamente presentado podemos comprobar la independencia lineal de los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$si hacemos que el vector$\boldsymbol{c}$= (0,0); se deja al alumno este ejercicio para comprobar la independencia lineal de los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ propuestos.

Se dice que un conjunto de vectores es linealmente independiente sí y solo sí ningún vector del conjunto **a, b, …z** puede ser obtenido como una combinación lineal de los vectores restantes.

Un resultado de interés a partir del concepto anterior tiene que ver con los conceptos de *base* y *dimensión* de un espacio vectorial.

Se dice que un conjunto de *n* vectores $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots \boldsymbol{n}\}$ son una ***base*** de un espacio vectorial R^n si son linealmente independientes y si por medio de combinaciones lineales (revisar ecuación 1) de los elementos de G es posible obtener cualquier otro vector fuera del conjunto G y dentro del espacio vectorial R^n, lo que se define como que el conjunto G *genera* al espacio vectorial R^n.

Un Conjunto de n vectores G= {a, b, …, n} son una base de un espacio vectorial R^n, si son linealmente independientes y si por medio de combinaciones lineales de los elementos de G es posible obtener cualquier vector de R^n. Lo anterior también se define como que el conjunto G genera al espacio vectorial R^n.

Asimismo, el número máximo de vectores linealmente independientes que conforman una base G de un espacio vectorial R^n dado, determina la ***dimensión*** (o ***dim***) de ese espacio. De forma recíproca, dada la dimensión de un espacio Vectorial R^n, el número máximo de vectores linealmente independientes que conformen cualquier base G_i, que genere a R^n, estará dado por el valor numérico de esa dimensión. Es importante extraer de la afirmación anterior el hecho de que para un espacio vectorial R^n puede haber infinidad de conjuntos de vectores $G_1, G_2, \ldots$ linealmente independientes, que sean una base de R^n, pero es obligado notar que el número máximo de vectores linealmente independientes dentro de cada conjunto G_i siempre será el mismo y estará determinado por ***dim***.

El número máximo de vectores linealmente independientes "n", que puede haber en un conjunto G que genera a un espacio vectorial R^n, determina la dimensión de este espacio.
De manera recíproca, dada la dimensión de "n" de un espacio vectorial R^n, el número máximo de vectores que conformen un conjunto G que genere a R^n, estará determinado por "n"

Para aclarar esta idea podemos recordar el caso uno revisado, y remarcaremos el hecho de que los 2 vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ propuestos, y que son linealmente independientes, conformarían una base G del espacio de dos dimensiones R^2 (2 vectores linealmente independientes para 2 dimensiones).

Finalmente, resaltaremos el hecho de que cualquier conjunto G' de $n+1$ vectores de un espacio R^n será linealmente dependiente, esto lo podemos ver en el caso uno, donde el conjunto de vectores a, b, c (3 vectores) es linealmente dependiente en R^2 (2 dimensiones).

Otra manera de verificar la independencia lineal de un grupo de vectores es por medio del concepto de producto interno (revisado posteriormente en esta unidad). En particular, si el producto interno de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es igual a cero indica que ambos vectores son perpendiculares (ortogonales) entre sí y ésta es una condición óptima de independencia lineal, como también se observa en el caso uno anteriormente revisado.

Para abordar al siguiente apartado se recordará el concepto de Ortonormalidad visto en la unidad 2 de estos apuntes:

Se dice que un conjunto de vectores H= {U1, U2, … Un} es ortonormal si todos ellos son perpendiculares entre si y además todos y cada uno tienen norma (ver sección 4.2) o longitud igual a uno.

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

Esta es una metodología que utiliza varios de los conceptos vistos en esta unidad y permite calcular un conjunto ortonormal *H* de vectores que forman una base de un espacio vectorial *V* y a partir de los cuales es más conveniente realizar cálculos acerca de otro conjunto de vectores de nuestro interés. Es conveniente indicar que este proceso puede ser visto como una generalización a R^n del procedimiento revisado en la sección 2.3 de estos apuntes.

Para la obtención del conjunto $H = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ propuesto se parte de un conjunto de vectores $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ linealmente independiente, derivado del planteamiento de un problema a abordar, y que son una base generadora de un espacio vectorial V. Entonces el conjunto H es obtenido a partir de G por medio del siguiente procedimiento:

1) $$\boxed{u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}}$$

2) $$\boxed{u_2 = \frac{v_2 - (v2 \cdot u1)u_1}{\|v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1\|}}$$

3)…

n)

$$u_n = \frac{v_n - (v_n \cdot u_1)u_1 - (v_n \cdot u_2)u_2 - \cdots (v_n \cdot u_{n-1})u_{n-1}}{\|v_n - (v_n \cdot u_1)u_1 - (v_n \cdot u_2)u_2 - \cdots (v_n \cdot u_{n-1})u_{n-1}\|}$$

Donde el conjunto H, como ya se indicó, es una base ortonormal que también genera a V.

Del algoritmo indicado es importante resaltar que los productos internos $v_i \cdot u_i$, las normas ($\|v_i\|$) y distancias indicadas son valores numéricos, y afectan de manera escalar a los componentes de los vectores indicados en la recurrencia del método. Adicionalmente, es importante notar que este es un proceso secuencial en dónde para obtener el vector $\boldsymbol{m}$ es necesario haber obtenido todos los vectores anteriores. Por ejemplo, para obtener el vector ortonormal u_4 de un conjunto H es indispensable haber obtenido antes los vectores u_1, u_2 y u_3.

Ejemplo.

Considere al conjunto $G = \{(1,0),(0,3)\}$que es una base del espacio R^2. Por medio del proceso de Gram-Schmidt encuentre un conjunto ortonormal H.

Desarrollo.

1)

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = \frac{(\mathbf{1},\mathbf{0})}{\sqrt{(\mathbf{1},\mathbf{0})(\mathbf{1},\mathbf{0})}} = \frac{(\mathbf{1},\mathbf{0})}{\sqrt{(\mathbf{1}^{\mathbf{2}}+\mathbf{0}^{\mathbf{2}})}} = \frac{(\mathbf{1},\mathbf{0})}{\sqrt{\mathbf{1}}} = (\mathbf{1},\mathbf{0})$$

2)

$$u_2 = \frac{v_2 - (v_2 u_1)u_1}{\|v_2 - (v_2 u_1)u_1\|} = \frac{(0,3) - ((0,3)\cdot(1,0))(0,3)}{\|((0,3) - \ ((0,3)\ \cdot(1,0))(0,3)\|} = \frac{(0,3)-(0,0)}{\sqrt{0^2+3^2}}$$
$$= \frac{(0,3)}{\sqrt{(9)}} = \frac{(0,3)}{3} = (0,1)$$

Por lo que$u_1 = (1,0)$y$u_2 = (0,1)$ y el conjunto ortonormal buscado estaría entonces dado por:

$$H = \{(1,0),(0,1)\}$$

Es fácil comprobar que los vectores obtenidosu_1y u_2 son perpendiculares entre sí y tienen una norma igual a 1; esto se deja como ejercicio para el alumno. La simplificación observada en el desarrollo de este caso se debe a que de origen definimos a los vectores de G de tal forma que fueran ortogonales entre sí, sin embargo, esto no es una condición general de partida y la obtención de la base ortonormal se puede complicar, dependiendo esta situación de las características iniciales de los vectores del conjunto Gprovenientes del problema a resolver.

4.2. Producto interno y sus aplicaciones

Producto interno de dos vectores

El producto interno es una función de un espacio vectorial *V*, en la que se asigna a cada par de vectores **a** y **b** un número real, la notación de producto interno está indicada por la expresión:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

Y se lee "*a punto b*".

Para que el producto interno sea una función válida desde el punto de vista matemático debe de cumplir las siguientes condiciones:

1) $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}$

2) $\boxed{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})}$

3) $\boxed{k\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}$

4) $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0}$
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \text{ si y solo si} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

Una forma de definir el producto interno en un espacio vectorial de tres dimensiones (R^3), considerando dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$**,** está dado por la regla de asignación siguiente:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

Generalizando esta forma de producto interno aun espacio de “n” dimensiones (R^n):

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a1 \\ \underline{a2} \\ \vdots \\ an \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ \underline{b2} \\ \vdots \\ bn \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

El producto interno es llamado también producto punto o producto escalar. Es importante notar que el producto interno como se ha definido, siempre tendrá como resultado un escalar, es decir, un número.

Desde la notación del álgebra lineal, ver unidad de matrices, el producto interno también puede ser fácilmente visualizado como el producto de un vector renglón y un vector columna (ver unidad 5) como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = (1,2,4)$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} = 1(1) + 2(2) + 4(1) = 1 + 4 + 4 = 9$$

El producto interno tal como se ha propuesto, es una función matemática que presenta varias ventajas desde el punto de vista métrico y geométrico de un espacio vectorial. Una de las primeras aplicaciones es el concepto de la norma o tamaño de un vector “**a**” y esta se denota como:

$$\|a\|$$

Para un vector a enR^3,$a = (x, y, z)$, la norma está definida por la relación matemática siguiente:

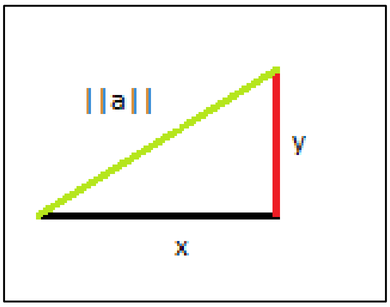
$$\|a\| = \sqrt{(a \cdot a} = \sqrt{(x^{2+}y^2 + z^2)}$$

En general la norma de un vector a = (a, b, …z) está dada por la ecuación:

$$\|a\| = \sqrt{(a \cdot a)} = \sqrt{(a^{2+}b^2 + \cdots + z^2)}$$

Para consolidar la observación del concepto de norma consideremos un vector $\boldsymbol{a}$enR^2,$\boldsymbol{a} = (x, y)$, ahora será más fácil visualizar las afirmaciones previas al recordar el teorema de Pitágoras:

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2})}$$



Es importante notar que la norma es un valor escalar ya que el producto interno definido en este capítulo, y del cual proviene la norma, genera valores escalares.

Otra aplicación de la definición de producto interno, es el concepto de distancia entre dos vectores y esto viene expresado por la siguiente notación:

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$$

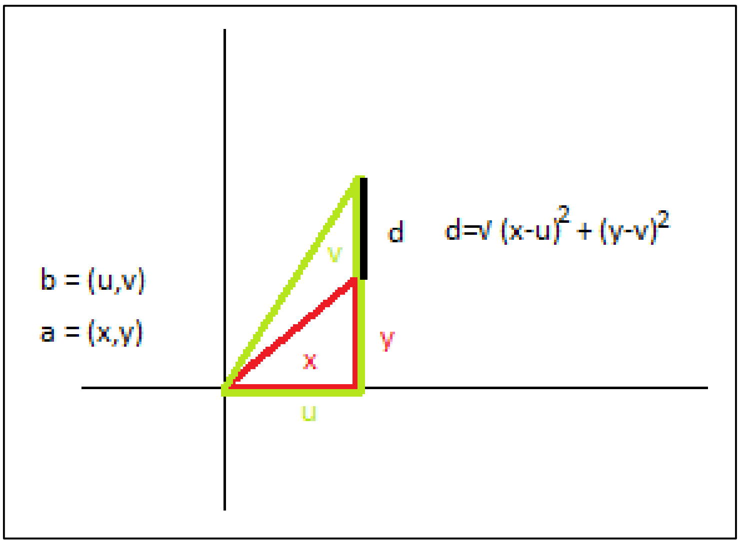
A partir de la definición de norma y considerando dos vectores en R^2,$\boldsymbol{a} = (x,y)$y$\boldsymbol{b} = (u,v)$, tendríamos:

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a} = (u-x, v-y)$$

y su distancia:

$$d = \sqrt{((u-x)^2 + (v-y)^2)}$$

$$d = \sqrt{((u-x)^2 + (v-y)^2)}$$



Debe tenerse en cuenta que la distancia, al provenir del concepto de norma y ésta, a su vez, del producto interno, son funciones que generan valores escalares; asimismo, como cualquier función de un espacio vectorial, es aplicable a espacios de n dimensiones (R^n).

Finalmente se mostrará otra propiedad interesante acerca del producto interno definido y que solo se enunciará. Relacionando el concepto de producto interno y norma para dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ enR^n se tiene una importante conclusión (Howard, Anton, 1983:186), dada por la relación:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}||}$$

Dónde θ es el ángulo que forman dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. La relación de manera directa nos dice que si dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$son perpendiculares (ortogonales) entre sí, esto es, que forman un ángulo de 90º, entonces su producto interno será igual a cero, ya que para este valor la función coseno es igual a cero.

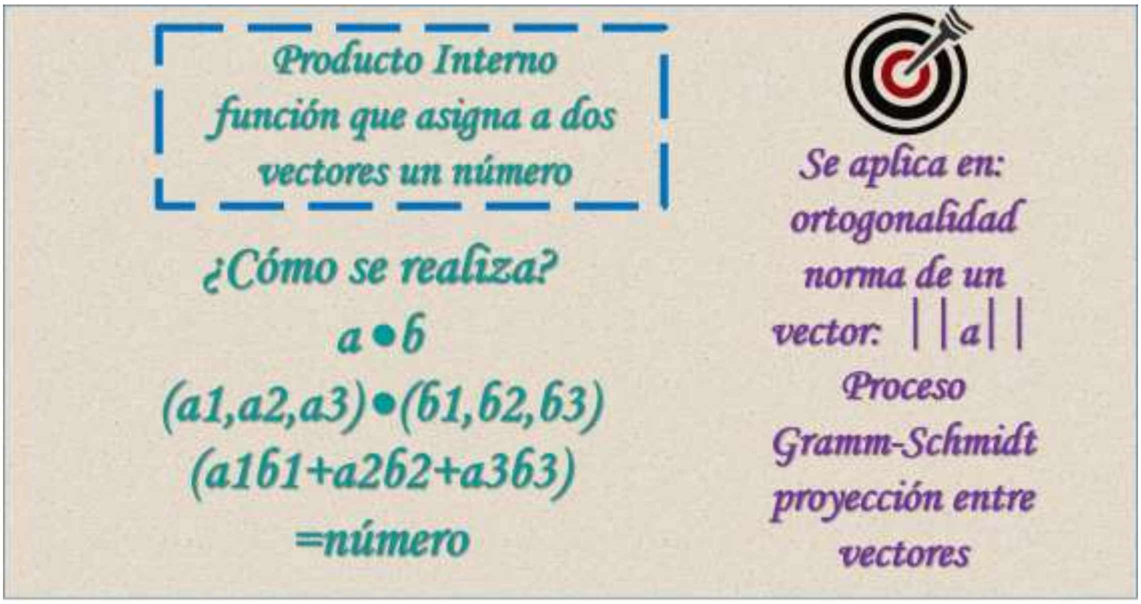
Si dos vectores **a** y **b** son perpendiculares (ortogonales) entre sí, entonces su producto interno será igual a cero
a ● b = 0

Una liga que se recomienda para practicar y fortalecer los conocimientos vistos en este apartado se encuentra en la Red Universitaria de Aprendizaje en:

http://fcasua.contad.unam.mx/clases_virtuales/informatica/1168/sesion_19/player.html

RESUMEN

Dentro de los espacios vectoriales es posible definir un conjunto de funciones que nos permiten obtener información acerca de la métrica de los vectores y su interrelación geométrica. Estas funciones son el producto interno, la norma y la distancia y a partir de ellas es posible establecer algoritmos para obtener bases ortonormales de un espacio vectorial de interés, a través de las cuales podemos facilitar y acelerar el desarrollo de cálculos y análisis sobre conjuntos de vectores asociados a nuestros problemas profesionales.



BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Poole, David (2011)	1	16-29
Lay, David (2004)	5	375-383

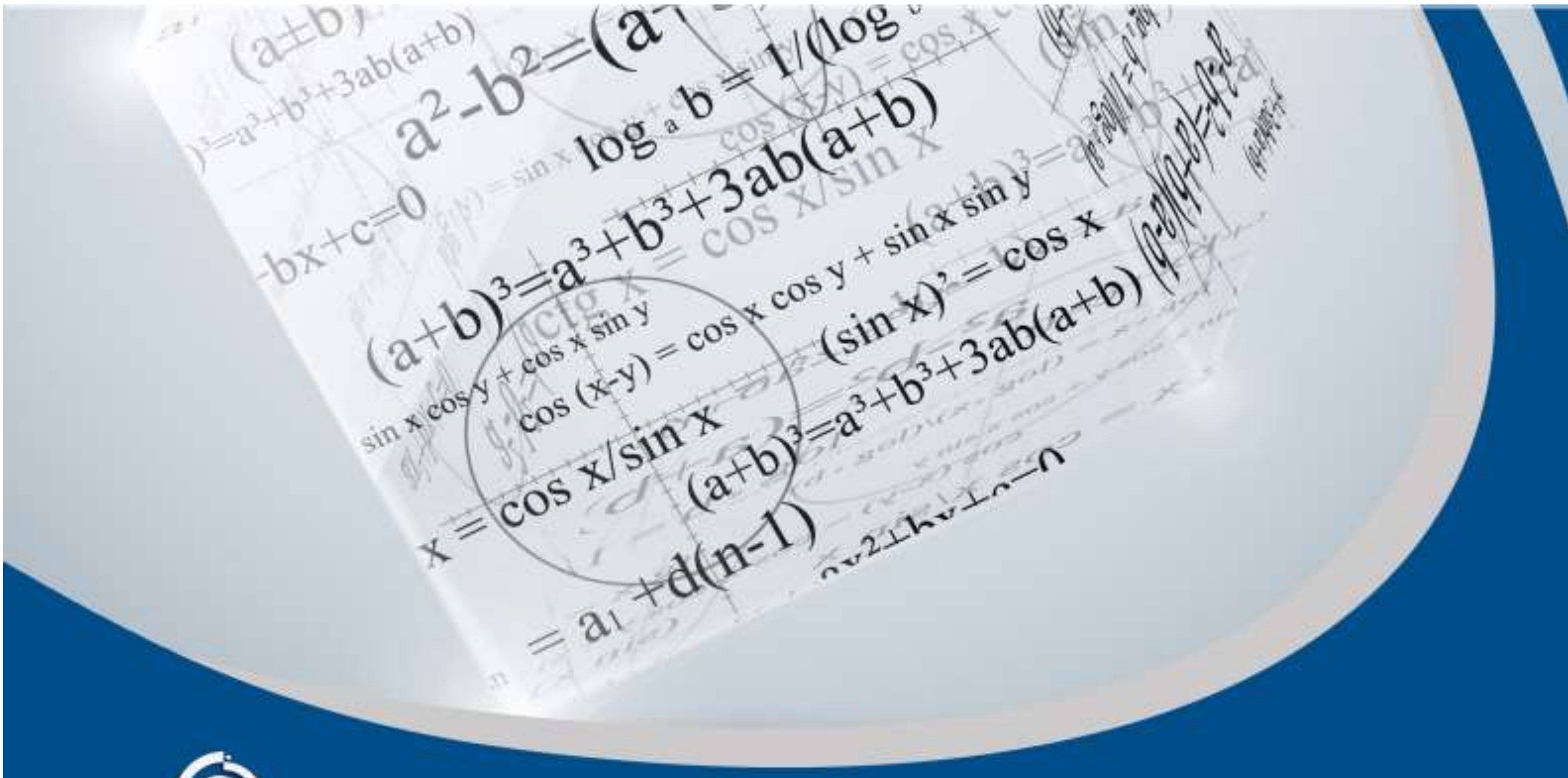
Kolman, Bernard y Hill, David R. (2006). *Algebra lineal* (Octava Edición). México: Pearson Prentice Hall, 648 pp.

Poole, David (2004). *Algebra lineal: Una introducción moderna*. México: Thomson, 763 pp.

Lay, David (2004). *Algebra Lineal y sus aplicaciones* (3ª. Ed.). México: Pearson, 492 pp.

UNIDAD 5

Matrices



Plan 2012 **2016** actualizado

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno realizará operaciones con matrices.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

5. Matrices
5.1. Operaciones básicas con matrices
5.2. Inversa y traspuesta de una matriz cuadrada

INTRODUCCIÓN

Las matrices son una herramienta muy útil para expresar y discutir problemas que surgen en la vida real. En los negocios a menudo es necesario calcular y combinar ciertos costos y cantidades de productos, situaciones que se acostumbra expresar por medio de las tabulaciones, herramienta que nos permite representar y relacionar fácilmente diferentes tipos de datos, sin embargo, esta capacidad de visualización no siempre rinde en una mecanización que nos ayude a desarrollar métodos de análisis. Afortunadamente para estas situaciones, el álgebra lineal pone a nuestro favor ciertos recursos con los que es posible representar y trabajarlas diversas estructuras tabulares, a través de una metodología matemática que es más clara, fácil y rápida de operar. Tal representación de los datos se denomina matriz.

Como se ha mencionado a lo largo de estos apuntes, las matrices se utilizan comúnmente en la informática, tal es el caso del internet, donde los motores de búsqueda para localización y recuperación de información, utilizan matrices para seguir el rastro de las ubicaciones en donde esta se encuentra, así como del tipo de información de acuerdo al criterio de búsqueda y de las palabras clave, e incluso para determinar la manera en que los sitios web se vinculan entre sí. En gran medida, la eficacia de *Google*, estriba en la manera en que utiliza las matrices para determinar cuáles sitios están referenciados en otros sitios.

Retomando lo que hemos indicado líneas arriba, todo lo anterior también lo podemos modelar “humanamente” con una tabulación o conjuntos de ellas, pero para poder realizar las búsquedas de manera ágil y versátil debemos apoyarnos en los métodos que nos ofrece el álgebra lineal, lo que nos facilita la conformación y operación de estas estructuras. La pertinencia de estas metodologías estriba entonces, en la capacidad de representar y manejar, por medio del lenguaje matemático, todo el problema y establecer su solución algorítmica.

La aplicación de las matrices a partir del concepto de espacio vectorial, se ha podido extender a multitud de campos ya sea en el álgebra, la geometría, el cálculo, la informática, la física, etc. Podemos resaltar que, en nuestro campo de acción profesional, a través de las transformaciones lineales, han facilitado un desarrollo sorprendente en las técnicas de edición y animación de imágenes y figuras, como se observa en el estándar *OpenGL*, con el cual podemos representar gráficos 3D y reexpresarlos en 2D, para de esta forma traducirlos a imagen en las pantallas de una gran variedad de equipos.

Actualmente, en un campo relativamente nuevo en las matemáticas denominado *Teoría de gráficas*, que se aplica ampliamente para formular modelos flujos y relaciones en problemas informáticos, de negocios, en ciencias sociales y en las ciencias físicas, se introduce el concepto de *grafo*, elemento con el que se establece una estructura matemática que representa una gráfica estudiada, simplificada por medio de una red de nodos y líneas y que es representada con lo que se denomina la Matriz de Adyacencia. (Lay, David, 2004: 158).

También, a lo largo de los apuntes, hemos revisado otra variedad de problemas que se pueden describir usando matrices; por todo esto es indispensable definir las operaciones de suma y resta de matrices, multiplicación por un escalar, multiplicación e inversión de matrices, completando de esta manera la estructura algebraica necesaria, y así poder utilizarla libremente en el modelado y solución de los problemas.

Razones por las que en esta unidad consolidaremos la notación, determinación de la compatibilidad y los algoritmos correspondientes de estas operaciones matemáticas.

5.1. Operaciones con matrices

Una matriz es un conjunto de renglones y columnas expresados por un par de números “*mxn*”, denominado el orden de la matriz, donde “m” es el número de renglones y “*n*” el número de columnas.

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1n \\ \underline{a21} & \underline{a22} & \underline{\cdots} & \underline{a2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ am1 & am2 & \cdots & amn \end{bmatrix}$$

Casos especiales de matriz son los correspondientes a los vectores, y se denominan ya sea como vector horizontal o vector vertical:

Un vector horizontal cuya *n-tupla* consiste de los elementos (a_1,a_2, ...a_n) y es denotado “1xn” se representan como:

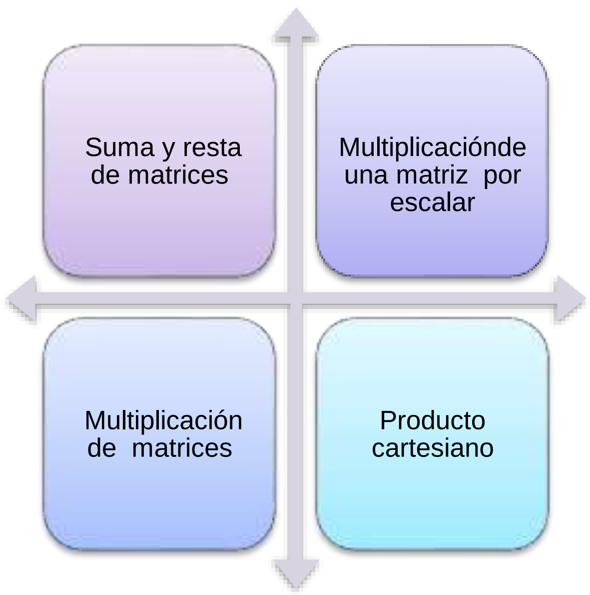
[a_{11} a_{12}... a_{1n}]

En tanto que un vector vertical cuya n-tupla consiste de los elementos (a_1, a_2, …a_m) se denota “mx1” y se representa como:

$$\begin{bmatrix} a11 \\ \underline{a21} \\ \vdots \\ am1 \end{bmatrix}$$

Dentro de esta nomenclatura cabe recordar que en el método de Gauss revisado en la unidad 1, las operaciones permitidas en el proceso de escalonamiento se llevan a cabo sobre los renglones (vectores horizontales) o columnas (vectores verticales) de una matriz.

Las operaciones básicas que se pueden realizar sobre las matrices son las siguientes:



Sean A y B las siguientes matrices: $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1n \\ a21 & a22 & \cdots & a2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ am1 & am2 & \cdots & amn \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \cdots & b1n \\ b21 & b22 & \cdots & b2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ bm1 & bm2 & \cdots & bmn \end{bmatrix}$$ A cada elemento *amno bmn* se le ubica una posición relativa única renglón-columna, de acuerdo a los índices “*mn*” asignados. Esta convención es fundamental para entender la estructura de una matriz y a su vez poder realizar cualquier proceso algorítmico en las operaciones matemáticas entre matrices.
Suma de matrices, esta operación se denota como A+B.

Esta operación se lleva a cabo sumando a cada uno de los elementos de la matriz A, cada uno de los elementos de la matriz B en la misma posición relativa, colocando su suma en la matriz resultante en la misma posición *mn,* de los elementos sumados.

Ejemplos de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{y} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

La resta de matrices se denota como A-B.

La sustracción se lleva a cabo restando a cada uno de los elementos de la matriz A, cada uno de los elementos de la matriz B en la misma posición relativa, colocando su resta en la matriz resultante en la misma posición *mn* de los elementos restados.

Como se observa de lo anteriormente expresado, la suma y resta de matrices son muy similares, con la única diferencia dada por el signo de la operación a realizar sobre los elementos de la matriz.

Entonces de manera general, si A y B son dos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1n \\ \underline{a21} & \underline{a22} & \underline{\cdots} & \underline{a2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ am1 & am2 & \cdots & amn \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \cdots & b1n \\ \underline{b21} & \underline{b22} & \underline{\cdots} & \underline{b2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ bm1 & bm2 & \cdots & bmn \end{bmatrix}$$

La resta A-B se realiza de la siguiente manera

$$\boxed{\mathbf{A - B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a11} & \mathbf{a12} & \cdots & \mathbf{a1n} \\ \underline{\mathbf{a21}} & \underline{\mathbf{a22}} & \underline{\cdots} & \underline{\mathbf{a2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{am1} & \mathbf{am2} & \cdots & \mathbf{amn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{b11} & \mathbf{b12} & \cdots & \mathbf{b1n} \\ \underline{\mathbf{b21}} & \underline{\mathbf{b22}} & \underline{\cdots} & \underline{\mathbf{b2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{bm1} & \mathbf{bm2} & \cdots & \mathbf{bmn} \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{= \begin{bmatrix} \mathbf{a11 - b11} & \mathbf{a12 - b12} & \cdots & \mathbf{a1n - b1n} \\ \underline{\mathbf{a21}} - \underline{\mathbf{b21}} & \underline{\mathbf{a22 - b22}} & \underline{\cdots} & \underline{\mathbf{a2n}} - \underline{\mathbf{b2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{am1 - bm1} & \mathbf{am2 - bm2} & \cdots & \mathbf{amn - bmn} \end{bmatrix}}$$

Ejemplo. Resta las matrices A y B indicadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Se deja como actividad para el alumno realizar la suma de las matrices A y B del ejemplo anterior.

Es importante indicar que la suma y resta de matrices se da para dos matrices A & B del mismo orden, es decir ambas son de orden “mxn”

Multiplicación por escalar

Supóngase que se tiene una matriz A y un escalar k, entonces la multiplicación de una matriz por un escalar se representa con kA; la multiplicación se lleva a cabo multiplicando cada uno de los elementos de la matriz A por el escalar k, y el resultado se pone en la misma posición relativa en la matriz resultante.

Sean A una matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a11} & \boldsymbol{a12} & \cdots & \boldsymbol{a1n} \\ \underline{\boldsymbol{a21}} & \underline{\boldsymbol{a22}} & \underline{\cdots} & \underline{\boldsymbol{a2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{am1} & \boldsymbol{am2} & \cdots & \boldsymbol{amn} \end{bmatrix}$$

Y k el escalar

La multiplicación por un escalar se realiza de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{kA} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}\boldsymbol{a11} & \boldsymbol{ka12} & \cdots & \boldsymbol{ka1n} \\ \underline{\boldsymbol{ka21}} & \underline{\boldsymbol{ka22}} & \underline{\cdots} & \underline{\boldsymbol{ka2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{kam1} & \boldsymbol{kam2} & \cdots & \boldsymbol{kamn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo de la multiplicación de un escalar, sea la matriz A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Y el escalar 4.

$$\boldsymbol{4A} = \begin{bmatrix} \mathbf{4(1)} & \mathbf{4(1)} & \mathbf{4(1)} \\ \mathbf{4(3)} & \mathbf{4(1)} & \mathbf{4(2)} \\ \mathbf{4(1)} & \mathbf{4(1)} & \mathbf{4(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{12} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

Para esta operación no importa el orden mxn de la matriz A, es decir, el producto por un escalar está definido para matrices de cualquier orden.

Multiplicación de matrices

Supóngase que se tienen dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Para poder realizar la multiplicación de estas dos matrices primero se debe primero establecerla compatibilidad de la operación, esto se hace revisando que el número de columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$ sea igual al número de renglones de la matriz $\boldsymbol{B}$.

Suponiendo que se tiene una matriz $\boldsymbol{A}$de orden *nxm*, entonces la matriz $\boldsymbol{B}$ deberá tener **m** renglones y cualquier número de columnas, digamos $\boldsymbol{k}$, entonces la matriz resultante será una matriz de orden$\boldsymbol{n}$x$\boldsymbol{k}$(ver unidad 1 y Poole, D., 2004: 137-139). Es fácil observar de estas condiciones operativas de compatibilidad, que el ***proceso de multiplicación de matrices no es conmutativo.***

Sean $\boldsymbol{A}$ una matriz de $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a11} & \boldsymbol{a12} & \cdots & \boldsymbol{a1n} \\ \underline{\boldsymbol{a21}} & \underline{\boldsymbol{a22}} & \underline{\cdots} & \underline{\boldsymbol{a2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{an1} & \boldsymbol{an2} & \cdots & \boldsymbol{anm} \end{bmatrix}$$

Y $\boldsymbol{B}$ una matriz de $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b11} & \boldsymbol{b12} & \cdots & \boldsymbol{b1k} \\ \underline{\boldsymbol{b21}} & \underline{\boldsymbol{b22}} & \underline{\cdots} & \underline{\boldsymbol{b2k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{bm1} & \boldsymbol{bm2} & \cdots & \boldsymbol{bmk} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ se denota ***AxB***, y se realiza desarrollando el producto punto (ver sección 4.2) de los renglones de A por las columnas de B, esto se expresa por medio de las siguientes ecuaciones y se refuerza posteriormente con un ejemplo desarrollado:

$$\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a11} & \boldsymbol{a12} & \cdots & \boldsymbol{a1n} \\ \underline{\boldsymbol{a21}} & \underline{\boldsymbol{a22}} & \underline{\cdots} & \underline{\boldsymbol{a2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{an1} & \boldsymbol{an2} & \cdots & \boldsymbol{anm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{b11} & \boldsymbol{b12} & \cdots & \boldsymbol{b1k} \\ \underline{\boldsymbol{b21}} & \underline{\boldsymbol{b22}} & \underline{\cdots} & \underline{\boldsymbol{b2k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{bm1} & \boldsymbol{bm2} & \cdots & \boldsymbol{bmk} \end{bmatrix} = \boldsymbol{AB}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}$$

$$\boxed{= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a11}(\boldsymbol{b11}) + & \boldsymbol{a12}(\boldsymbol{b21}) + \cdots & +\boldsymbol{a1m}(\boldsymbol{bm1}) \cdots & \cdots \boldsymbol{a11}(\boldsymbol{b1k}) + & \boldsymbol{a12}(\boldsymbol{b2k}) + & \cdots & +\boldsymbol{a1m}(\boldsymbol{mk}) \\ \underline{\boldsymbol{a21}(\boldsymbol{b11}) +} & \underline{\boldsymbol{a22}(\boldsymbol{b21}) + \cdots} & \underline{+\boldsymbol{a2m}(\boldsymbol{bm1}) \cdots} & \cdots \underline{\boldsymbol{a21}(\boldsymbol{b1k}) +} & \underline{\boldsymbol{a22}(\boldsymbol{b2k}) +} & \underline{\cdots} & \underline{+\boldsymbol{a2m}(\boldsymbol{bmk})} \\ \boldsymbol{an1}(\boldsymbol{b11}) + & \boldsymbol{an2}(\boldsymbol{b21}) + \cdots & +\boldsymbol{anm}(\boldsymbol{bm1}) \cdots & \cdots \boldsymbol{an1}(\boldsymbol{1k}) + & \boldsymbol{an2}(\boldsymbol{b2k}) + & \cdots & +\boldsymbol{anm}(\boldsymbol{bmk}) \end{bmatrix}}$$

Ejemplo. Desarrolle la multiplicación de las matrices A y B que se indican a continuación:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix} \text{y } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

La multiplicación se realiza de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2) + 1(2) + 1(0) & 1(1) + 1(1) + 1(1) & 1(2) + 1(2) + 1(1) \\ 3(2) + 1(2) + 2(0) & 3(1) + 1(1) + 2(1) & 3(2) + 1(2) + 2(1) \\ 1(2) + 1(2) + 1(0) & 1(1) + 1(1) + 1(1) & 1(2) + 1(2) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1 \\ 6+2+0 & 3+1+2 & 6+2+2 \\ 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 10 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A partir del ejemplo anterior, se resume verbalmente el procedimiento de multiplicación de dos matrices A y B compatibles, desglosándose en los siguientes incisos:

1) Realizar el producto punto entre el primer renglón de la matriz A por la primera columna de la matriz B, de lo que se obtendrá un número (ver unidad 4); colocar el resultado en el primer renglón, primera columna de la matriz resultante
2) Realizar el producto punto entre el primer renglón de A por la segunda columna de B; colocar el resultado en el primer renglón, segunda columna de la matriz resultante.
3) Continuar de esta forma hasta agotar las columnas de B.
4) Repetir el procedimiento indicado en los puntos 1-3 con el segundo renglón de A (colocando los correspondientes resultados en el segundo renglón de la matriz resultante); continuar sucesivamente hasta agotar los renglones de A. En ese momento se tendrá el resultado de la multiplicación de las matrices (AxB).

Cabe recordar de la unidad 1 y del principio de este tema, que en el caso de los vectores éstos se manejan como una matriz de$(n \times 1)$ o$(1 \times n)$, y se multiplican con las mismas reglas indicadas para las matrices.

Debido a que la multiplicación de matrices no es conmutativa, al multiplicar matrices se suele decir: multiplicación por la derecha o multiplicación por la izquierda: alguna bibliografía también usa los términos *premultiplicación por la izquierda o premultiplicación por la derecha*. Estas situaciones se muestran a continuación:

A premultiplica a B por la izquierda: AxB
A premultiplica a B por la Derecha: BxA
Como se observa, existe un punto de referencia en el procedimiento (en este caso matriz B).

El orden de una matriz se refiere a la pareja de números *mxn* que describen el número de renglones y columnas presentes en una matriz o vector y que es necesario conocer para poder determinar la compatibilidad para los procesos de suma, resta y multiplicación de vectores y matrices.

Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ es el conjunto de todos los pares ordenados que se forman tomando un elemento perteneciente al conjunto$\boldsymbol{A}$ y un elemento del conjunto $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{A}$ *tiene m elementos*

$\boldsymbol{B}$ *tiene n elementos*

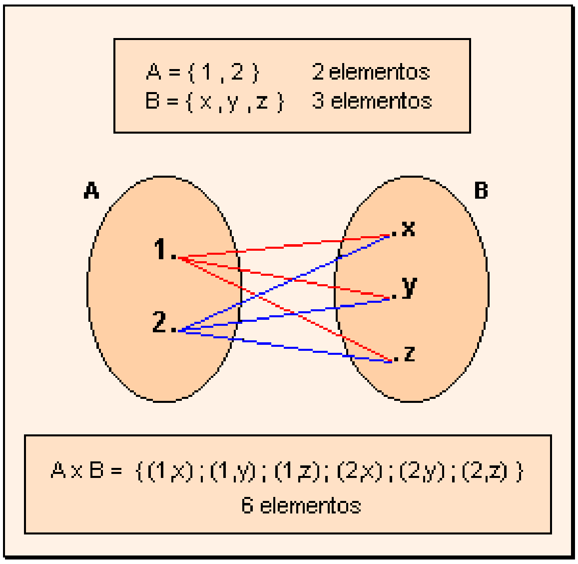
Entonces $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ *tiene* $(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})$ *elementos*

Los elementos de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$son pares ordenados. Cada par se forma tomando un elemento del conjunto $\boldsymbol{A}$ y otro del conjunto $\boldsymbol{B}$, en ese orden y recibe el nombre de par ordenado. Sus elementos se colocan entre paréntesis, separados por coma (*m*,*n*).

Debido al principio de orden indicado en el desarrollo del producto cartesiano, es importante resaltar que ***esta operación no es conmutativa***, es decir:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

Ejemplo 1



Ejemplo 2

Si $A = \{1,2\}$y $B = \{-1,0,1\}$entonces$A \times B = \{(1,-1),(1,0),(1,1),(2,-1),(2,0),(2,1)\}$. A tiene 2 elementos, B tiene 3, y $A \times B$ tiene 2 x 3 = 6

Ejemplo 3

Para los conjuntos $A = \{2,5,9\}$ y $B = \{p, q\}$, el producto Cartesiano de estos dos conjuntos contendrá los siguientes elementos:

$[a_{11}\ a_{12} \ldots\ a_{1n}]$

AxB = {(2, p),(2,q),(5,p),(5,q),(9,p),(9,q)}

$$A \times B = \{(2,p),(2,q),(5,p),(5,q),(9,p),(9,q)\}$$

Es muy importante darse cuenta de que, en general y como se había indicado, el producto cartesiano no es conmutativo. En algunos casos especiales podrá observarse así, pero generalmente no se conmuta. En el ejemplo mostrado, el producto Cartesiano BxA de los dos conjuntos citados será:

$$B \times A = \{(p,2),(p,5),(p,9),(q,2),(q,5),(q,9)\}$$

Lo que confirma la no conmutatividad de la operación.

La definición de producto cartesiano se puede extender a más de dos conjuntos, por ejemplo, en los productos cartesianos indicados:

$$A \times B \times C \quad \text{y} \quad R \times I \times Q$$

5.2. Inversa y traspuesta de una matriz cuadrada

La matriz inversa de una matriz dada tiene una propiedad multiplicativa muy interesante y es de amplia aplicación. Sea una matriz cuadrada A, tenemos que puede existir una única matriz denotada como A^{-1}, con la que se cumple:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I} \qquad (\boldsymbol{a})$$

Dónde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad para la multiplicación; esta matriz tiene la particularidad que todos sus elementos en la diagonal principal son iguales a 1 (ver unidad 1),y el resto son iguales a cero; a continuación, se muestra una matriz identidad de orden 3x3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es importante indicar que en algunos casos puede existir la matriz inversa y en otros no, esta situación está relacionada al tipo y diversidad de soluciones que puede tener un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, para sistemas de ecuaciones representados por una matriz cuadrada A y con solución única es posible obtener su matriz inversa.

El procedimiento de cálculo de la inversa de una matriz cuadrada A(esta denominación se refiere a que el orden “mxn” de A es tal, que el número de renglones y número de columnas es el mismo, m=n) se realiza aplicando el método de Gauss-Jordan.

El algoritmo de inversión de la matriz consta de los siguientes pasos:

a) Se coloca la matriz A, invertir al lado de la matriz identidad $\boldsymbol{I}$, del mismo orden, separadas ambas matrices por los corchetes de cada matriz

b) A continuación, se aplican las operaciones permitidas por el método de Gauss para escalonarla matriz A hasta convertirla en la matriz identidad; estas operaciones se realizan al mismo tiempo y en el mismo orden sobre la matriz identidad, de tal forma que al final del procedimiento se obtiene en el lugar de la matriz identidad la matrizA^{-1}. Esquemáticamente, esto se indica a continuación:

$$AI \to (operaciones\ permitidas\ entre\ renglones\ del\ método\ de\ Gauss) \to IA^{-1}$$

Es importante observar, recordando la no conmutatividad de las operaciones de multiplicación de matrices y del producto cartesiano, cómo en el proceso de inversión se logra la transformación de la matriz A en la matriz identidad, y de la matriz identidad en la matriz inversa A^{-1}.

Aplicaciones

Un uso algebraico directo de la matriz inversa puede verse en el caso de una transformación lineal, representada en la ecuación siguiente por su matriz asociada A, como:

$$T(\mathbf{y})=A\mathbf{y}=\mathbf{w}$$

Entonces, multiplicando por la izquierda en ambos lados de la ecuación anterior con la matriz A^{-1}, omitiendo por facilidad de lectura el signo “x” de la notación de la multiplicación, tenemos:

$$A^{-1}A\mathbf{y}=A^{-1}\mathbf{w},$$

De la ecuación (a) al inicio de este tema, tenemos que:

$$A^{-1}A=I,$$

Indicando adicionalmente que, bajo la operación de multiplicación de matrices, la matriz identidad tiene la propiedad de que al ser multiplicada por cualquier vector o matriz nos da al mismo elemento, esto es:

$$I\mathbf{y}=\mathbf{y}$$

Por lo que:

$$\mathbf{y}=A^{-1}\mathbf{w}$$

Este último resultado es importante y nos indica que al aplicar la matriz inversa podemos revertir una transformación lineal; por ejemplo, en el caso de haber codificado información la podemos regresar a su significado original; en el caso de modificar una imagen por un proceso de edición, al aplicar la matriz inversa la podemos llevar a su estado original. Estos ejemplos son una pequeña muestra de lo que es posible realizar mediante los procesos algebraicos de las matrices en las transformaciones lineales. De igual forma es conveniente indicar que el uso de la matriz inversa no solo se circunscribe a esa rama del álgebra, otra aplicación importante se encuentra en la solución de ecuaciones lineales, esto lo podemos plantear algebraicamente de manera rápida si observamos la ecuación (d) del inciso 1.3 de estos apuntes:

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

De la misma manera que en las transformaciones lineales, en este caso también podemos “despejar” la matriz A por medio de su matriz inversa, y así obtener el vector independiente x. Podemos enunciar otra variedad de aplicaciones, sin embargo, con fines de ilustración, dejamos los ejemplos presentados más adelante.

Procedimiento de inversión de una matriz cuadrada

La mecánica del algoritmo de inversión de una matriz cuadrada A se lista a continuación:

Encontrar en la columna extrema izquierda de la matriz un elemento "a" "aij" que no sea cero.

De ser necesario, se intercambiará el renglón superior con otro cualquiera, con el propósito de que el elemento localizado cumpla con la condición del paso anterior.

El elemento diferente de cero, encontrado en el proceso 1, es un valor cualquiera a, entonces se deberá multiplicar todo ese renglón por 1/a a efecto de que el primer elemento tome el valor de uno.

A continuación se suma o resta, múltiplos apropiados del primer renglón, a los demás renglones de tal manera que en la columna encontrada en el proceso uno, todos los elementos por abajo del primer "1" tengan un valor de cero.

Descartar por el momento el primer renglón, y volver a aplicar el proceso inicial solamente a los renglones restantes a partir de la segunda columna; continuar el procedimiento hasta obtener una matriz triangular o identidad (ver unidad 1).

En caso de obtener una matriz triangular, se repite el procedimiento empezando por el último renglón (ahora columna extrema derecha, posición inferior), y se avanza hacia arriba, sumando múltiplos apropiados de cada renglón a los renglones que estén arriba de ella; el procedimiento se continúa hasta que se cumpla la condición de obtener una matriz identidad (véase, O. Pineda, (1998), *Álgebra Lineal: Un Enfoque Económico y Administrativo*, México, IPN). Debe resaltarse que dentro del procedimiento indicado para la inversión de matrices, existe la posibilidad de que en al menos un renglon o una columna de la matriz todos sus elementos se vuelvan ceros, esto significará que la matriz A es no inversible, entonces el procedimiento en ese punto se detiene y se reporta la no inversibilidad.

Es de suma importancia recordar que todas las operaciones realizadas sobre la matriz A a invertir, se deben de realizar en la misma secuencia y en el mismo orden sobre la matriz identidad ***I*** que fue colocada a su lado. Al final del procedimiento, en el lugar de la matriz identidad se obtendrá la matriz invertida A^{-1}.

Ejemplo:

Obtener la inversa de la matriz A indicada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empezamos colocando lado a lado la matriz A y la matriz identidad I del mismo orden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El cálculo de inversión consta de los siguientes pasos (ver notación método de Gauss unidad 1) y se desarrolla en esa secuencia posteriormente:
1) $-2R_1+R_2$; 2) $-R_1+R_3$; 3) $-R_2+R_3$;4)(1/2) R_3; 5)$-R_3+R_1$; 6) R_2+R_1; 7) $-R_2$; 8) A^{-1}

Pasos 1) y 2):

$$-2\mathrm{R}1 + \mathrm{R}2\,;\; -\mathrm{R}1 + \mathrm{R}3 \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Pasos 3) y 4):

$$-\mathrm{R}2 + \mathrm{R}3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{R3}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1\\0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

Pasos 5) y 6)

$$-R_3+R_1;\ R_2+R_1\ \boxed{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5 & 0.5\\-1 & 0 & 1\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}}$$

Pasos 7) y 8):

$$-R_2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5 & 0.5\\1 & 0 & -1\\0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

Por lo que:

$$A^{-1}:\boxed{\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5 & 0.5\\1 & 0 & -1\\0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}}$$

Se observa, en el ejemplo anterior, que efectivamente en el lugar de la matriz A ahora queda la matriz ***I***, así mismo que en el lugar de la matriz ***I*** queda ahora la matriz A^{-1}.

Se deja como ejercicio al alumno comprobar que el producto AxA^{-1} produce la matriz identidad de orden 3x3 (***I***).

Matriz Transpuesta

La matriz transpuesta está dada por una matriz en la cual se intercambian los renglones por las columnas, dando como resultado la matriz transpuesta. Entonces considerando la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1m \\ \underline{a21} & \underline{a22} & \underline{\dots} & \underline{a2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & an2 & \dots & anm \end{bmatrix}$$

Su matriz transpuesta es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Sea la matriz A, calcule su matriz transpuesta.

Una liga que se recomienda para practicar y fortalecer los conocimientos vistos en este apartado se encuentra en la Red Universitaria de Aprendizaje en:

http://fcasua.contad.unam.mx/clases_virtuales/informatica/1168/sesion_22/player.html

Un documento que se recomienda revisar para estudiar la aplicación de las matrices en la codificación de la información se encuentra en:

http://www.uclm.es/ab/educacion/ensayos/pdf/revista18/18_16.pdf

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de A es:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

RESUMEN

En esta unidad se hizo una revisión dela notación, la compatibilidad y el proceso algorítmico de las operaciones matriciales más comunes, estas son: suma y resta de matrices, multiplicación de matriz por un escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices, producto cartesiano, matriz identidad multiplicativa y las matrices inversa y transpuesta. El objetivo de hacerlo versa tanto en el sentido algebraico como en el sentido algorítmico, ya que de esta forma es posible realizar un modelado de los problemas y también obtener sus soluciones

Esto último se pudo apreciar puntualmente en esta unidad, a través de la presentación de algunas aplicaciones algebraicas de la matriz inversa en las trasformaciones lineales.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard (2006)	1	12-46
Poole, David (2004)	3	131-178
Lay,David (2004)	2	105-134

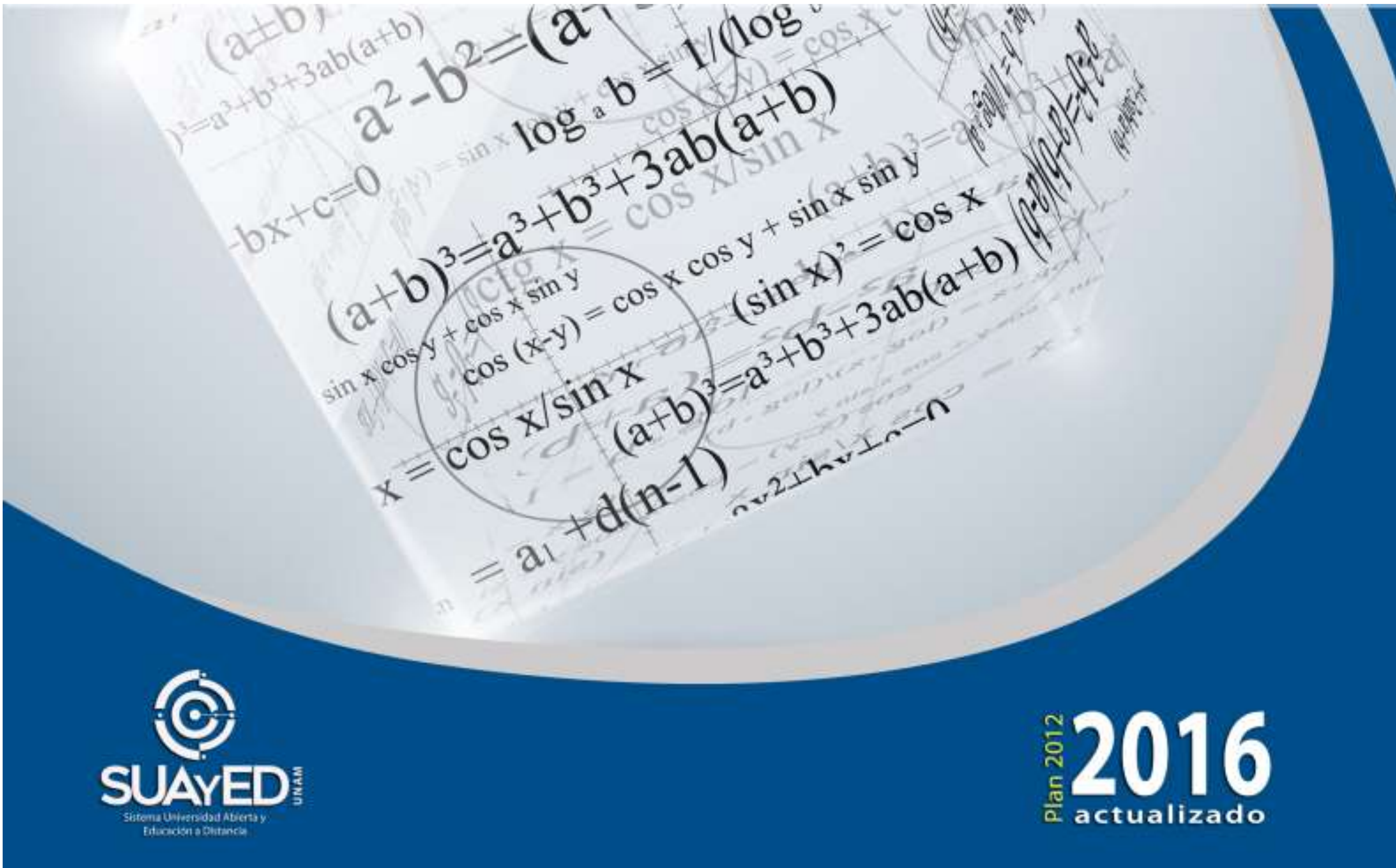
Kolman, Bernard y Hill, David R. (2006). *Algebra lineal* (Octava Edición). México: Pearson Prentice Hall, 648 pp.

Poole, David (2004). *Algebra lineal: Una introducción moderna*. México: Thomson, 763 pp.

Lay, David (2004). *Algebra Lineal y sus aplicaciones* (3ª. Ed.). México: Pearson, 492 pp.

UNIDAD 6

Determinantes



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificará las propiedades y aplicaciones de los determinantes.

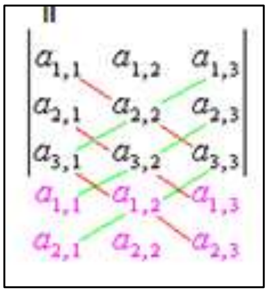
TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

6. Determinantes
6.1. Definiciones y propiedades
6.2. Regla de Cramer
6.3. Eigen valores, eigen vectores

INTRODUCCIÓN

La idea del *determinante* proviene de mucho tiempo más atrás que la del concepto de matriz. El determinante fue descubierto por Cramer durante sus trabajos orientados a la resolución de problemas que se formulaban a través de los sistemas de ecuaciones lineales.



(Imagen de un determinante)

La teoría de los determinantes fue expuesta por primera vez en el año de 1750, es decir, cien años antes de que Sylvester y Cayley empezaran a hablar de las Matrices. (Imagen de Cayley)

Hoy en día, el concepto del Determinante tiende a ser referido como resultado de la Teoría de Matrices y, por consecuencia, es considerado como el Proceso de Axiomatización de las Matrices.

En esta unidad veremos lo que se refiere a la definición del Determinante, así como las propiedades que lo caracterizan e identifican como tal; posteriormente, veremos cómo se define y aplica la Regla de Cramer, y finalmente, cómo se definen y obtienen los Eingevalores y los Eingevectores, a fin de poder vincularlos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática.

6.1. Definiciones y propiedades

La teoría de funciones es un extenso campo de las matemáticas; tal como tenemos en el caso de la ecuación de una recta: $y = mx$, en la que un par de números (x, y) están relacionados por una regla de asignación, también existen casos donde ahora la variable es una matriz$A$ y la función matemática le asigna a ésta un valor escalar "y" (Anton, pág. 73). Este es precisamente el caso de la función determinante, que es un número que se asigna algorítmicamente a una formación cuadrada de números (matriz), y se denota por medio del siguiente símbolo:

$$|\boldsymbol{A}|$$

Y se lee: "determinante de la matriz A"

La idea de *determinante* fue considerada desde 1683 por el matemático japonés Seki Takakasu y, de manera independiente, en 1693 por el matemático Alemán Gottfried Leibniz, unos 160 años antes de que se desarrollara una teoría de matrices por separado.

En esencia, la función determinante versa sobre una regla de asignación que tiene su base en la teoría de las permutaciones y tiene amplia aplicación en el estudio de las ecuaciones lineales y sus soluciones. Por esta causa es que también es de nuestro interés el concepto y forma parte de nuestros estudios acerca del álgebra lineal.

Existen varios procedimientos algorítmicos para poder calcular el determinante de una matriz, sin embargo, nos enfocaremos en dos de ellos que se listan a continuación.

a) Regla de Sarrus

b) Método de cofactores

Regla de Sarrus

Sea A una matriz cuadrada (el número de renglones y columnas es el mismo), su determinante es un valor numérico que se calcula con todos los coeficientes de la matriz.

Caso 1. Determinante de una matriz de orden 2x2

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ entonces el determinante de A se define como:

$$\boxed{|A| = ad - cb}$$

El cálculo se realiza haciendo la multiplicación "cruzada" de los elementos "a "por "d" menos el producto de los elementos "c" por "b".

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} |A| = (-2)(3) - 5(1) = -6 - 5 = -11}$$

Como habíamos mencionado el determinante de una matriz tiene que ver con la teoría de permutaciones, y lo que se busca es relacionar con este enfoque las ubicaciones renglón-columna al interior de la matriz, esta situación se menciona con el fin de vislumbrar el porqué de las variaciones entre los diferentes métodos de cálculo del determinante de un matriz.

Caso 2. Determinante de una matriz de 3x3

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Entonces, para calcular el determinante de Ase realizan los siguientes pasos:

1.-Repetir los dos primeros renglones abajo de la matriz.

2.- Trazar sobre los elementos *aij* de la matriz seis líneas rectas “imaginarias” (denominadas diagonales), que enlacen simultáneamente solo tres elementos *aij*. Tres de estas líneas se trazan de izquierda a derecha (“izquierda”) y las otras tres de derecha a izquierda (“derecha”).

3.- Multiplicar los tres elementos encada diagonal izquierda (línea roja) y en cada diagonal derecha (línea verde), véase la figura inferior.

4.- El determinante es el resultado de sumar los tres productos de las “diagonales izquierdas” (líneas rojas) y restarles los tres productos de las diagonales derechas (líneas verdes). Esto se ilustra a continuación:

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{array} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

Ejemplo:

Obtenga el determinante de la matriz A

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}\ |A|=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=(1x1x5)+(1x0x3)+(2x2x-1)-[(5x2x1)+(-1x0x1)+(3x1x2)]$$

$$=(5+0+4)-(10+0+6)=1-16=-15$$

$$|A|=-15$$

En el ejemplo anterior solo se indicó con el color respectivo el “inicio” de las diagonales “imaginarias”.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades de la función determinante nos facilitan la evaluación del determinante de una matriz, ya sea por su evaluación directa o por medio de la diagonalización de la matriz (ver unidad1, método de Gauss); cabe mencionar que este último método es muy conveniente para calcular los determinantes de matrices “muy grandes”, esto es de orden mayora 5x5.

Para todas las siguientes propiedades considere que A es una matriz cuadrada.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES
I) Si todos los elementos de un renglón o columna de la matriz "A" son ceros, entonces $\|\boldsymbol{A}\| = \boldsymbol{0}$
II) Cuando dos renglones o columnas de la matriz "A" son idénticos, entonces $\|\boldsymbol{A}\| = \boldsymbol{0}$
III) Cuando la matriz A es triangular superior o inferior (considerando la diagonal principal de una matriz, que es la línea imaginaria formada por todos los elementos en los que dada la posición $\boldsymbol{a_{mn}}$, se tiene que $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$, entonces todos los elementos bajo de ella son ceros (triangular superior) o arriba de ella son ceros (triangular inferior), ver unidad 1) entonces el determinante $\|\boldsymbol{A}\|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
IV) Si $\|\boldsymbol{A}\|$ es una matriz identidad, entonces su determinante es igual a uno.
v) Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos renglones o columnas, entonces $\|\boldsymbol{A}\| = -\|\boldsymbol{B}\|$
VI) Si la matriz $\boldsymbol{B}$ se obtiene de la matriz $\boldsymbol{A}$ al multiplicar un renglón o columna por un escalar k, entonces: $\|\boldsymbol{B}\| = \boldsymbol{k}\|\boldsymbol{A}\|$
VII) El determinante del producto (AxB) de matrices cuadradas es el producto de sus determinantes, o sea $\|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\| = \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$
VIII) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, entonces $\|\boldsymbol{A^T}\| = \|\boldsymbol{A}\|$
IX) $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boxed{\|\boldsymbol{A}\|}} \boldsymbol{Adj\ A}$
X) Si A es invertible entonces $\boxed{\|\boldsymbol{A^{-1}}\| = \frac{\boldsymbol{1}}{\|\boldsymbol{A}\|}}$

Ejemplo:

Matriz nula

El determinante de una matriz nula 3x3,es cero, esto se deriva de la propiedad I).

$$Det(0)=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

Matriz unidad o identidad

El determinante de la matriz identidades uno, esto se deriva de las propiedades III) y IV).

$$Det(1)=\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

Matriz diagonal

El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, esto se deriva de la propiedad III).

$$Det(A)=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 1=6$$

Matriz triangular

El determinante de la matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, de igual forma el resultado se concluye de la propiedad III).

$$Det(M)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 1 & 5\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}=8$$

Como se ha mencionado, existen diversos métodos para la evaluación de un determinante, algunos de ellos, como la regla de Sarrus, son convenientes para matrices cuadradas de orden menor o igual a 3.

A continuación se muestra el método de cofactores que puede aplicarse para matrices mayores; pese a que se considera un método de aplicación general, el algoritmo suele complicarse de manera importante al incrementar el orden de la matriz, por ello en la práctica el método de diagonalización de Gauss se utiliza de manera preferente, sin embargo, es conveniente mostrar el método de cofactores con el fin de proporcionar una visión general sobre las diferentes metodologías existentes en cuanto a la evaluación de los determinantes.

Desarrollo de un determinante por cofactores

Sea una matriz A:

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ \underline{a21} & \underline{a22} & \underline{\dots} & \underline{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & anm \end{bmatrix}$$

Si se considera a un elemento “aij” de la matriz A y se “elimina” de esta el renglón “i” y la columna “j”, entonces sí ahora formamos una matriz M que conste de los renglones y columnas no eliminados de A, a esta “submatriz” se denomina el menor *ij* de A, denotándose Mij.

Para aclarar el punto mostramos el siguiente ejemplo considerando una matriz 3x3:

$$A = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

Para formar el menor “a21”, esto implica eliminar el renglón 2 y la columna 1 de la matriz A:

$$A = \begin{vmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{vmatrix}$$

Entonces el menor M21 quedará como:

$$M21 = \begin{vmatrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{vmatrix}$$

Cofactores

A continuación, se proporcionará la definición de cofactor de una matriz. El cofactor “ij” de una matriz A es el número Cij determinado por:

$$Cij = (-1)^{i+j} Mij$$

Donde Mijes el menor asociado al elemento aij de la matriz A.

A continuación, se definirá el método de cálculo del determinante de una matriz A, a partir de los cofactores de ésta.

El determinante de una matriz cuadrada de orden nxnes igual a la suma de los productos de los elementos “aij” de un renglón o columna cualquiera por sus cofactores respectivos (Anton, pág. 91), esto es:

$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} \cdot C_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot C_{in}$: Esto es considerando un renglón

ó

$\det(A) = a_{1j} \cdot C_{1j} + a_{2j} \cdot C_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot C_{nj}$. Esto es considerando una columna

Ejemplo: Obtener el determinante de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Apoyándonos en el renglón 1

$$|A| = 3\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 4 & -2\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 5 & 4\end{bmatrix} = 3(-4) - 1(-11) + 0(12) = -1$$

Se deja al alumno comprobar el resultado anterior por el método de Sarrus y por cofactores apoyándose en la columna uno de la matriz indicada.

6.2 Regla de Cramer

La Regla de Cramer es un método que nos permite calcular la solución de un sistema con “n” ecuaciones y “n” incógnitas, siempre y cuando el determinante de la matriz asociada A sea diferente de cero. Esto se resume formalmente a continuación:

Sea un sistema de ecuaciones lineales,

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Si se cumple que:

a) A es una matriz cuadrada
b) Y $|A| \neq \mathbf{0}$

Entonces el sistema es compatible, tiene solución única y el valor de cada incógnita xi del sistema de ecuaciones lineales está dado por la expresión:

$$xi = \frac{|Ai|}{|A|}$$

Donde el elemento $\boldsymbol{Ai}$es la matriz que se obtiene al sustituir la columna $\boldsymbol{Ci}$en la matriz $\boldsymbol{A}$**,** por el vector columna $\boldsymbol{y}$**.**

Específicamente, si al sistema de ecuaciones lo expresamos matricialmente:

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ \underline{a21} & \underline{a22} & \underline{\dots} & \underline{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & anm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ \underline{b2} \\ \dots \\ bn \end{bmatrix}$$

Tendremos entonces que:

$$x2 = \frac{|A2|}{|A|}$$

$$x2 = \frac{det \begin{bmatrix} a11 & b1 & \dots & a1n \\ \underline{a21} & b2 & \underline{\dots} & \underline{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & bn & \dots & anm \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ \underline{a21} & \underline{a22} & \underline{\dots} & \underline{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & anm \end{bmatrix}}$$

Sí las matrices involucradas ($|A|\boldsymbol{y}\ |Ai|$) son de un orden máximo de 3x3, sus determinantes se pueden calcular con la regla de Sarrus, vista en el punto 5.1, en otro caso (orden de A mayor a 3x3) es conveniente utilizar la diagonalización de la matriz con el método de Gauss visto en el capítulo 1 de estos apuntes.

Ejemplo:

Sea un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - y + 2z = 10 \\ 3x + y - z = 25 \end{cases}$$

Su matriz asociada A es entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando la *Regla de Cramer* obtenemos los valores de los determinantes y a partir de ellos los de las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 2 \\ 25 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 8, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 4, \quad , \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 3$$

Entonces los valores $x = 8, y = 4, z = 3$ son la solución del sistema de ecuaciones lineales propuesto.

Regla de Cramer para un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Sea el siguiente sistema de ecuaciones de segundo orden:

$$\begin{cases} 2x + \quad 3y = 15 \\ x \; - \quad\; y = 5 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores de x, y usando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \; 6, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \; 1$$

Se deja al alumno comprobar la validez de los resultados obtenidos para ambos sistemas resueltos por la regla de Cramer.

La aplicación del concepto de determinante simplifica la obtención de las soluciones en algunos sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, para sistemas de ecuaciones con más de tres incógnitas, la complejidad computacional del método se va incrementando en proporción del número de incógnitas y es por esto que es más conveniente, de manera general, aplicar el método de Gauss-Jordan.

Una liga que se recomienda para practicar y fortalecer los conocimientos vistos en este apartado se encuentra en la Red Universitaria de Aprendizaje en:

http://fcasua.contad.unam.mx/clases_virtuales/informatica/1168/sesion_24/pla

6.3 Eigenvalores, eigenvectores

Eingevalores

En algunas transformaciones lineales del tipo $\mathrm{T(V)} \rightarrow \mathrm{V}$se requiere encontrar los valores escalares para los cuales la siguiente ecuación tiene soluciones diferentes de cero (Anton, pág. 255):

$$\mathrm{T(x)} = \lambda\mathrm{(x)}.$$

Si consideramos que la transformación lineal se representa por su matriz asociada, tenemos:

$$\mathrm{Ax} = \lambda x$$

Aplicando las propiedades de suma y resta de las matrices (unidad 5) tenemos que:

$$\lambda\mathrm{x} - \mathrm{Ax} = 0$$

Adicionalmente aplicado las propiedades de multiplicación de las matrices:

$$(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{x} = 0 \qquad \text{(a)}$$

De la ecuación anterior podemos entonces definir a λ como el valor (o valoresya que puede haber más de uno), característicos (también conocidos como eigenvalores) de la trasformación A; así mismo los vectores x (diferentes al vector cero) asociados a estos valoresλ y que satisfacen la ecuación (a) se denominan vectores característicos (oeigenvectores).

De la ecuación (a) podemos observar que los eingevalores son números que se restan a la diagonal de una matriz y al satisfacer la ecuación (a) esto implica que:

$$\det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A}) = 0$$

Si tenemos una matriz A:

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ \underline{a21} & \underline{a22} & \underline{\dots} & \underline{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & ann \end{bmatrix}$$

Entonces, su determinante será:

$$\det(A) \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ \underline{a21} & \underline{a22} & \underline{\dots} & \underline{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & ann \end{bmatrix}$$

Para obtener los eingevalores λ, hacemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a11 & a12 & \dots & a1n \\ \underline{a21} & \lambda - \underline{a22} & \underline{\dots} & \underline{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & \lambda - ann \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo:

Calcular los eingevalores de la siguiente matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Y el determinante nos da

$$= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = 0$$

$$= 1 - 2\lambda + \lambda\lambda - 1 = -2\lambda + \lambda 2 = \lambda(\lambda - 2) = 0$$

De aquí obtenemos dos eingevalores: λ=0 y λ=2

Eingevectores

Como habíamos mencionado un eingevector es un vector asociado a una matriz A, el cual se obtiene a partir de los eingevalores. Es decir, que, para su cálculo, primero hay que obtener los eingevalores de la matriz A. Poole, (2004) David, pp. 247-249. Estos vectores tienen la propiedad de que dada la ecuación matricial:

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Existen vectores no triviales (diferentes del vector cero), xi con los que se cumple que:

$$Ax = \lambda x$$

Para la obtención de los eingevectores se tienen que encontrar los valores:

$$[a1 \;\; a2 \;\; \dots \;\; an]$$

De tal manera que se cumpla la siguiente expresión:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a11 & a12 & \dots & a1n \\ \underline{a21} & \lambda \underline{- a22} & \underline{\dots} & \underline{a2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & \lambda - ann \end{vmatrix} \times \begin{bmatrix} a1 \\ \underline{a2} \\ \dots \\ an \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{0} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde $a1, a2, \dots, an$ son valores constantes.

Ejemplo:

Calcular los eingevectores de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primero obtenemos los eingevalores

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Y la determinante nos da.

$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$

$= 1 - 2\lambda + \lambda 2 - 1 = -2\lambda + \lambda 2 = \lambda(\lambda - 2) = 0$

De aquí obtenemos dos eingevalores: $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$.

Para obtener los eingevectores.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 + & a2 \\ a1 + & 2a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto implica del primer renglón que $a1 + a2 = 0$ implica que $a2 = -a1$; en tanto qu del segundo renglón tenemos que $a1 + 2a1 = -a1 = 0$ *por lo que* $a1 = a2 = 0$

De lo anterior se desprende que para $\lambda = 0$ tenemos el vector $(0,0)$ o solución trivial.

Para $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a1 + & a2 \\ a1 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Del primer renglón tenemos que $-a1 + a2 = 0$, implica que $a2 = a1$

Del segundo renglón tenemos que $a1 = 0$

Por lo tanto para $\lambda = 2$, la única solución que se tiene es la trivial, el eigenvector $(0,0)$.

De este apartado es importante rescatar una propiedad matemática de mucha utilidad acerca de los conceptos de valores y vectores característicos. Esta se refiere al hecho de que estos elementos tienen la propiedad de que dado un valor característico (eigenvalor) λ), y un vector característico $\mathbf{x}$ asociados a una matriz A, se cumple que:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$$

Esta ecuación es relevante pues indica que para estos elementos es equivalente realizar la multiplicación tanto por la matriz A cuanto por el escalarλ; esto también se puede interpretar como que existe una relación de escala entre el vector característico$\mathbf{x}$con su valor característico λ (Anton, 1983: 259). Esta condición puede facilitar ampliamente la realización de cálculos en los problemas y más aún sí los vectores característicos se pueden aprovechar como una base del espacio vectorial de interés. Como comentábamos en la unidad 4, en estas situaciones también es más fácil hacer una comparación a partir de valores escalares (números) que por medio de elementos matriciales.

Es necesario decir que en la práctica las matrices relacionadas a los problemas reales son de dimensiones grandes y bajo esta óptica la obtención de los valores y vectores característicos se debe de llevar a cabo a través de la aplicación de métodos numéricos.

Una liga que se recomienda para practicar y fortalecer los conocimientos vistos en este apartado se encuentra en la Red Universitaria de Aprendizaje en:

http://fcasua.contad.unam.mx/clases_virtuales/informatica/1168/sesion_26/player.html

Una vez obtenidos los eigenvalores y los eigenvectores correspondientes, estos pueden ser un eficaz apoyo para la aceleración de la mecánica algorítmica en la solución de un problema dado.

RESUMEN

En la actualidad, los requerimientos analíticos de las empresas avanzan rápidamente; por este motivo, se requieren modelos y algoritmos más complejos para la solución de los problemas. Para determinar y resolver las interacciones que producen mejores procesos productivos y rinden mayores utilidades para las organizaciones es menester construir complejos modelos en los que se interrelacionan sistemas de ecuaciones y transformaciones lineales, por ello es necesario conocer una variedad de herramientas que nos permitan plantear, analizar y resolver estas estructuras de manera rápida y con un cierto nivel de versatilidad, que se adapte a las condiciones cambiantes de los negocios. Es en estos entornos donde los conceptos de determinante y de valores y vectores característicos encuentran un importante nicho de aplicación; por tanto, es de suma importancia conocer y dominar las técnicas matemáticas avanzadas que nos ofrece el álgebra lineal en el campo profesional de la informática.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard (2006)	3	182-189
Poole, David (2011)	4	256-267

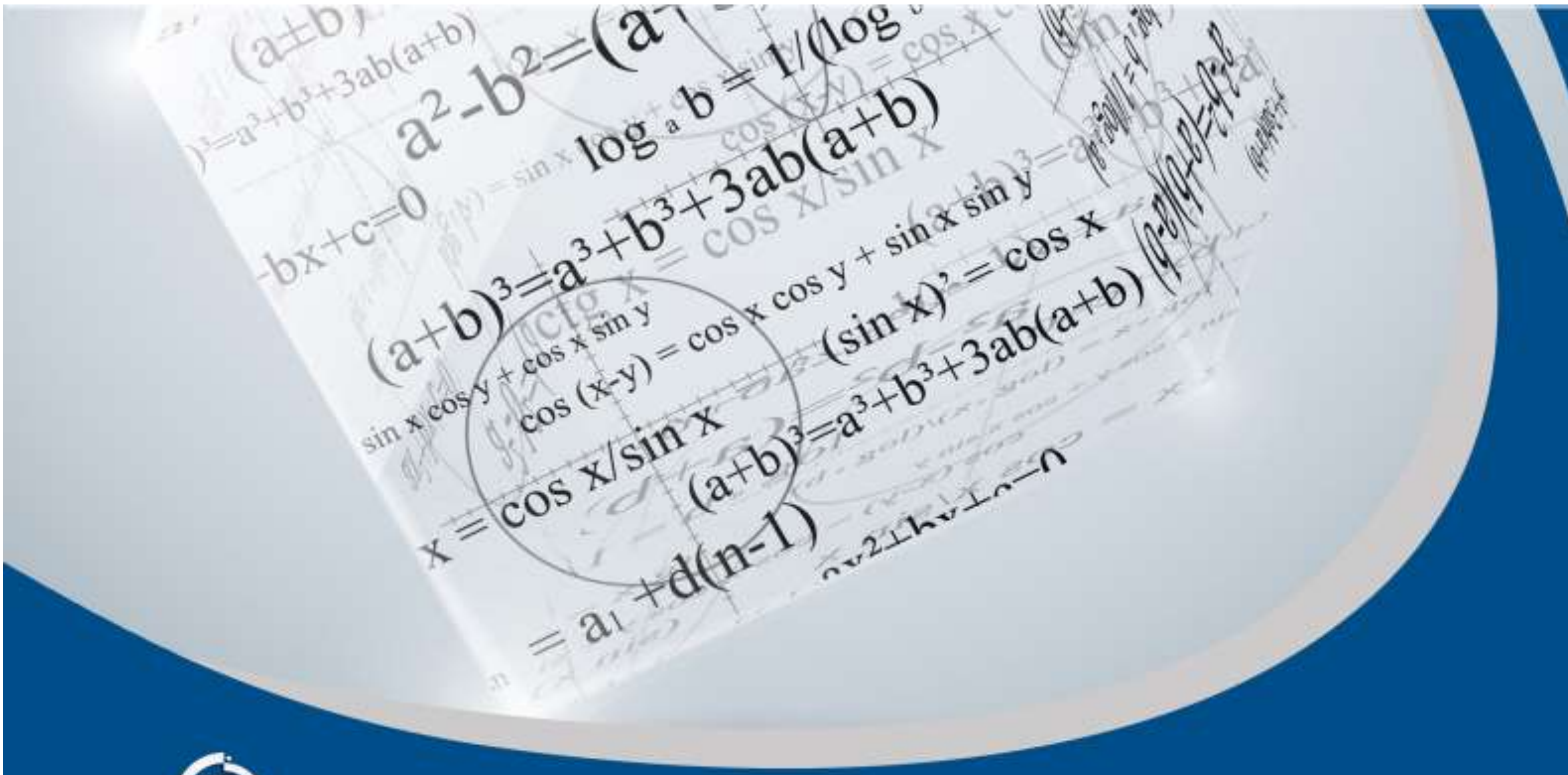
Kolman, Bernard y Hill, David R. (2006). *Algebra lineal* (Octava Edición). México: Pearson Prentice Hall, 648 pp.

Poole, David (2004). *Algebra lineal: Una introducción moderna*. México: Thomson, 763 pp.

Lay, David (2004). *Algebra Lineal y sus aplicaciones* (3ª. Ed.). México: Pearson, 492 pp.

Unidad 7

Prácticas en laboratorio



SUAYED UNAM
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Plan 2012 2016 actualizado

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno resolverá problemas de algebra lineal utilizando software.

TEMARIO DETALLADO

(12 horas)

7. Prácticas en laboratorio

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de este tema se muestra la aplicación de los conocimientos adquiridos durante el semestre y algunos de otras materias que, en su conjunto, permiten que seas capaz de resolver problemas con el apoyo del uso de la computadora.

La idea del software para la resolución de problemas matemáticos diversos se maneja ampliamente a partir del Siglo XX, periodo en el que el hombre se preocupó por comprender el desarrollo tecnológico y como utilizarlo para acelerar el avance de la ciencia, realidad que se vive en forma acelerada en la actualidad.

La resolución de problemas matemáticos por medio del uso de software se ha tornado omnipresente y hoy en día es un requisito indispensable, ante el constante cambio que el hombre ha provocado en su relación con el medio ambiente en la búsqueda de tener un mayor bienestar.

En esta unidad veremos lo que se refiere a las aplicaciones del software Excel en los diversos temas vistos a lo largo de las unidades anteriores, con el fin de poder dar solución de una manera más rápida a diversos problemas del campo profesional de la Licenciatura en Informática y su relación con las áreas Contables-Administrativas.

Caso práctico: sistema de ecuaciones lineales

Supóngase que el importe de una compra de cuatro refrescos chicos y cinco refrescos grandes es por $94.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y un refresco grande y el importe de esta compra es por $26.00. ¿Cuál es el precio del refresco chico y grande?

Para solucionar este ejercicio plantearemos el sistema de ecuaciones lineales correspondiente y utilizaremos la hoja de Excel para resolverlo.

$$4c + 5g = 94$$
$$2c + g = 26$$

Y su matriz aumentada está dada por:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 94 \\ 2 & 1 & 26 \end{bmatrix}$$

La solución del problema se obtendrá por el método de Gauss-Jordan.

Paso 1

Escribamos en un renglón y celdas diferentes los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		4	5	94	
3					

Paso 2

7.1 Caso práctico Sistema de Ecuación Lineal

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	26	
5					

Paso 3

Transformamos el primer renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la segunda compra.

	A	B	C
5			
6			
7		=B4*B2	
8			

	A	B	C	D
5				
6			=B4*C2	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=B4*D2	
7					

Resultando:

	A	B	C	D	E
5					
6		8	10	188	
7					

Paso 4

Transformamos el segundo renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la primera compra.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

	A	B	C	D	E
7					
8				=B2*D4	
9					

Resultando

	A	B	C	D	E
7					
8		8	4	104	
9					

Paso 5

De los dos renglones resultantes de los pasos 3 y 4, al renglón obtenido en el paso 3 se le resta el renglón obtenido en el paso 4. Aquí da como resultado en la celda correspondiente a los refrescos chicos el valor de cero y en las otras celdas no necesariamente un valor igual a cero.

	A	B	C
9			
10		=B6-B8	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=C6-C8	
11				

	A	B	C	D	E
9					
10				=D6-D8	
11					

Resultando:

	A	B	C	D	E
9					
10		-	6	84	
11					

Paso 6

Del resultado obtenido en la diferencia del importe de las compras (obtenido en el paso 5), este se divide entre valor obtenido correspondiente a los refrescos grandes, este cociente representa el precio del refresco grande.

	A	B	C
11			
12		=D10/C10	
13			

Resultando:

	A	B	C
11			
12		14	
13			

Paso 7

Para obtener el precio del refresco chico se multiplicará la celda que contiene el precio del refresco grande (celda paso 6) por el número de refrescos comprados en la primera compra (celda del paso 1), el producto anterior se le resta al importe de la primera compra (celda paso 1) y la resultante de esta diferencia se divide entre el número de refrescos chicos comprados en la primera compre (celda paso 1).

	A	B	C
13			
14		=B12*C2	
15			

Resultando:

	A	B	C
13			
14		70	
15			

A la compra total se le resta el valor anterior

	A	B	C
15			
16		=D2-B14	
17			

Lo dividimos entre el número de refrescos chicos comprados la primera vez

Resultando:

	A	B	C
17			
18		6	
19			

Finalmente, los valores obtenidos en los pasos seis y siete, refresco grande $14, refresco chico $6, son los resultados buscados en esta práctica.

Caso práctico de vectores

Supóngase que el importe del ingreso de tres diferentes productos es de $4,000, $5,000 y $3,000 respectivamente y el correspondiente importe del costo variable es de $1,000, $2,000 y $ 1,000, calcular la utilidad por artículo.

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, además consideraremos que los importes de los ingresos, costos y utilidad representan un vector cada uno de ellos. Esto se representa matemáticamente por la expresión:

$$\boxed{\boldsymbol{i} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}}$$

Donde **i** es el vector de ingresos, **c** es el vector de costos y **u** es el vector de utilidad.

Paso 1

Pon en un renglón y celdas diferentes los valores del importe de cada uno de los ingresos de cada de los productos.

	A	B	C	D	E
1					
2		4,000	5,000	3,000	
3					

Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores del importe de cada uno de los costos de cada uno de los productos.

	A	B	C	D	E
3					
4		1,000	2,000	1,000	
5					

Paso 3

Realiza la resta de los ingresos y costos obteniendo de esta manera la utilidad de cada uno de los productos (se resta la celda del renglón del paso uno menos la del renglón del paso 2 y así sucesivamente).

	A	B	C
5			
6		=B2-B4	
7			

	A	B	C	D
5				
6			=C2-C4	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=D2-D4	
7					

Resultado

	A	B	C	D	E
5					
6		3,000	3,000	2,000	
7					

El vector anterior (3000, 3000, 2000) es la respuesta solicitada que nos muestra la utilidad obtenida para cada producto.

Caso práctico de transformación lineal

Supóngase que una empresa tiene su centro de distribución de uno de sus artículos en el Estado de México y para distribuirlo a toda la república tiene cuatro bodegas distribuidas para la mejor eficiencia, la empresa divide en cuatro zonas diferentes zona sureste, suroeste, noreste y noroeste, si el porcentaje de acuerdo a la demanda de cada zona es la siguiente 11%, 26%, 35% y 28% respectivamente. ¿Cuál es la cantidad que se deberá enviar a cada zona si la planta produce 100,000 unidades mensuales de dicho artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que los porcentajes de cada una de las zonas forman una matriz. La matriz asociada y los valores proporcionados en el enunciado se muestran a continuación.

$$kA = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.11 & 0.26 \\ 0.35 & 0.28 \end{bmatrix} \quad k = 100{,}000$$

Paso 1

Primero escribe en un renglón y una celda la cantidad de unidades que produce la empresa en un mes, en este caso 100,000 unidades.

	A	B	C
1			
2		100,000	
3			

Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona sur-este y sur-oeste respectivamente.

	A	B	C	D
3				
4		0.11	0.26	
5				

Paso 3

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona noreste y noroeste respectivamente.

	A	B	C	D
5				
6		0.35	0.28	
7				

Paso 4

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona sur-este y sur-oeste respectivamente son multiplicados por la celda del paso número uno.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

En conjunto tenemos

	A	B	C	D
7				
8		11,000	26,000	
9				

Paso 5

Colocamos en otro renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona noreste y noroeste, respectivamente, multiplicados por la celda del paso número uno.

	A	B	C
9			
10		=B2*B6	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=B2*C6	
11				

En conjunto tenemos

	A	B	C	D
9				
10		35,000	28,000	
11				

Los renglones resultantes de los pasos cuatro y cinco forman la matriz resultante de la transformación lineal

	A	B	C	D
8		11,000	26,000	
9				
10		35,000	28,000	
11				

La matriz Aes la respuesta solicitada que nos muestra las cantidades demandadas por zona. Es útil observar cómo, en este caso, la transformación aplicada corresponde a un proceso de multiplicación de matriz por un escalar.

$$A = \begin{bmatrix} 11{,}000 & 26{,}000 \\ 35{,}000 & 28{,}000 \end{bmatrix}$$

Caso práctico de producto interno

Supóngase que una empresa requiere para la fabricación de uno de sus artículos tres diferentes metales (cobre, plata, oro), si las cantidades requeridas son las siguientes: 2.4kg, 1.8 kg y 0.20 kg respectivamente y el precio por kg de cada uno de los metales es de $18.00, $160.00, $9800.00. Calcular el costo total de la operación de compra de los insumos.

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que las cantidades requeridas de fabricación y de precios de materiales representan un vector cada uno de ellos. Establecido esto podemos determinar que el resultado del problema por medio de la siguiente ecuación vectorial:

$$\boxed{m \cdot c = ct}$$

Que indica el producto punto entre el vector de los materiales **m**, y el vector de costos unitarios asociados **c**, cuyo resultado es el valor escalar *ct* que nos reportará el costo total de la operación

Paso 1

Primero escribe en un renglón y celdas diferentes las cantidades en kg de los diferentes metales se requieren para la fabricación de dicho artículo.

	A	B	C	D	E
1					
2		2.4	1.8	0.2	
3					

Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores del precio por kg de cada uno de los metales.

	A	B	C	D	E
3					
4		18	160	9,800	
5					

Paso 3

Realiza la multiplicación de cada cantidad de metal por su precio y se coloca en un nuevo renglón (se multiplica cada celda del renglón del paso uno por la celda del renglón del paso 2 y así sucesivamente).

	A	B	C
5			
6		=B2*B4	
7			

	A	B	C	D
5				
6			=C2*C4	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				1960	
7					

Lo anterior nos da el siguiente vector:

	A	B	C	D	E
5					
6		43.2	288	1960	
7					

Paso 4

Cada una de las celdas del renglón del paso tres se le suma, dando como resultado el costo total del mencionado artículo.

	A	B	C
7			
8		=B6+C6+D6	
9			

Por lo tanto, el resultado es:

	A	B	C
7			
8		2,291.20	
9			

El valor del paso cuatro es la respuesta solicitada que nos muestra el costo total del artículo en cuestión, ct=$2,291.20.

Caso práctico de matrices

Supóngase que una empresa desea saber el requerimiento mínimo de dos procesos diferentes que son indispensables para la fabricación de dos artículos distintos. Considerando que el articulo número uno requiere de un minuto en cada proceso y el articulo dos de uno y dos minutos, respectivamente, si se requieren fabricar 1,000 unidades del articulo uno y 2,100 del dos. ¿Cuáles son los requerimientos en minutos para cada proceso?

La ecuación matricial que describe el problema se muestra a continuación.

$$Ax = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \end{bmatrix} = B$$

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel.

Paso 1

Anota en un renglón y celdas diferentes los valores del número de minutos requeridos por cada artículo en el proceso uno.

	A	B	C	D
1				
2		1	1	
3				

Paso 2

Escribe en un renglón y celdas diferentes los valores del número de minutos requeridos por cada artículo en el proceso dos.

	A	B	C	D
3				
4		1	2	
5				

Paso 3

Después, en un renglón y celdas diferentes los valores del número de unidades a fabricar por cada artículo.

	A	B	C	D
5				
6		1,000	2,100	
7				

Paso 4

Multiplicamos los valores del renglón del paso tres por el renglón del paso uno (celda por celda respectivamente se multiplican y después ambos resultados se suman siendo esta suma el resultado del número de minutos requeridos en el proceso uno).

	A	B	C
7			
8			
9		=B2*B6	
10			

	A	B	C
7			
8			
9		1,000	
10			

	A	B	C	D
7				
8				
9			=C2*C6	
10				

	B	C	D
7			
8			
9		2,100	
10			

Resultando:

	A	B	C	D
7				
8				
9		1,000	2,100	
10				

La suma es:

	A	B	C
10			
11			
12		=B9+C9	
13			

Su cálculo es:

	A	B	C
10			
11			
12		3,100	
13			

Paso 5

Multiplicamos los valores del renglón del paso tres por el renglón del paso dos (celda por celda respectivamente se multiplican y después ambos resultados se suman siendo esta suma el resultado del número de minutos requeridos en el proceso dos).

	D	E	F
5			
6		=B4*B6	
7			

	E	F
4		
5		
6	1,000	
7		

	F	G	H
4			
5			
6		=C4*C6	
7			

	F	G	H
4			
5			
6		4,200	
7			

Sumando los resultados anteriores; se tiene:

	D	E	F
10			
11			
12		=E6+F6	
13			

La suma nos da:

	D	E	F
10			
11			
12		5,200	
13			

Los valores obtenidos en los pasos cuatro y cinco forman el vector buscado en la presente práctica. Es importante observar la compatibilidad del proceso de multiplicación de matrices, y como a partir de ésta es posible dimensionar de inicio las características del vector de resultados.

$$B = \begin{bmatrix} 3100 \\ 5200 \end{bmatrix}$$

Caso práctico de determinantes

Supóngase que el importe de una compra de cinco refrescos chicos y cuatro refrescos grandes es por $90.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y un refresco grande y el importe de esta compra es por $25.00. ¿Cuál es el precio del refresco chico y del refresco grande?

El problema planteado se puede resolver por medio de un sistema de ecuaciones lineales de segundo orden. Recordando lo visto en la unidad 6 de los apuntes, podemos recordar que la regla de Cramer es un método rápido de solución. A continuación, presentamos la matriz aumentada asociada al sistema de ecuaciones lineales y los determinantes correspondientes para la obtención de las incógnitas, para finalmente resolver el problema por medio de la hoja de cálculo.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 90 \\ 2 & 1 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 90 & 4 \\ 25 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} \frac{\begin{vmatrix} 5 & 90 \\ 2 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

Paso 1

Primero colocamos en un renglón y celdas los diferentes valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		5	4	90	
3					

Paso 2

A continuación, escribe en un segundo renglón los valores de la segunda compra de la misma manera que el primer renglón, es decir, los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de la segunda compra.

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	25	
5					

Paso 3

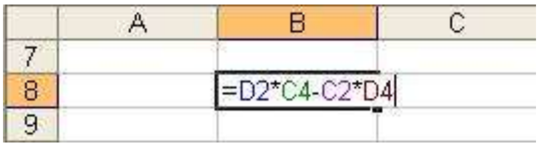
Calculamos la determinante del sistema como sigue, multiplicamos la primera celda del renglón del paso uno por la segunda celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la segunda celda del paso uno por la primera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del sistema.

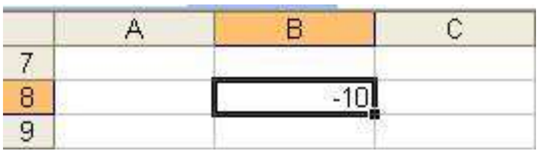
	A	B	C
5			
6		=B2*C4-C2*B4	
7			

	A	B	C
5			
6		-3	
7			

Paso 4

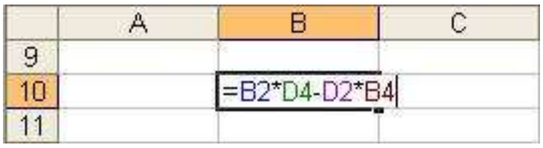
Calculamos la determinante del refresco chico como sigue, multiplicamos la tercera celda del renglón del paso uno por la segunda celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la segunda celda del paso uno por la tercera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del refresco chico.

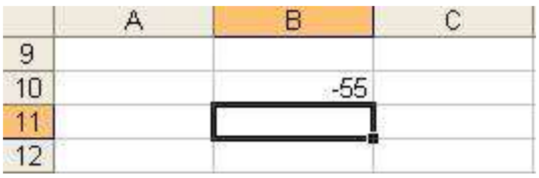




Paso 5

Calculamos la determinante del refresco grande como sigue, multiplicamos la primera celda del renglón del paso uno por la tercera celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la tercera celda del paso uno por la primera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del refresco grande.





Paso 6

Se divide la determinante del paso cuatro entre la determinante del paso tres dando como resultado el precio del refresco chico.

	A	B	C	D	E
11					
12					
13		Refresco chico=		=B8/B6	
14					

	A	B	C	D	E
11					
12					
13		Refresco chico=		3.33333333	
14					

Paso 7

Se divide la determinante del paso cinco entre la determinante del paso tres dando como resultado el precio del refresco grande.

	A	B	C	D	E
14					
15					
16		Refresco grande=		=B10/B6	
17					

	A	B	C	D	E
14					
15					
16		Refresco grande=		18.3333333	
17					

Los valores obtenidos en los pasos seis y siete son el resultado buscado en la presente práctica

RESUMEN

En esta unidad vimos lo que se refiere a las Aplicaciones a través de software (Excel) de los diversos temas vistos a lo largo de las Unidades anteriores, con el fin de poder dar solución de una manera más rápida a problemas diversos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática y su relación con las áreas Contables-Administrativas.

Es útil recordar que Excel también te ofrece las funciones de MMULT, para multiplicación de matrices y MINVERSE para obtener la inversa de una matriz.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Rendón, Araceli y Rodríguez, Jesús	7	153-167

Kolman, Bernard y Hill, David R. (2006).*Algebra lineal* (Octava Edición). México: Pearson Prentice Hall, 648 pp.

Poole, David (2004).*Algebra lineal: Una introducción moderna*. México: Thomson, 763pp.

Howard, Anton (1983). *Introducción al álgebra lineal* (sexta edición). México: Limusa.

Lipschutz, Martin, M. (1982). Procesamiento de datos. México: Mc. Graw Hill, 218 pp.

Lay, David (2004). *Algebra Lineal y sus aplicaciones* (3ª. Ed.). México: Pearson, 492 pp.

Rendón, Araceli y Jesús Rodríguez (1988).*Introducción al álgebra lineal y de matrices. Aplicaciones con Excel.*México: Universidad Autónoma Metropolitana, Xochimilco.

Bibliografía básica

Barrera, G. F. (2014). *Fundamentos de álgebra lineal y ejercicios*. México: UNAM Facultad de Ingeniería.

Barrera, M. F. (2014). *Álgebra lineal*. México: Grupo Editorial Patria.

De Oteyza, E. (2013). *Álgebra*. (4ª ed.) México: Pearson Educación.

Larson, R. (2015). *Fundamentos de álgebra lineal*(7ª ed.). México: Cengage Learning.

Singh, K. (2014). *Algebra lineal: paso a paso*. Oxford: Oxford University Press.

Bibliografía complementaria

Gutiérrez G. E. (2014). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. México: Grupo Editorial Patria.

Kolman, B. (2013). *Álgebra lineal: fundamentos y aplicaciones*. Colombia: Pearson Educación.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal; una introducción moderna*. (3ª ed.) México: Cengage Learning.

Plan 2012 **2016** actualizado