Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Contaduría y Administración
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Licenciatura en Informática

Matemáticas II (Razonamiento Lógico Matemático para la Toma de Decisiones)

SUAyED

COLABORADORES

DIRECTOR DE LA FCA
Dr. Juan Alberto Adam Siade

SECRETARIO GENERAL
L.C. y E.F. Leonel Sebastián Chavarría

– – – –

COORDINACIÓN GENERAL
Mtra. Gabriela Montero Montiel
Jefe de la División SUAyED-FCA-UNAM

COORDINACIÓN ACADÉMICA
Mtro. Francisco Hernández Mendoza
FCA-UNAM

– – –

AUTOR
Mtra. Guadalupe Padilla Alvaréz

DISEÑO INSTRUCCIONAL
L.F. Francisco Vladimir Aceves Gaytán

CORRECCIÓN DE ESTILO
L.F. Francisco Vladimir Aceves Gaytán

DISEÑO DE PORTADAS
L.CG. Ricardo Alberto Báez Caballero
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero
L.DP. Ethel Alejandra Butrón Gutiérrez

DISEÑO EDITORIAL
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero

OBJETIVO GENERAL

Que el alumno domine los fundamentos matemáticos a fin de desarrollar habilidades de razonamiento lógico-matemático que le permitan analizar situaciones hipotéticas y de la vida real para la resolución de problemas. Asimismo, será capaz de acreditar evaluaciones de razonamiento matemático y habilidades cuantitativas.

TEMARIO DETALLADO

(Horas 64)

1. Introducción a las evaluaciones de habilidades cuantitativas	4
2. Solución de problemas y suficiencia de datos	4
3. Fundamentos para el análisis matemático	20
4. Álgebra y tópicos especiales de matemáticas	16
5. Métodos cuantitativos aplicados a los negocios y la toma de decisiones	20

INTRODUCCIÓN

Bienvenido (-a) a la asignatura Razonamiento lógico matemático para la toma de decisiones. En esta asignatura te guiaremos en forma coherente y coordinada para obtener un razonamiento lógico matemático y emplearlo para la toma de decisiones, es decir, para la elección del mejor curso de acción para lograr un objetivo, lo que es justamente una de las actividades propias de tu profesión. Por eso, es muy importante que emplees y desarrolles modelos matemáticos que reflejen una problemática real específica en la que puedas plantear una serie de soluciones factibles para resolverlo.

En la **unidad 1** se encuentran las bases del razonamiento lógico matemático, creación de modelos matemáticos, procedimientos y técnicas de resolución.

En la **unidad 2** se expondrán los métodos para la resolución de problemas junto con la justificación de datos o sea, los pasos necesarios y suficientes para encontrar la solución a problemas en menos tiempo. Por esta razón, serás capaz de crear modelos matemáticos, despejar una o más variables en sistemas lineales, cuadráticos, exponenciales y aplicarás las leyes de los exponentes, la de los logaritmos y de las proporciones.

La **unidad 3** presenta el análisis matemático, que es un conjunto de técnicas que facilitan las comparaciones económicas, contables, físicas o de otra índole.

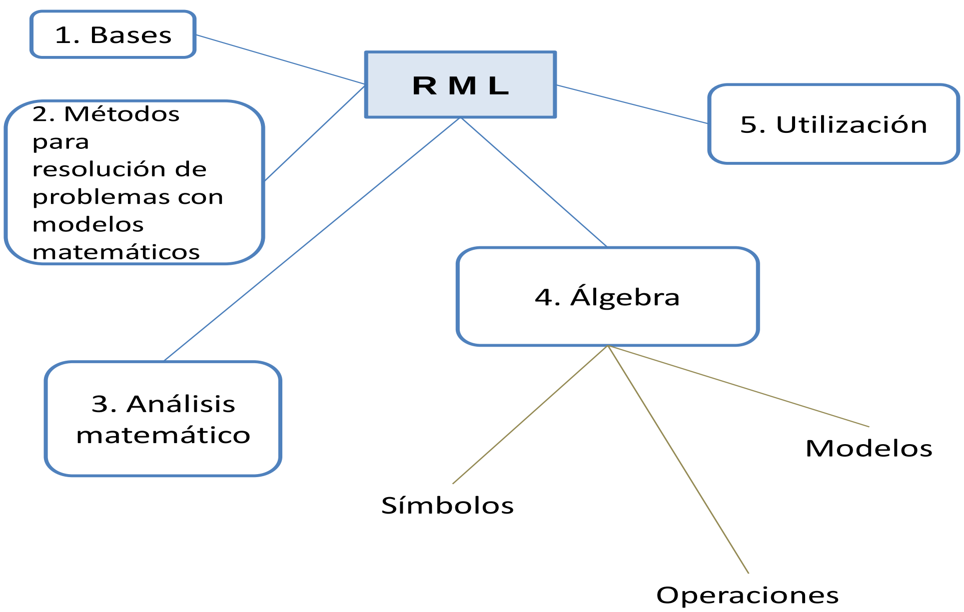
La **unidad 4** se refiere a la utilización de símbolos Algebraicos en las operaciones fundamentales como son la suma, la diferencia, el cociente, la multiplicación, en las desigualdades y las relaciones que estos símbolos en los modelos Algebraicos (polinomios, funciones, ecuaciones de primer grado, segundo, tercero y cuarto grado).

En la **unidad 5** se utilizará el razonamiento lógico matemático para la creación de modelos hipotéticos para su aplicación en condiciones reales. Asimismo, se analizarán las técnicas matemáticas de solución, como por ejemplo: la programación lineal, el método gráfico, el método simplex, los métodos de transporte, el método de asignación y el control de inventarios son muy importantes para la toma de decisiones.

Esperamos que está asignatura te sea de mucha utilidad para la compresión de la Informática, pero sobre todo, para que la puedas aplicar en tu ejercicio profesional con la seguridad de que las matemáticas serán una herramienta útil para la toma de decisiones económicas. ¡Comencemos!

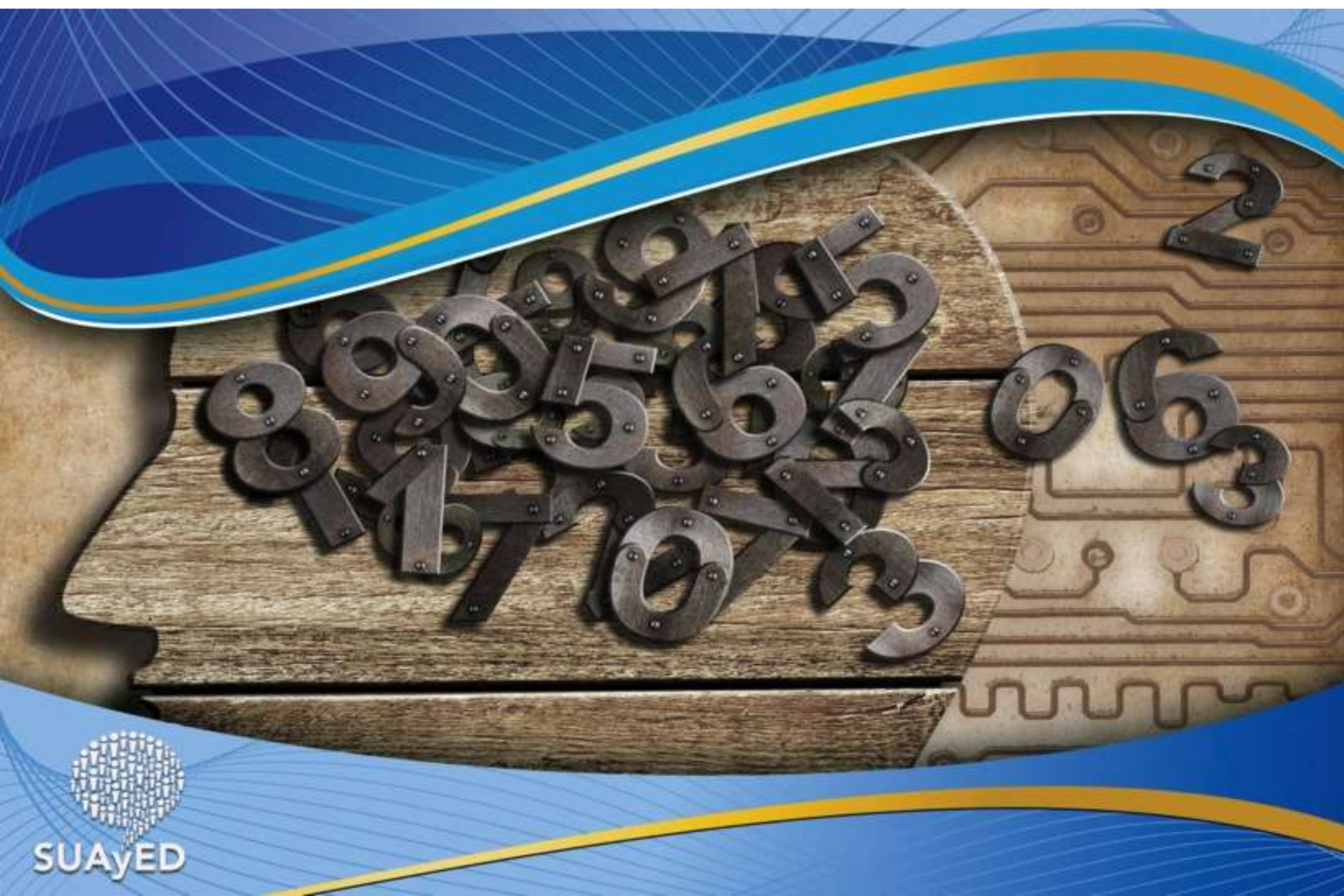
ESTRUCTURA CONCEPTUAL

RAZONAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO (RLM) PARA LA TOMA DE DECISIONES



Unidad 1.

Introducción a las evaluaciones de habilidades cuantitativas



OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno podrá:

- Desarrollar habilidades de comprensión, análisis y razonamiento matemático para la resolución de problemas de la vida real.
- Reforzar y dominar los fundamentos de aritmética, álgebra y geometría.
- Analizar y resolver problemas por medio de la lógica-matemática.
- Aprender a interpretar resultados de modelos matemáticos para sustentar la toma de decisiones.

TEMARIO DETALLADO

(4 horas)

1. Introducción a las evaluaciones de habilidades cuantitativas

1.1. Estructura y funcionamiento de las evaluaciones de habilidades cuantitativas
1.1.1. Estructura de los ejercicios *Problem Solving*
1.1.2. Estructura de los ejercicios *Data Sufficiency*

INTRODUCCIÓN

En tu ejercicio profesional como licenciado en Informática, tendrás que generar información y, estarás tomando decisiones relevantes no sólo para ti, sino para un conjunto de personas y para la organización en que trabajes. Algunas veces, esas decisiones estarán debidamente planeadas, en ocasiones decidirás sobre la marcha del negocio o en situaciones de emergencia. Cualquiera que sea el caso, los modelos matemáticos son tu base~~,~~ pues en ellos puedes plantear los problemas u objetivos y eventualmente desarrollar las formas de solucionarlos, creando escenarios posibles.

Ahora bien, los modelos matemáticos empleados para la toma de decisiones, pueden ahorrarte tiempo y evitar que pruebes alguna solución al azar. Además, te obligan a identificar todas las variables del problema a resolver y manejar con eficiencia los recursos que tengas a tu cargo.

Asimismo, los modelos matemáticos te podrán auxiliar para controlar los resultados de una decisión, fincar responsabilidades y maximizar los beneficios financieros de un negocio.

Por esa razón, en esta primera unidad, estudiarás todo lo relativo a la estructura y funcionamiento de las habilidades cuantitativas que debes poseer para llevar a cabo una excelente planeación y un eficiente control. Analizarás los ejercicios tipo *problem solving*, importantísimos para la resolución de problemas repentinos y complejos, así como los ejercicios *data sufficiency*, en los cuales, la información juega un papel determinante.

1.1. Estructura y funcionamiento de las evaluaciones de habilidades cuantitativas

En la fase de la planeación se establecen las metas y objetivos de la entidad, así como la medición de los resultados y se podría concluir que se está prediciendo el funcionamiento del negocio. Sin embargo, el administrador siempre se enfrentará a situaciones o problemas inesperados que requieran solución rápida o que no tengan solución aparente, para lo cual, se emplea el enfoque de solución de problemas o *problem solving*.

Como se mencionaba en la introducción a este tema, los modelos matemáticos son utilizados como modelos estándar para la resolución de problemas que ayudarán a garantizar que las decisiones sean racionales y lógicas, sobre todo, las que se tomen en situaciones de emergencia.

1.1.1. Problem solving

Para empezar, vamos a aclarar lo que entendemos por la resolución de problemas y qué es la toma de decisiones, así como la manera en que se relacionan entre sí.

- La **resolución de problemas** *(problem solving*) es un conjunto de actividades destinadas a analizar una situación sistemática y generar, implementar y evaluar soluciones.

- La **toma de decisiones** es un mecanismo de elección de alternativas en cada paso de la resolución de problemas de proceso.

La toma de decisiones es parte de la solución de problemas y se produce en cada paso del proceso de resolución de problemas.

¿Cuál es la estructura de los ejercicios o casos *problem solving*?

Un ejercicio o un caso es una especie de problema que se emplean con frecuencia y que hacen referencia a contextos ajenos a las matemáticas propiamente dichas, los que llevan dentro una cierta "historia", que se pueden contar. Sin embargo, la vida real y sobre todo, la profesión de los negocios implica la resolución de problemas más complejos que identifican variables y soluciones precisas que deben ser valuadas a través de las matemáticas.

Por lo tanto, un problema sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverlo es necesario poner en juego conocimientos administrativos, matemáticos, etc., buscando relaciones nuevas entre ellos. Pero además tiene que ser una cuestión que sea importante para la entidad y en la que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzo.

A continuación, se muestran algunos aspectos por considerar al momento de plantear un problema matemático:

- Las situaciones existen en la realidad. Los problemas los distinguimos nosotros. Pasan a ese estatus cuando los asumimos como un reto y decidimos en consecuencia dedicarle tiempo y esfuerzos para procurar resolverlos.

- La resolución de un problema añade algo que ya se conocía; proporciona relaciones nuevas entre lo que ya se sabía o aporta otros puntos de vista de situaciones ya conocidas. Supone el aporte de la chispa de la creatividad, aquella que aparece de vez en cuando, y que logra su cometido.

Una vez que tenemos un problema, los hay mejores y peores, vamos a referirnos a los rasgos que caracterizan a los buenos *problem solving.*

- No son cuestiones con trampas ni acertijos.
- Deben tener aplicaciones.
- Representan un desafío.
- Una vez resueltos apetece proponerlos a otras personas para que a su vez intenten resolverlos.
- Parecen a primera vista algo que se pueda abordar, no nos dejan bloqueados o sin capacidad de reacción.

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución). Pero de ahí no hay que sacar una apreciación ampliamente difundida en la sociedad, a saber: que la única manera de resolver un problema es por "iluminación".

Es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. Son los procesos que se llaman "heurísticos": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas, y hace que sea una facultad, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

Es ya clásica, y bien conocida, la formulación que hizo Pólya (1953) de las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de los ejercicios *problem solving*:

1. Comprender el problema.
2. Trazar un plan para resolverlo
3. Poner en práctica el plan
4. Comprobar los resultados

Dentro de las líneas de desarrollo de las ideas de Pólya, Schoenfeld da una lista de técnicas heurísticas de uso frecuente, que agrupa en tres fases, y que extractamos:

Análisis

1. Trazar un diagrama.
2. Examinar casos particulares.
3. Probar a simplificar el problema.

Exploración

1. Examinar problemas esencialmente equivalentes.
2. Examinar problemas ligeramente modificados.
3. Examinar problemas ampliamente modificados.

Comprobación de la solución obtenida

a. ¿Verifica la solución los criterios específicos siguientes?
 ¿Utiliza todos los datos pertinentes?
 ¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?
 ¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?

b. ¿Verifica la solución los criterios generales siguientes?
 ¿Es posible obtener la misma solución por otro método?
 ¿Puede quedar concretada en casos particulares?
 ¿Es posible reducirla a resultados conocidos?
 ¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?

Finalmente, se hace una recopilación de las estrategias más frecuentes que se suelen utilizar en la resolución de problemas:

Ensayo-error

- Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.
- Manipular y experimentar manualmente.
- Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).
- Experimentar y extraer pautas (inducir).
- Resolver problemas análogos (analogía).
- Seguir un método (organización).
- Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación).
- Hacer recuente (conteo).

- Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, Algebraico, gráfico, numérico (codificar, expresión, comunicación).
- Cambio de estados.
- Sacar partido de la simetría.
- Deducir y sacar conclusiones.
- Conjeturar.
- Analizar los casos límite.
- Reformular el problema.
- Suponer que no (reducción al absurdo).
- Empezar por el final (dar el problema por resuelto).

Algunos de los problemas más antiguos que se conocen son de tipo aritmético. Es típico que se pida hallar una cantidad determinada por ciertas condiciones, o bien cumpliendo ciertos requisitos.

El siguiente problema pertenece a esta categoría.

Diofanto fue un notable matemático griego que desarrolló su actividad en Alejandría en el siglo III A.C. y del cual se conservan muy pocos datos biográficos. Sin embargo se dice que su epitafio contenía la siguiente inscripción:

Caminante: aquí yacen los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar cuán larga fue su vida, cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.

Había transcurrido además, una duodécima parte cuando sus mejillas se cubrieron de vello. Luego de una séptima parte se casó, y transcurrido un quinquenio le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito, cuya existencia duró tan sólo la mitad de la de su padre.

Luego de cuatro años buscando consuelo en la ciencia de los números, descendió Diofanto a la sepultura.

¿Qué edad alcanzó Diofanto?
¿A qué edad se casó?
¿Cuántos años vivió su hijo?

Veamos si comprendemos bien el problema. ¿Cuál es la incógnita? El número de años que vivió Diofanto (las preguntas restantes se responden fácilmente conociendo la respuesta a la primera).

¿Cuáles son los datos? Una serie de informaciones sobre las etapas sucesivas de su vida, desde su infancia hasta su muerte.

Ahora debemos concebir un plan. ¿Te has encontrado con un problema semejante? Es de esperar que sí, ya que la mayoría de los problemas resueltos por métodos algebraicos elementales son semejantes.

El plan general consiste en escribir ecuaciones que reflejen las condiciones planteadas, resolver el sistema resultante e interpretar las soluciones obtenidas en el contexto original del problema.

Llamemos x al número de años vividos por Diofanto. Esta cantidad debe ser igual a la suma de las duraciones de las etapas de su vida, a saber: su infancia (x=6), la duodécima parte transcurrida hasta que le salió barba (x=12), los años transcurridos hasta que contrajo matrimonio (x=7), los años transcurridos hasta que nació su primogénito (5), los años que éste vivió (x=2) y los 4 años que Diofanto le sobrevivió.

Por lo tanto escribimos:

$$x = x/6+ x/12+ x/7+ x/5 + x/2+ 4$$

El resultado es 42 años

1.1.2. Data Sufficiency

Los ejercicios de suficiencia de datos sirven para poner a prueba tu capacidad de "razonar cuantitativamente". Esto está en contraste con la solución de problemas, que está diseñada para evaluar qué tan bien se manipulan números. Si te encuentras haciendo un montón de cálculos numéricos sobre las cuestiones de suficiencia de datos, estarás haciendo algo incorrecto.

Además del empleo de la aritmética básica, en estos ejercicios puedes esperar preguntas que pongan a prueba tu conocimiento de los promedios, fracciones, decimales, álgebra, factorización, y los principios básicos de la geometría, como triángulos, círculos, y la forma de determinar las áreas y volúmenes de formas geométricas simples (cuadrados, rectángulos, círculos, etc.)

En la Informática, el planteamiento de problemas de suficiencia de datos es de gran importancia, ya que requiere que pongas en acción los conocimientos que vas adquiriendo y los plasmes como una solución matemática.

En la siguiente unidad podrás resolver algunos ejercicios de *problem solving* y *suficiencia de datos*.

RESUMEN

En esta unidad hemos estudiado la importancia que tienen los modelos matemáticos para la informática, como una base para el desarrollo de esta profesión, pues se pueden plantear todos los problemas y objetivos en términos numéricos. En especial, los modelos matemáticos son muy útiles para la planeación.

La planeación implica establecer la misión, objetivos y las estrategias del negocio. En este sentido, se necesita de un cúmulo de información y de modelos que sinteticen lo que se espera del futuro. Es aquí en donde hacen su entrada los modelos matemáticos y la expresión numérica explica a la perfección los resultados probables.

Aquí se estudió el razonamiento matemático, que no es otra cosa que la lógica al formular modelos y al resolverlos, pero además, esta lógica consiste en interpretar los resultados y darles un sentido práctico.

Primeramente analizamos los ejercicios *problem solving* o resolución de problemas, los cuales se caracterizan por incluir una serie de variables en el modelo y obtener un solo resultado probable. También se mencionó que este tipo de ejercicios ayuda al licenciado en Administración en la resolución de problemas inesperados.

Posteriormente se habló de los ejercicios de suficiencia de datos (*data Sufficiency)* en los cuales se pueden obtener varios resultados a partir de dos condicionantes o criterios. En este tipo de ejercicio se pone de manifiesto, el conocimiento que adquiere el licenciado en Informática tanto de los modelos, como de las circunstancias en las que se diseñan.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Arya (2009)	1.	1-58
Kowalsky (1989)	1.	7-30

Arya, J.C. y R.W. Lardner. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. (5ª ed.) México: Prentice-Hall.

Kowalsky, Robert. (1989). *Lógica, programación e inteligencia artificial.* Madrid: Díaz de Santos.

Unidad 2.

Solución de problemas y suficiencia de datos

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno podrá analizar y resolver problemas por medio de la lógica-matemática.

TEMARIO DETALLADO

(4 horas)

2. Solución de problemas y suficiencia de datos

2.1	Análisis, comprensión y resolución de ejercicios *Problem Solving*
2.2	Análisis, comprensión y resolución de ejercicios de suficiencia de datos (Data *Sufficiency*)

INTRODUCCIÓN

Resolver problemas de matemáticas es una de las herramientas fundamentales de las sociedades avanzadas, en cuyo aprendizaje las escuelas invierten buena parte de su tiempo y esfuerzo. Podría considerarse, junto a la lectura, una de las capacidades que se han tratado de universalizar. Sin embargo, con frecuencia se conocen indicadores que señalan que las personas muestran un nivel bajo en matemáticas en general así como en resolución de problemas.

¿Cuáles pueden ser los motivos de este preocupantemente bajo nivel de rendimiento? Uno de los motivos podría ser que a pesar de que esta tarea pudiera parecer relativamente sencilla desde el punto de vista del conocimiento, los procesos implicados en la resolución de problemas matemáticos son muchos y muy complejos. Otro motivo, estrechamente relacionado con el anterior, podría ser que en las clases o en los cursos de capacitación se presentan los problemas de matemáticas de una manera muy dirigida, limitando el proceso de resolución en sus aspectos estrictamente matemáticos, de manera que potencia el desarrollo de los procesos vinculados a los conocimientos estrictamente matemáticos a la vez que relega otros, relacionados con la aplicación de otros tipos de conocimiento y que en ocasiones son igualmente importantes.

En esta unidad queremos presentarte los problemas de matemáticas como una tarea de aplicación de conocimientos no sólo matemáticos, sino también sobre el mundo real de los negocios y de sentido común, que son necesarios para una comprensión genuina de la situación descrita por el problema y para la toma de decisiones.

Entonces, el objetivo de esta unidad es doble. Por un lado, revisaremos los modelos de resolución de problemas (*problem solving*) que incluyen esta comprensión situacional como parte del proceso de resolución, y la suficiencia de datos (*Data Sufficiency*), los cuales marcan la aplicación de conocimientos y la correcta interpretación de los resultados.

2.1. Análisis, comprensión y resolución de ejercicios Problem Solving

Antes de comenzar, es indispensable indicarte que los ejercicios de *problem solving* y *data sufficiency* requieren de conocimientos técnicos en Álgebra elemental, aritmética y geometría. En lo que queremos hacer énfasis es en el planteamiento de estos problemas y la aplicación de los conocimientos administrativos.

Para aprender a resolver problemas, a lo largo de su trayectoria profesional, el administrador habrá de enfrentarse a diferentes tareas matemáticas. Para resolver algunas de ellas necesitará conocimientos exclusivamente matemáticos, mientras que para resolver otras, además de esos conocimientos administrativos, e información acerca del mundo real, adquiridos a través de su experiencia. De esta manera, los problemas matemáticos que los administradores deben resolver en las tareas habituales pueden clasificarse en función de la relevancia que adquiere para resolverlos.

Veamos cómo se plantean los problemas y la solución a los mismos:

¿Cuántos minutos faltan para el mediodía, si hace 8 minutos faltaban 9/5 de lo que falta ahora?

Si llamamos x a los minutos que faltan para el mediodía, entonces:

$$x + 8 = (9/5)x$$

por tanto $x = 10$

Halla las soluciones reales del sistema de ecuaciones siguiente:

$$x + y = 1$$

$$x^5 + y^5 = 31$$

Por ejemplo, estas ecuaciones pueden representar una combinación de productos, o de procesos, o puede tratarse de dos zonas geográficas.

Divida la segunda ecuación entre la primera y trate de llegar a una ecuación de segundo grado en *xy*. La solución es:

$x = 2$,

$y = -1$

$x = -1$

$y = 2$

2.2. Análisis, comprensión y resolución de ejercicios de suficiencia de datos (Data Sufficiency)

Como habíamos comentado en la unidad anterior, estos problemas implican la aplicación de conocimientos y las respuestas se encuentran condicionadas a los datos disponibles en el planteamiento. Estos ejercicios están generalmente compuestos por un problema y dos premisas que contienen datos aclaratorios para poder resolver el problema. Deberás analizar el problema y las dos premisas para elegir qué opción es suficiente para resolverlo.

Las opciones entre las que deberás elegir son:

a) Si SOLO la premisa (1) es suficiente, pero la premisa (2) solamente no es suficiente para resolver el problema.

b) Si SOLO la premisa (2) es suficiente, pero la premisa (1) solamente no es suficiente para resolver el problema.

c) Si AMBAS premisas (1) y (2) JUNTAS son suficientes para resolver el problema, pero NINGUNA considerada en forma individual lo es.

d) Si CADA premisa considerada en forma INDIVIDUAL puede resolver el problema.

e) Si las premisas JUNTAS (1) y (2) NO son suficientes para resolver el problema y se necesitan datos adicionales.

En estos ejercicios no se te pide entonces un valor sino que analices los datos dados; deberás determinar si tienes información suficiente para resolver el problema.

Las estrategias básicas para hacer frente a los problemas de suficiencia de datos son los siguientes:

- Conoce las opciones de respuesta
- Procura mantener los datos independientes
- Simplifica la cuestión y los datos
- Evita cálculos innecesarios
- Utiliza un proceso de eliminación
- Conoce el "trampas"

Ejemplo

Un carro fue vendido originalmente en $3,000.00. Después de un mes, el valor del carro disminuyó en un x%. Posteriormente, en el siguiente mes, el precio del carro disminuyó y%.

¿El precio del carro después de estas disminuciones, asciende a menos de $2,600?

(1) y= 10

(2) x= 15

1. Si SOLO la premisa (1) es suficiente, pero la premisa (2) solamente no es suficiente para resolver el problema.
2. Si SOLO la premisa (2) es suficiente, pero la premisa (1) solamente no es suficiente para resolver el problema

3. Si AMBAS premisas (1) y (2) JUNTAS son suficientes para resolver el problema, pero NINGUNA considerada en forma individual lo es.
4. Si CADA premisa considerada en forma INDIVIDUAL puede resolver el problema.
5. Si las premisas JUNTAS (1) y (2) NO son suficientes para resolver el problema y se necesitan datos adicionales.

Solución

La primera premisa no es suficiente para resolverlo, porque sabiendo que el segundo descuento es de 10%, si el primero fuese del 1%, no sería menor a $2600; en cambio si fuera mayor, sí llegaría a menos de ese valor.

Con la segunda premisa sí se puede resolver porque al aplicar ese primer descuento, el precio del auto ya se va por debajo de $2600, de modo que no interesa qué descuento se le aplique después.

Por lo tanto la respuesta es 2.

RESUMEN

En la presente unidad, hemos estudiado la manera en que se resuelven los ejercicios de *problem solving* y *data sufficiency*, revisando algunas características de ambos.

Para los ejercicios de *problem solving*, es necesario establecer un modelo matemático que represente la realidad de alguna situación empresarial que se tenga que resolver, ya que una función principal de la administración consiste en resolver problemas. El mundo real, físico y social, en el que vivimos, nos presenta toda suerte de enigmas, acertijos, límites, dilemas, cuestionamientos, obstáculos e impedimentos, todo lo cual es necesario sortear para continuar con la operación, en este caso, de un negocio.

Como primer paso de la resolución de un problema, debemos encontrar la manera de describir, explicar o aún predecir la parte de la realidad en la que reside el problema. Lo que podrás notar al principio y que tratamos en esta unidad, es que nuestro juicio se va desarrollando dentro de nuestra mente y que no podemos introducir porciones importantes de la realidad en nuestra cabeza. Y, puesto que la realidad permanece en el exterior, lo único que podemos hacer es crear ideas o pensamientos acerca de la realidad. Así pues, nuestros pensamientos son abstracciones de la realidad que pueden plasmarse en un modelo, que puede ser matemático.

Para poder resolver este problema o este modelo, necesitamos una serie de datos que se concentraran en una sola respuesta o solución, que ese es el centro de estudio para la resolución de ejercicios de *problem solving*.

Respecto a los ejercicios de *data sufficiency*, que también son modelos matemáticos y que también requieren de información, la solución está dada por una serie de condicionantes que hacen que el razonamiento lógico llegue a todo su esplendor, ya que lo que analizamos al resolverlos no es el resultado en sí, sino que los datos sean suficientes para darle respuesta a un cuestionamiento.

Así, hemos dejado evidentes las características de estos ejercicios y la forma en que deben solucionarse. En la siguiente unidad estudiaremos las premisas o fundamentos matemáticos en los que descansan los modelos matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Arya (2009)	1.	1-58
Kowalski (1989)	1.	7-30
	9.	247-264
Wayne (2005)	1.	1-10

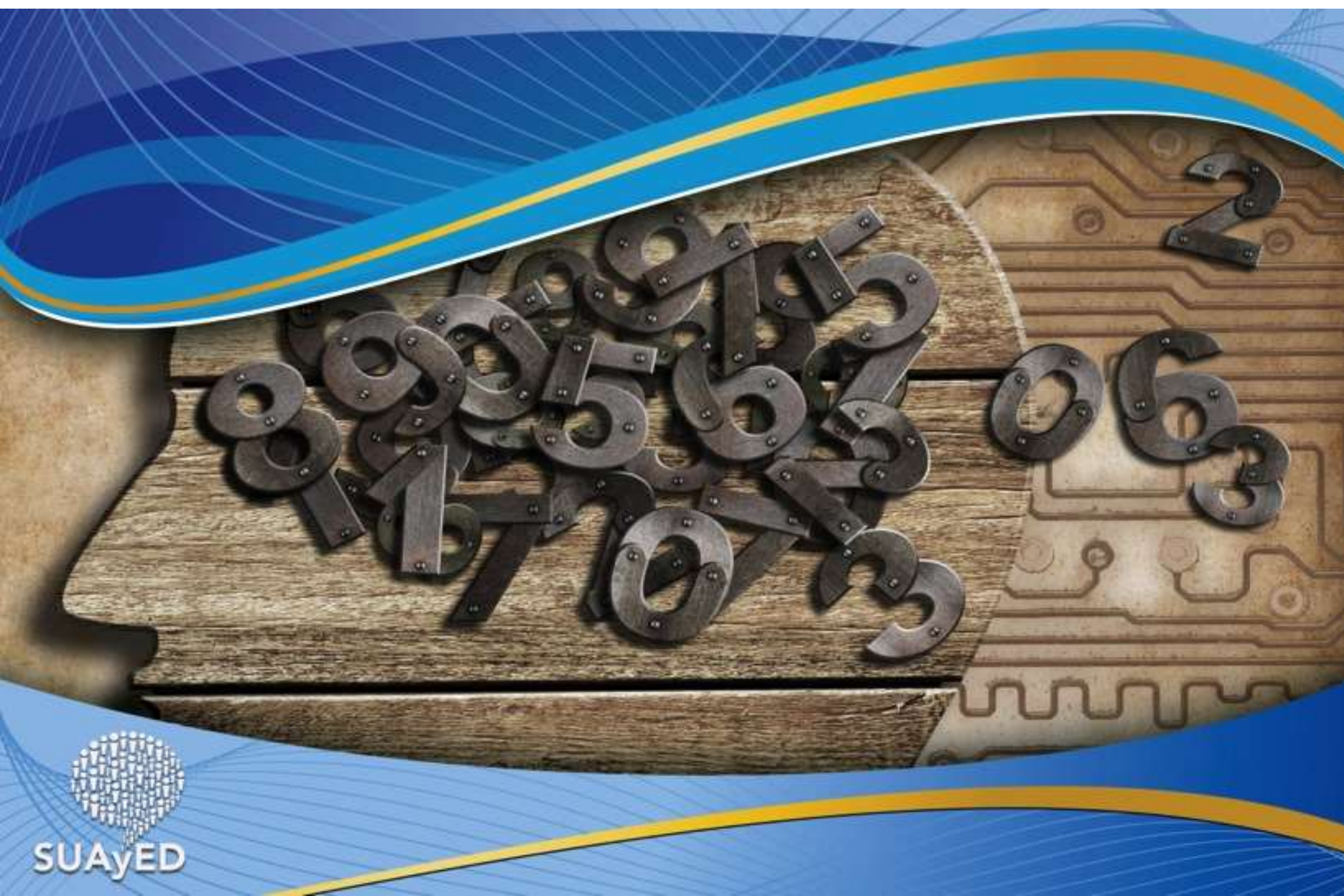
Arya, J.C. y R.W. Lardner. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. (5ª ed.) México: Prentice-Hall.

Kowalski, Robert. (1989). *Lógica, programación e inteligencia artificial.* Madrid: Díaz de Santos.

Wayne, Winston. (2005). *Investigación de operaciones, aplicaciones y algoritmos*. México: Thompson.

Unidad 3.

Fundamentos para el análisis matemático



OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno podrá identificar y poner en práctica, los fundamentos del análisis matemático para la resolución de problemas y la suficiencia de datos.

TEMARIO DETALLADO

(20 horas)

3. Fundamentos para el análisis matemático

- 3.1. Principios del análisis aritmético
  - 3.1.1. Resolución de ejercicios *Problem Solving* y *Data Sufficiency* con:
    - 3.1.1.1.Propiedades de los números
    - 3.1.1.2.Fracciones y decimales
    - 3.1.1.3. Escalas y proporciones
    - 3.1.1.4. Exponentes y radicales
- 3.2 Principios del análisis Algebraico
  - 3.2.1 Resolución de ejercicios *Problem Solving* y *Data Sufficiency* con:
    - 3.2.1.1. Simplificación Algebraica, polinomios y factorización
    - 3.2.1.2. Ecuaciones lineales, inecuaciones, sistemas de ecuaciones y ecuaciones cuadráticas
- 3.3 Principios del análisis geométrico
  - 3.3.1 Resolución de ejercicios *Problem Solving* y *Data Sufficiency* con:
    - 3.3.1.1. Líneas, ángulos, áreas y perímetros
    - 3.3.1.2. Triángulos, polígonos y circunferencias

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas se rigen por una serie de principios que comprueban la realidad de algo tangible o de algún evento. En la Administración, y por ende, en la informática, el conocimiento de estos principios es fundamental para el planteamiento de problemas y modelos matemáticos.

Ahora que hemos llegado al punto de concentrar nuestra atención en los modelos matemáticos, es necesario preguntarse ¿cómo se plantean?, ¿qué reglas deben seguirse para que representar a la realidad?

Estas reglas se encuentran concentradas en las ramas de las matemáticas, esencialmente en la aritmética, Álgebra y geometría.

Para entender de primera vista lo anterior, es necesario clasificar los tipos de modelos matemáticos:

a) **Modelos cuantitativos**. Consiste en construir modelos con símbolos y variables que representan números.

b) **Modelos cualitativos**. Representaciones de la realidad en la que la mayor parte de las variables o símbolos son de carácter cualitativo o no-numéricos, como es el caso de la teoría de conjuntos.

c) **Modelos probabilísticos**. Son los que están basados en la estadística y probabilidad, en los cuales introducimos los riesgos que por lo general acompañan nuestras observaciones de acontecimientos o eventos reales.

d) **Modelos determinados**. Es el modelo matemático que considera probabilidades.

e) **Modelo confeccionado**. Se emplea para describir las fórmulas matemáticas estándares para los problemas que se enseñan en las escuelas como técnicas y mediante los cuales todo lo que se necesita es sustituir los valores para obtener una respuesta. Este es el caso de los ejercicios *problem solving*.

f) **Modelo hecho a la medida**. Es aquel que se construye sin tener ninguna fórmula estándar que se ajuste con exactitud a su problema y se procede a fabricar una fórmula específicamente adaptada al caso. Esta es la característica fundamental de los problemas de *data sufficiency.*

g) **Modelos descriptivos**. Se emplean como su nombre lo indica, para describir una situación en el mundo real en términos matemáticos. Esta descripción puede utilizarse para exponer una situación con mayor claridad.

h) **Modelo optimizador**. Es el ideado específicamente para elegir entre muchas alternativas, de acuerdo con ciertos criterios, que forman parte del modelo.

Toda vez que hemos hecho este recuento de los tipos de modelos matemáticos que existen, podemos proceder a analizar sus componentes o reglas.

En la presente unidad, estudiaremos todo lo relacionado con el análisis matemático. Iniciaremos con análisis aritmético (comportamientos lineales), análisis Algebraico (ecuaciones) y después estudiaremos el análisis geométrico (comportamientos exponenciales).

3.1. Principios del análisis aritmético

Para comenzar, hay que definir lo que es el análisis matemático:

El análisis matemático es una rama de las matemáticas que estudia los números reales, los complejos y sus funciones. Se empieza a desarrollar a partir del inicio de la formulación rigurosa del cálculo y estudia conceptos como la continuidad, la integración y la diferenciación de diversas formas.

Dentro del análisis matemático está el análisis aritmético que se refiere a las propiedades de los números reales y las operaciones fundamentales.

Propiedades de los números reales

Un número real es un número racional o irracional que consta de todos los decimales.

Los números 1, 2, 3, etc., reciben el nombre de *números naturales*. Con ellos se realizan dos operaciones, la *suma* de números naturales y el *producto* de números naturales, que dan como resultado otro número natural perfectamente definido. Para dos números naturales cualesquiera *m* y *n*, su suma suele representarse por *m*+*n* y su producto por *m*·*n* o *mn* (si no hay lugar a confusión). Si denotamos con N el conjunto de todos los números naturales, podemos pensar en la suma y el producto como aplicaciones del producto cartesiano N×N en N:

+ : N×N ″ N, · : N×N ″ N.

(*m*,*n*) " *m*+*n* (*m*,*n*) " *m*·*n*

Hay cuatro propiedades básicas de los números: conmutativa, asociativa, distributiva, y de identidad. Deberás familiarizarse con cada una de éstas. Es especialmente importante comprender estas propiedades una vez que se llegue a la matemática avanzada y al cálculo.

Propiedad Conmutativa

a) **Suma**. Cuando dos números se suman, la suma es la misma sin importar el orden en el cual los números son sumados.

$$3 + 5 = 8 \quad ó \quad 5 + 3 = 8$$

b) **Multiplicación**. Cuando dos números son multiplicados juntos, el producto es el mismo sin importar el orden de los factores.

$$3 \times 5 = 15 \quad ó \quad 5 \times 3 = 15$$

Propiedad Asociativa

a) **Suma**. Cuando se suman tres o más números, la suma es la misma sin importar el modo en el que los números son agrupados.

$$6 + (4 + 3) = 13 \quad ó \quad (6 + 4) + 3 = 13$$

b) **Multiplicación**. Cuando se multiplican tres o más números, el producto es el mismo sin importar la manera en la que se agrupan los números.

$$6 \times (4 \times 3) = 72 \quad ó \quad (6 \times 4) \times 3 = 72$$

Propiedad Distributiva

La suma de dos números multiplicada por un tercer número es igual a la suma de cada sumando multiplicado por el tercer número.

$$5 \times (7 + 2) = 45 \quad ó \quad 5 \times 7 + 5 \times 2 = 45$$

Propiedad de Identidad

a) **Suma**. La suma de cualquier número y cero da como resultado el mismo número.

$$12 + 0 = 12$$

b) **Multiplicación**, El producto de cualquier número y uno da como resultado ese mismo número.

$$18 \times 1 = 18$$

El saber estas propiedades de los números te ayudará a mejorar tu entendimiento y dominio de la matemática.

A continuación describimos las propiedades fundamentales de estas operaciones (m, n, p representan números naturales cualesquiera):

- Propiedad **asociativa** de la suma: $(m+n)+p = m+(n+p)$.
- Propiedad **conmutativa** de la suma: $m+n = n+m$.
- Propiedad **asociativa** del producto: $(mn)p = m(np)$.
- Propiedad **conmutativa** del producto: $mn = nm$.
- Elemento neutro (**identidad**) para el producto: hay un número natural, que denotamos por 1, tal que $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.
- Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $m(n+p) = mn+mp$.

Se puede asimismo comparar el tamaño de dos números naturales cualesquiera y establecer así una relación de orden en N. Suele escribirse m #n para indicar que m es **menor o igual que** n (o lo que es lo mismo, que n es **mayor o igual que** m, lo que también se escribe n $ m); y se escribe $m < n$ (o $n > m$) para expresar que m es **estrictamente menor que** n, es decir, que m es menor (y distinto) que n.

Esta relación cumple las siguientes propiedades (m, n, p representan números naturales cualesquiera):

- Propiedad **reflexiva**: m # m.
- Propiedad **antisimétrica**: si m # n y n # m, entonces m = n.
- Propiedad **transitiva**: si m # n y n # p, entonces m # p.
- Propiedad **de orden total**: siempre es m # n o n # m.

La ordenación de N no es independiente de la suma y el producto: para dos números naturales m, n se tiene m > n si y solo si m = n+ p para algún número natural p.

Principio de buena ordenación. Todo conjunto no vacío de números naturales posee un elemento mínimo, es decir, dado S % N no vacío, existe un elemento m en S tal que m # n para todo n & S.

El **principio de inducción**. Esta es una de las propiedades de N que más vamos a usar durante el curso. Se puede enunciar así:

- *Si un conjunto de números naturales contiene a 1 y por cada elemento n del conjunto también n+1 pertenece a él, entonces el conjunto es N. Es decir, dado S % N tal que 1 & S y n+1 & S siempre que n & S, es S = N.*

En la práctica, el principio de inducción suele aplicarse en términos de propiedades más que en términos de conjuntos:

- *Supongamos que para cada número natural n se tiene una propiedad Pn que puede ser cierta o falsa. Supongamos además que:*

a) P1 es cierta;
b) si para algún n & N la propiedad Pn es cierta, entonces la propiedad Pn+1 también es cierta.

Entonces, Pn es cierta para todo n & N.

La siguiente variante se llama **principio de inducción completa**:

• *Supongamos que para cada número natural n se tiene una propiedad Pn que puede ser cierta o falsa. Supongamos además que:*

a) P1 es cierta;
*b) si para algún n &*N *todas las propiedades P1, P*2,*. . ., Pn son ciertas, entonces Pn*+1 *también es cierta.*

Entonces, Pn es cierta para todo n & N*.*

Es un hecho notable, señalado por el matemático italiano Peano[1] en su obra *Arithmetices principia nova methodo exposita*: todas las propiedades de los números naturales pueden deducirse de las siguientes, llamadas en su honor **axiomas de Peano** para los números naturales:

• *Para todo número natural n existe otro número natural, ns, que se llama* siguiente *o* sucesor *de "n".*

• *Existe un número natural, que denotamos por 1, tal que ns '= 1 cualquiera que sea el número natural "n".*

Fracciones y decimales, escalas y proporciones
Una fracción es el cociente de dos números enteros a y b, que representamos de la siguiente forma:

a/b

[1] Giuseppe Peano (Cuneo, actual Italia, 1858-Turín, 1932) Matemático italiano.

En donde: “b”, *denominador*, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad. Mientras que “a”, numerador, indica el número de unidades fraccionarias elegidas.

Un todo se toma como unidad. La fracción expresa un valor en relación con ese todo. Por ejemplo, un tanque contiene 2/3 de gasolina. El todo: el depósito. La unidad equivale a 3/3, en este caso; pero en general sería una fracción con el mismo número en el numerador y el denominador. 2/3 de gasolina expresa la relación existente entre la gasolina y la capacidad del depósito. De sus tres partes dos están ocupadas por gasolina.

También podemos definir a la fracción como cociente:

Repartir $4.00 entre 5 amigos.

$4.00 /5 amigos = $0.8

La fracción también puede emplearse como operador. Para calcular la fracción de un número, multiplicamos el numerador por el número y el resultado lo dividimos por el denominador. Calcular los 2/3 de $60.00. = $40.00

La fracción como razón y proporción. Cuando comparamos dos cantidades de una magnitud, estamos usando las fracciones como razones. Así, cuando decimos que la proporción entre chicos y chicas en el Instituto es de 3 a 2, estamos diciendo que por cada 3 chicos hay 2 chicas, es decir, que de cada cinco estudiantes, 3 son chicos y 2 son chicas.

Un caso particular de aplicación de las fracciones como razón son los porcentajes, ya que éstos no son más que la relación de proporcionalidad que se establece entre un número y 100 (tanto por ciento), un número y mil (tanto por mil) o un número y uno (tanto por uno). Luís compra una camisa por $35, le hacen un descuento del 10%. ¿Cuánto pagará por la camisa? $31.5

Clasificación de fracciones

a) Fracciones propias

Las fracciones propias son aquellas cuyo numerador es menor que el denominador. Su valor comprendido entre cero y uno

b) Fracciones impropias

Las fracciones impropias son aquellas cuyo numerador es mayor que el denominador. Su valor es mayor que 1.

c) Número mixto

El número mixto o fracción mixta está compuesto de una parte entera y otra fraccionaria. Para pasar de número mixto a fracción impropia, se deja el mismo denominador y el numerador es la suma del producto del entero por el denominador más el numerador, del número mixto.

Para pasar una fracción impropia a número mixto, se divide el numerador por el denominador. El cociente es el entero del número mixto y el resto el numerador de la fracción, siendo el denominador el mismo.

d) Fracciones unitarias

Las fracciones unitarias tienen el numerador igual al denominador.

e) Fracciones decimales

Las fracciones decimales tienen como denominador una potencia de 10.

f) Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes cuando el producto de extremos es igual al producto de medios.

a y d son los extremos; b y c, los medios. Calcula si son equivalentes las fracciones:

12 = 6 ·8 48 = 48

Si se multiplica o divide el numerador y denominador de una fracción por un número entero, distinto de cero, se obtiene otra fracción equivalente a la dada. Al primer caso le llamamos *ampliar* o *amplificar*.

Simplificar una fracción es transformarla en una fracción equivalente más simple. Para simplificar una fracción dividimos numerador y denominador por un mismo número. Empezaremos a simplificar probando por los primeros números primos: 2, 3, 5, 7, etc. Es decir, probamos a dividir numerador y denominador entre 2 mientras se pueda, después pasamos al 3 y así sucesivamente. Se repite el proceso hasta que no haya más divisores comunes. Si los términos de la fracción terminan en ceros, empezaremos quitando los ceros comunes finales del numerador y denominador. Si el número por el que dividimos es el máximo común denominador del numerador y denominador llegamos a una fracción irreducible.

g) Fracciones irreducibles

Las fracciones irreducibles son aquellas que no se pueden simplificar, esto sucede cuando el numerador y el denominador son primos entre sí.

Reducción de fracciones a común denominador

Reducir varias fracciones a común denominador consiste en convertirlas en otras equivalentes que tengan el mismo denominador. Para ello: Se determina el denominador común, que será el mínimo común múltiplo de los denominadores. Este denominador común, se divide por cada uno de los denominadores, multiplicándose el cociente obtenido por el numerador correspondiente.

12 = 22 ·3 9 = 32 m.c.m.(3. 12. 9) = 22 ·32 = 36

Ordenar fracciones

Fracciones con igual denominador

De dos fracciones que tienen el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador.

Fracciones con igual numerador

De dos fracciones que tienen el mismo numerador es menor el que tiene mayor denominador.

Con numeradores y denominadores distintos

En primer lugar las tenemos que poner a común denominador.

Números racionales

Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero.

Representación de números racionales

Los números racionales se representan en la recta junto a los números enteros. Para representar con precisión los números racionales:

1. Tomamos un segmento de longitud la unidad.
2. Trazamos un segmento auxiliar desde el origen y lo dividimos en las partes que deseemos.
3. Unimos el último punto del segmento auxiliar con el extremo del otro segmento y trazamos segmentos paralelos en cada uno de los puntos, obtenidos en la partición del segmento auxiliar.

Multiplicación de fracciones

La multiplicación de dos fracciones es otra fracción que tiene: Por numerador el producto de los numeradores. Por denominador el producto de los denominadores.

División de fracciones

La división de dos fracciones es otra fracción que tiene: Por numerador el producto de los extremos. Por denominador el producto de los medios.

Potencias de fracciones

Potencias de exponente entero y base racional. Algunas reglas que se siguen son:

a) **Producto de potencias con la misma base**. Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes.
b) **División de potencias con la misma base**. Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.
c) **Potencia de una potencia**. Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.
d) **Producto de potencias con el mismo exponente**. Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases
e) **Cociente de potencias con el mismo exponente**. Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases.

Operaciones combinadas con fracciones

1. Pasar a fracción los números mixtos y decimales.
2. Calcular las potencias y raíces
3. Efectuar las operaciones entre paréntesis, corchetes y llaves.
4. Efectuar los productos y cocientes.
5. Realizar las sumas y restas.

Como hemos visto, de las fracciones y decimales se desprende el estudio de la escala y la proporción.

El término de *escala* alude al tamaño de un objeto comparado con un estándar de referencia o con el de otro objeto.

La *proporción* se refiere a la justa relación de una parte con otras o con el todo.

Proporciones

Cuando comparemos 2 magnitudes mediante una división diremos que esas 2 magnitudes se encuentran en una razón. Por ejemplo, sean "a" y "b" dos cantidades, entonces una razón entre a y b es:

$$a:b = ab$$

y lo leeremos "a" es a "b":

Supongamos que se realizó una encuesta entre los jóvenes entre 18 y 21 años cuya conclusión es: "1 de cada 5 jóvenes está inscrito en el Registro Electoral". Entonces, podemos decir que la razón entre los que votan y el total de jóvenes es 1:5. También podemos decir que la razón entre los que votan y los que no, es 1:4.

Como vimos antes, ya que las razones son números racionales, entonces podemos amplificarla y simplificarla como nosotros queramos mientras se mantenga la razón.

Cuando tengamos 2 razones igualadas diremos que tenemos una proporción entre ambas razones. Por ejemplo, sean a; b; c y d cuatro magnitudes, entonces una proporción entre ambas razones es

$$ab = cd$$

Y lo leeremos "a" es a "b" como "c" es a "d":

Veámoslo con un ejemplo. Se sabe que x es a 10 como 12 es a 15, entonces x=?

Aplicando lo anterior, podemos resumir el problema en la igualdad

$$x:10 = 12:15$$

$$x = 12.50$$

Exponentes y radicales

Un **radical** es equivalente a una **potencia de exponente fraccionario** en la que el **denominador** de la fracción es el **índice** del radical y el **numerador** de la fracción es el **exponente** el radicando.

Si “n” es un entero positivo, la notación exponencial a^n, representa el **producto** del **número** real “a” multiplicado “n” veces por sí mismo. La expresión a^n se lee “a” a la enésima **potencia** o simplemente “a” a la “n”. El entero positivo se llama exponente y el número real a, **base**. Entonces podemos generalizar: (recordemos que “n” es cualquier entero positivo).

Las leyes de los **exponentes** se mencionan a continuación:

- En la multiplicación de exponentes de igual base, los exponentes se suman.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

- En la división de exponentes de igual base, los exponentes se restan.

$$a^m / a^n = a^{m-n}$$

- En la potencia de una potencia se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

- En la raíz de una potencia, los exponentes se dividen:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{m/n}$$

Ahora se presentan las leyes de los **radicales**, mismos que se basan en las leyes de los exponentes:

- Multiplicación de raíces de igual índice, se junta todo bajo la misma raíz.
- División de raíces de igual índice, se junta todo bajo la misma raíz.
- Multiplicación de raíces se une todo y se suman los índices.
- División de raíces, se une todo y se restan los índices.
- Raíz de una potencia se dividen los exponentes.
- Raíz de una raíz se multiplican los exponentes.

3.2. Principios del análisis Algebraico

Ahora analicemos los principios del análisis Algebraico, para eso definamos lo que es el Álgebra:

El Álgebra es la rama de las matemáticas en la que se utilizan letras para representar relaciones aritméticas. Sus operaciones fundamentales son adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces. El Álgebra te enseña las bases para más tarde poder hacer planteamientos matemáticos que representen la realidad, por ejemplo, de una empresa, claro está, entre otras muchas cosas.

El estudio del Álgebra se basa en el establecimiento de ecuaciones. Para su análisis, es necesario definir lo qué es un monomio, un polinomio y una ecuación.

Un **monomio** es una expresión Algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Se llama coeficiente de un monomio al número que aparece multiplicando a las letras. Normalmente se coloca al principio. Si es un 1 no se escribe y nunca es 0 ya que la expresión completa sería 0

Se denomina grado de un monomio a la suma de los exponentes de las letras. Ejemplo:

$$8ab^3$$

Podemos considerar a un **polinomio** como una expresión con variable que se obtiene mediante las dos operaciones básicas (sumas y multiplicaciones). Es la relación entre monomios. El grado de un polinomio es el mayor exponente de la variable siempre y cuando se coeficiente sea distinto de 0. Dicho exponente es un número natural.

Los **polinomios** cumplen las mismas propiedades de la aritmética aunque el álgebra incluye números irracionales y números complejos.

Factorización de polinomios

Los polinomios se pueden multiplicar. Se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. Una vez hechas estas operaciones, todos los términos del mismo grado se han de agrupar para simplificar la expresión, a esto se le conoce como factorizar.

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

Pasos para factorizar un polinomio:

- Sacar factor común
- Recordar los productos notables

- Si es un polinomio de grado > 2 , entonces se emplea la fórmula de Ruffini[2], probando con los divisores del término independiente, hasta obtener resto cero: P(x) = (x – a).C(x)
- Si es un polinomio de grado = 2: Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dada una expresión Algebraica complicada, resulta útil el descomponer en un producto de varios términos más sencillos. Por ejemplo:

$$x^2 + 2xy + y^2 = \mathbf{(x + y)^2}$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = \mathbf{(x - y)^2}$$
$$x^2 - y^2 = \mathbf{(x + y)\,(x - y)}$$
$$x^2 + (a + b)x + ab = \mathbf{(x + a)\,(x + b)}$$

Mínimo común múltiplo

El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.

Encontrar el mínimo común múltiplo puede ser útil para poder hacer ciertas operaciones con fracciones Algebraicas. Dadas varias expresiones, su mínimo común múltiplo es aquella expresión con el menor grado y los menores coeficientes que se puede dividir exactamente por cada una de ellas.

Máximo común divisor

El máximo común divisor de dos o más números es el número, más grande posible, que permite dividir a esos números.

[2] Paolo Ruffini (Valentano, 22 de septiembre de 1765 – Módena, 10 de mayo de 1822) fue un matemático y médico italiano.

Para hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de monomios y polinomios se descomponen las expresiones dadas en sus factores primos.

Veamos un ejemplo del cálculo del mínimo común múltiplo y máximo común divisor:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$
$$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

$$P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

$$P(x) = (x - 2)(x^2 + x - 6)$$

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 2) = (x - 2)^2 (x + 3)$$

$$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

$$Q(x) = (x + 2)(x^2 - 3x + 2)$$
$$Q(x) = (x + 2)(x - 2)(x - 1)$$

Máximo común divisor = $x - 2$

Mínimo común múltiplo = $(x - 2)^2 (x + 3)(x + 1)$

Ecuaciones

Una **ecuación** representa la igualdad en la que intervienen una o más letras, llamadas incógnitas. Es decir, es una igualdad entre expresiones Algebraicas. Las expresiones que están a ambos lados del signo igual son los miembros de la ecuación: primer miembro el de la izquierda, segundo miembro el de la derecha.

Una **ecuación lineal** es un planteamiento de igualdad, involucrando una o más variables a la primera potencia, que no contiene productos entre las variables, o mejor dicho, es una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia. En el sistema cartesiano representan rectas. Una forma común de ecuaciones lineales es $y = mx + c$ Donde m representa la pendiente y el valor de c determina la ordenada al origen (el punto donde la recta corta al eje Y). Las ecuaciones en las que aparece el término x*y (llamado rectangular) no son consideradas lineales.

Se llama **solución** de una ecuación a un valor de la incógnita, o a un conjunto de valores de las incógnitas, para los cuales se verifica la igualdad. Una ecuación puede tener una, ninguna o varias soluciones. Por ejemplo:

$3x – 7 = x + 1$ es una ecuación con una incógnita.

Tiene una única solución: $x = 4$.

$x^2 + y^2 + 5 = 0$ es una ecuación con dos incógnitas sin solución, pues la suma de dos cuadrados es un número positivo a partir del cual no se puede obtener 0 sumándole 5.

$2x + 3y = 15$ es una ecuación con dos incógnitas que tiene infinitas soluciones, algunas de las cuales son $x = 0$, $y = 5$; $x = 3$, $y = 3$; $x = 30$, $y = -15$.

Dos ecuaciones se llaman equivalentes si tienen las mismas soluciones o ambas carecen de solución.

Así, la ecuación $3x – 7 = x + 1$ es equivalente a $2x – 8 = 0$ porque ambas tienen como solución única $x = 4$.

Las ecuaciones con una incógnita suelen tener un número finito de soluciones. Las ecuaciones con varias incógnitas, sin embargo, suelen tener infinitas soluciones; por ello, estas ecuaciones interesa estudiarlas cuando forman sistemas de ecuaciones. Las ecuaciones con una incógnita pueden ser de distintos tipos: polinómicas, racionales, exponenciales, trigonométricas.

Las ecuaciones polinómicas son de la forma P(x) = 0, donde P(x) es un polinomio en x. O bien, son de tal forma que al trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión. $3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ es una ecuación polinómica.

Las ecuaciones polinómicas de primer grado, ax + b = 0, se llaman ecuaciones lineales. 5x + 7 = 3 es lineal y también lo es $(x - 5)2 + 3 = x^2 - 1$ porque al desarrollar y simplificar se obtiene -10x + 29 = 0.

Las ecuaciones polinómicas de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, se llaman cuadráticas. Son ecuaciones de este tipo: $x^2 - 5x + 3 = 0$, (x – 2)2 + 7x =5 + x.

En las ecuaciones exponenciales la incógnita está en un exponente:

$$2x+4x+1-18=0$$

Resolver una ecuación es hallar su solución o soluciones, o bien concluir que no tiene solución. Para resolver una ecuación, se pasa a otra equivalente cuya fisonomía sea más sencilla. Así, mediante una serie de pasos sucesivos se llega a una última ecuación del tipo x = s en la que la incógnita está despejada (es decir, aislada en el primer miembro), con lo que la solución es evidente.

Por ejemplo, para resolver la ecuación 5x – 6 = 3x + 12 se procede como se explica a continuación.

Para pasar los términos en x al primer miembro y los números al segundo miembro, se resta en ambos miembros 3x y se suma 6, con lo que queda:

$$5x – 3x = 12 + 6$$

Y simplificando, 2x = 18.

Para despejar la x se divide por 2 en ambos miembros:

$$x = 18/2 = 9$$

La solución es, evidentemente, x = 9.

Sin embargo, hay tipos de ecuaciones para cuya resolución se requieren técnicas especiales. Es el caso, por ejemplo, de las ecuaciones cuadráticas y bicuadradas.

El sistema de ecuaciones lineales puede ser resuelto por los métodos de sustitución o igualación. A continuación, te mostramos en qué consiste cada uno de ellos.

Método de sustitución

Este es un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Para resolverlas, primero: Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$$2x = 16 -4y \quad x = 8-2y$$

Después, sustituimos en la otra ecuación la variable “x”, por el valor anterior:

$$3(8 -2y) -4y -6$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$24 -6y -4y = -6$$

$$-10y = -30$$

$$y = 3$$

Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada.

$$x = 8 -2*3 = 8-6$$

$$x= 2$$

Quedando así:

$$x= 2,\ y = 3$$

Método de igualación

Nuevamente tomamos este sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Primero despejamos, por ejemplo, la incógnita “x” de la primera y segunda ecuación:

$$3x = -6 +4$$

$$x = \frac{-6+4y}{3}$$

$$2x = 16-4y$$

$$x = \frac{16-4y}{2}$$

Después Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{-6+4y}{2} = \frac{16-4y}{3}$$

Resolvemos la ecuación:

$$2\,(-6 + 4y) = 3(16 - 4y) \quad -12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12$$

$$20y = 60$$

$$y = 3$$

Sustituimos el valor de "y", en una de las dos expresiones en las que tenemos despejada la "x" y nos queda:

$$X = \frac{-6 + 4 * 3}{3} = 2$$

Quedando así:

$$x = 2,\ y = 3$$

Ecuaciones cuadráticas

Anteriormente trabajamos con ecuaciones lineales. Las ecuaciones lineales son ecuaciones polinómicas de grado uno. Ahora estudiaremos ecuaciones polinómicas de grado dos conocidas como **ecuaciones cuadráticas**.

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ donde "a", "b", y "c" son números reales y "a" es un número diferente de cero.

Ejemplos: $x^2 - 9 = 0$; $x^2 - x - 12 = 0$;

$$2x^2 - 3x - 4 = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se resuelven a través de la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La condición de que “a” es un número diferente de cero en la definición asegura que exista el término x^2 en la ecuación. Existen varios métodos para resolver las ecuaciones cuadráticas. El método apropiado para resolver una ecuación cuadrática depende del tipo de ecuación cuadrática que se va a resolver. También existen los siguientes métodos de resolución:

Factorización

Para utilizar este método la ecuación cuadrática debe estar igualada a cero. Luego expresar el lado de la ecuación que no es cero como un producto de factores. Finalmente se iguala a cero cada factor y se despeja para la variable.

Raíz cuadrada

Este método requiere el uso de la propiedad que se menciona a continuación.

Propiedad de la raíz cuadrada: Para cualquier número real k, la ecuación x2 = k es equivalente a:

$$x = \pm\sqrt{k}.$$

Completando el cuadrado

Completar el cuadrado conlleva a hallar el tercer término de un trinomio cuadrado perfecto cuando conocemos los primeros dos. Esto es, trinomios de la forma:

$$x^2 + bx + ?$$

El último término de un trinomio cuadrado perfecto (con a = 1) es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término del medio. Esto es: el trinomio cuadrado perfecto cuyos dos primeros términos son $x^2 + bx$, es:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Al completar el cuadrado queremos una ecuación equivalente que tenga un trinomio cuadrado perfecto a un lado. Para obtener la ecuación equivalente el número que completa el cuadrado debe sumarse a ambos lados de la ecuación.

Inecuaciones

Una inecuación es una expresión matemática que establece que una o más variables tiene un valor que no es exacto sino que se encuentra dentro de un rango.

Son desigualdades en las que aparecen letras y números con las operaciones usuales. Las letras son las variables o incógnitas de las inecuaciones. Por ejemplo:

$$x \le 2,$$
$$x-3 \ge y$$
$$x^2-5x \le 4$$
$$xy-3 > 0$$

Las inecuaciones pueden ser de primer o segundo grado.

3.3. Principios del análisis geométrico

La geometría es una parte de la matemática que trata de estudiar unas idealizaciones del espacio en que vivimos, que son los puntos, las rectas y los planos, y otros elementos conceptuales derivados de ellos, como polígonos o poliedros.

En la práctica, la geometría sirve para solucionar problemas concretos en el mundo de lo visible. Entre sus utilidades se encuentran la justificación teórica de muchos instrumentos: compás, teodolito, pantógrafo, sistema de posicionamiento global. También es la que nos permite medir áreas y volúmenes, es útil en la preparación de diseños, e incluso en la fabricación de artesanías.

La geometría clásica o axiomática es una matemática en la cual los objetos, en vez de ser números, son puntos, rectas, planos y otras figuras definidas en función de estas.

Figuras geométricas

Figuras fundamentales: Punto, Recta y Plano.

En la *recta* se pueden ver: Segmentos, semirrectas y vectores.

En el *plano*, una recta determina dos semiplanos, su intersección determina las figuras convexas: faja, Ángulo, Triángulo, cuadrángulo y Polígono.

Utilizando el concepto de *distancia*: se definen: el círculo y la esfera.

Utilizando el concepto de *semiespacio* se definen: el diedro, el espacio prismático, el triedro, el ángulo poliedro, y los poliedros. Entre los últimos encontramos como casos particulares: el tetraedro, el prisma, la pirámide y el paralelepípedo.

El concepto de *círculo* en el espacio da origen a: el cono y el cilindro.

Entre dos o más figuras puede haber relaciones diferentes, dos **rectas** pueden ser paralelas, perpendiculares u oblicuas (se cortan en un punto formando ángulos no rectos). En el **espacio**, también pueden ser alabeadas (o cruzadas). Uno de los conceptos más importantes dentro de la geometría es el de congruencia o igualdad.

Teniendo en cuenta más axiomas se obtienen otras geometrías (en las cuales todo lo dicho hasta aquí es válido). Si damos por cierto el axioma del paralelismo de Euclides, obtenemos la Geometría euclidiana también conocida como geometría plana.

Agregando a estos los axiomas relativos al espacio, obtenemos la geometría espacial (estos últimos no son más que extensiones de los axiomas relativos al plano). La Geometría descriptiva, es la que se encarga de que los problemas posibilitar la resolución de los problemas de la geometría del espacio por medio de operaciones efectuadas en un plano.

Si agregamos otros axiomas, ya sean diferentes postulados de paralelismo o de existencia de conjuntos de puntos mayores que el plano (y menores que el espacio) se obtienen las geometrías no elucídelas.

Utilizando los conocimientos de otras áreas (y por lo tanto sus axiomas respectivos), se obtienen: *la geometría analítica, los métodos del álgebra y del análisis matemático* que es lo que estamos estudiando en esta unidad.

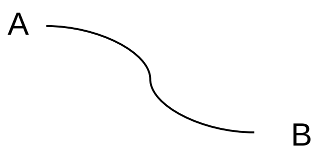
Líneas, ángulos, áreas y perímetros

Para hablar de este tema, es necesario definir primeramente, lo que es un **punto**, del cual ya nos hemos referido como una figura geométrica básica.

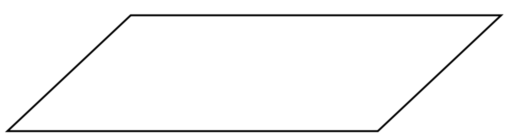
Un punto sólo tiene posición en el espacio. Es la unidad indivisible de la geometría. No tiene dimensión (largo, alto, ancho).

La **Línea** es una figura geométrica que se genera por un punto en movimiento.
Si el punto se mueve sin cambiar de dirección, entonces es una **línea recta**.

Si el punto cambia continuamente de dirección entonces es una línea curva

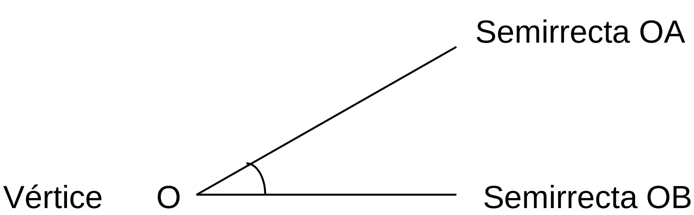


Un plano es una superficie que tiene longitud y anchura pero no espesor.

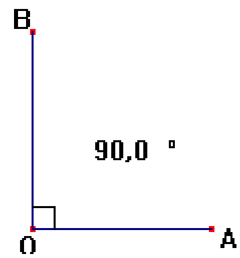


El plano tiene dos dimensiones a diferencia de la mayoría de los casos que nos rodean que están en tres dimensiones.

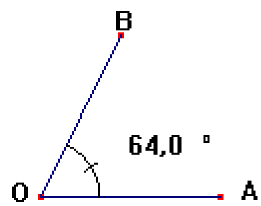
Cuando dos rectas se cortan, forman 4 regiones llamadas ángulos. Cada ángulo está limitado por dos lados y un vértice.



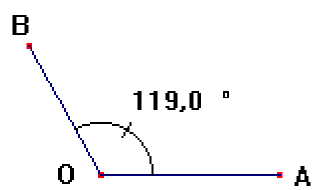
Ángulo recto: es aquel que mide exactamente 90º. Se marca con un pequeño rectángulo en el vértice.



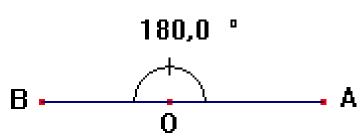
Ángulo agudo. Es aquel cuya magnitud es menor de 90º.



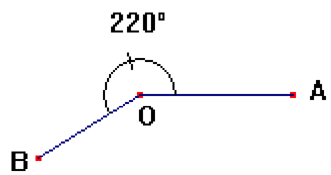
Ángulo obtuso. Es aquel cuya magnitud es mayor de 90º y menos a 180º.



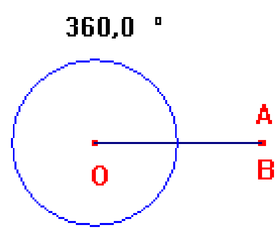
Ángulo llano. Es aquel cuya magnitud es igual a 180º



Ángulo entrante. Es aquel cuya magnitud es mayor de 180º y menor de 360º.



Ángulo perígono. Es aquel cuya magnitud es igual a 360º. Es un círculo.



Perímetros y áreas

Ahora bien, los siguientes elementos por estudiar en el análisis geométrico son el perímetro y el área de una figura.

El *perímetro* de una figura es la suma de las longitudes sus lados.

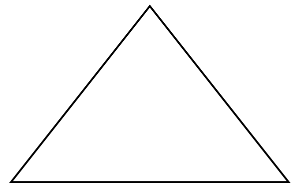
El *área* de una figura es la medida de su región o superficie encerrada por una figura plana.

A continuación se presentan las principales fórmulas para calcular el perímetro y el área de las diferentes figuras geométricas:

- **Triángulo**: Es un polígono formado por lados y tres ángulos, cumpliendo la propiedad de que la suma de todos sus ángulos siempre es 180 grados.

Perímetro: lado + lado + lado

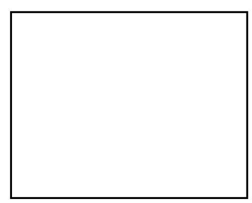
Área: (Base x Altura) / 2



- **Cuadrado**. El cuadrado es un polígono formado por cuatro lados de igual longitud que forman entre sí ángulos de 90 grados.

Perímetro: lado + lado + lado + lado = 4 x lado

Área: (Lado x lado)



- **Rectángulo:** El rectángulo es un polígono compuesto por dos pares de lados iguales que forman entre sí ángulos de 90 grados.

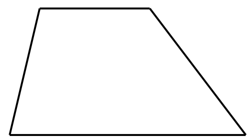
Perímetro: lado x 2 + lado x 2

Área: Base x Altura

- **Trapecio**. El trapecio es un polígono de cuatro lados, pero sus cuatro ángulos son distintos de 90º.

Perímetro: Suma de todos sus lados

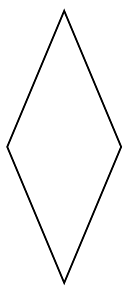
Área del trapecio = [(base mayor + base menor).altura] / 2



- **Rombo**: El rombo es un polígono de cuatro lados iguales, pero sus cuatro ángulos son distintos de 90°.

Perímetro: 4 x lado

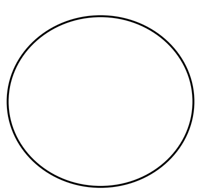
Área del rombo = (diagonal mayor x diagonal menor) / 2



- **Circunferencia**: Es el lugar geométrico de todos los puntos que conforman esta figura y que equidistan de un punto llamado centro de la circunferencia.

Perímetro: 2 x π x radio

Área de la circunferencia π x radio^2



El número Pi (π) cociente entre la longitud de la circunferencia (perímetro) y la longitud de su diámetro. Se emplea frecuentemente en matemáticas, física e ingeniería. El valor numérico de π, limitado a sus primeras cifras, es el siguiente:

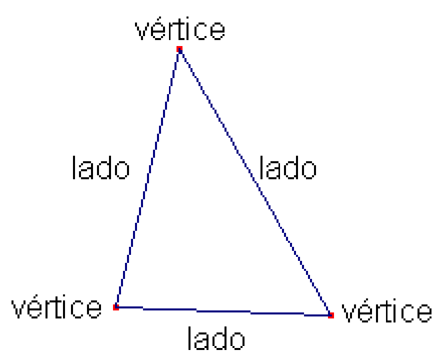
$$\pi = 3.14159265358979323 84.$$

Triángulos, polígonos y circunferencias

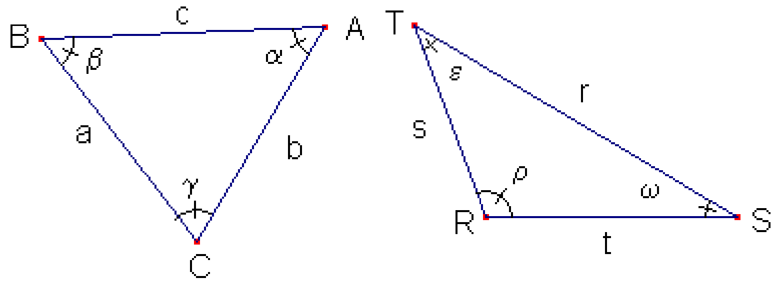
Ya hemos hablado de las principales figuras geométricas justamente en el punto anterior, ahora vamos a detallarlas.

Triángulo

Es un polígono el cual está limitado por tres lados los cuales forman entre sí tres ángulos, también se puede definir como el plano limitado por tres rectas las cuales se cortan dos a dos.

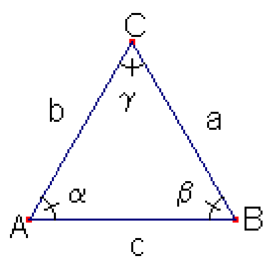


Un triángulo se denota colocando tres letras mayúsculas en sus vértices y en los lados opuestos se colocan las letras minúsculas que correspondan en conclusión podemos decir que un triángulo está compuesto por tres elementos que son: 3 ángulos, 3 lados y tres vértices, lo cual puedes observar en las siguientes figuras:

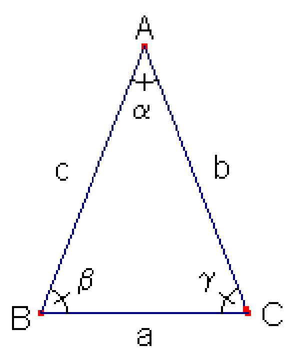


Los triángulos se pueden clasificar en:

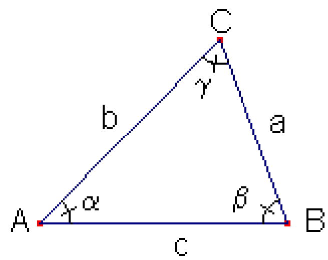
Equilátero. En este tipo de triángulo se observa que sus tres lados tienen la misma magnitud como se observa en la figura.



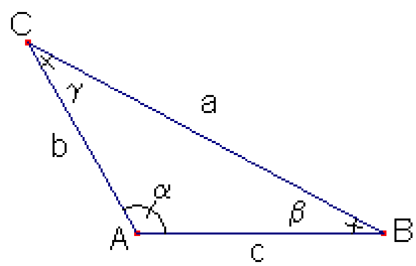
Isósceles. En este caso dos de sus lados son iguales mientras que el tercer lado es diferente y esto lo podemos observar en la figura siguiente:



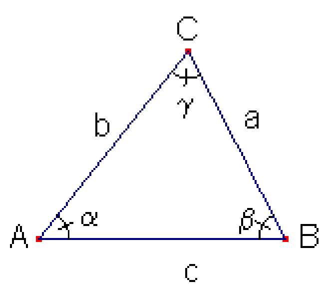
Escaleno. En este último triángulo la magnitud de sus lados es diferente completamente, esto lo observamos en la figura siguiente:



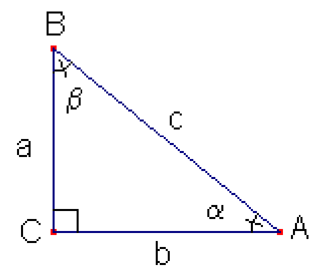
Obtusángulo. Es aquel que tiene un ángulo obtuso como el observado en la siguiente figura:



Acutángulo. Es el que tiene sus tres ángulos agudos.

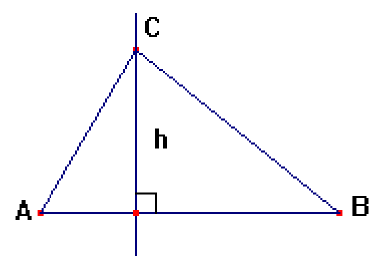


Rectángulo. Este tipo de triángulo tiene un ángulo recto (90°), mientras que sus otros dos lados tienen nombres especiales.

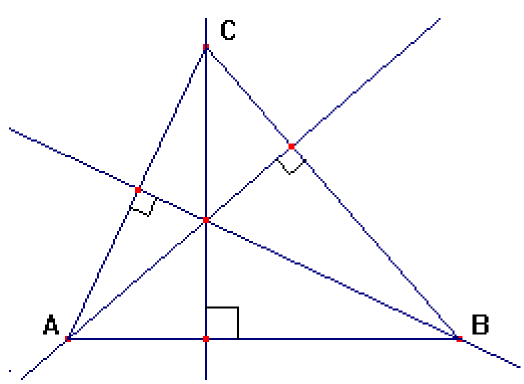


Cualquier triángulo tiene 3 alturas, 3 medianas, 3 mediatrices y 3 bisectrices, que se les llaman rectas notables y al punto donde se unen cada una de las 3 reciben nombres diferentes.

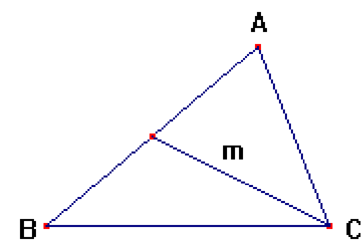
Altura. Segmento de recta perpendicular al lado y que pasa por el vértice opuesto. Ejemplo:



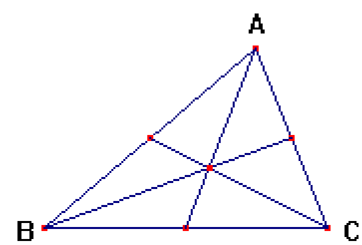
Ortocentro. Es el punto en el cual las alturas se intersecan o cruzan.



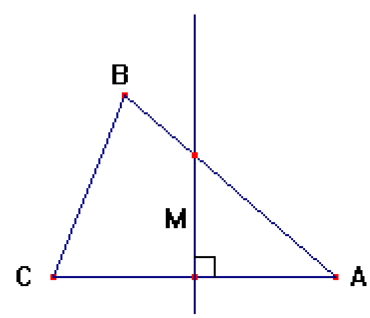
Medianas. Es el segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto y se le llama mediana correspondiente a ese lado.



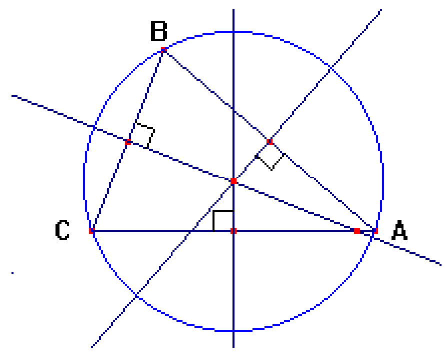
Baricentro. Es el punto en el cual las medianas se cruzan o intersecan.



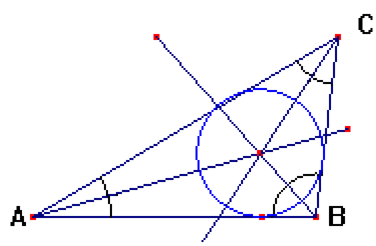
Mediatriz. Segmento de recta que es perpendicular a cada lado del triángulo y que pasa exactamente por el punto medio.



Circuncentro. Es el punto en donde las mediatrices se cruzan o intersecan y este es el centro de la circunferencia circunscrita.



Incentro. Es el lugar en el cual las bisectrices se cruzan o intersecan y este punto es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.



Algunas propiedades de los triángulos son:

Teorema 1. En todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.

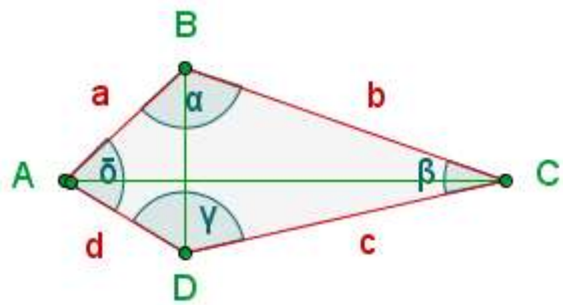
Teorema 2. En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

Teorema 3. En todo triángulo, un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Y desde luego, el teorema de Pitágoras aplicable a los triángulos rectángulos.

Polígonos

Un polígono es una figura limitada por tres o más segmentos.



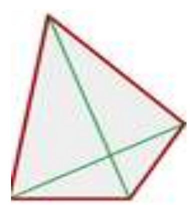
Los lados de un polígono son los segmentos que lo limitan. En donde concurren los segmentos, están sus vértices y los ángulos están determinados por dos lados consecutivos.

Si "n" es el número de los lados del polígono, la suma de ángulos del mismo es:

$$(n - 2) \cdot 180°$$

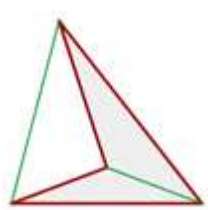
Polígono convexo

Es aquel en el que todos sus ángulos son menores a 180o



Polígono cóncavo

Es aquel que tiene un ángulo que mide más de 180º.



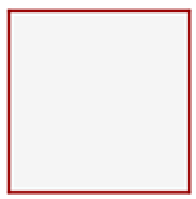
Tipos de polígonos

Casi hemos visto todos, sólo los recordaremos brevemente.

Triángulo

Tienen 3 lados.

Cuadriláteros



Tienen 4 lados.

Pentágonos

Tienen 5 lados.

Hexágonos

Tienen 6 lados.

Heptágonos

Tienen 7 lados.

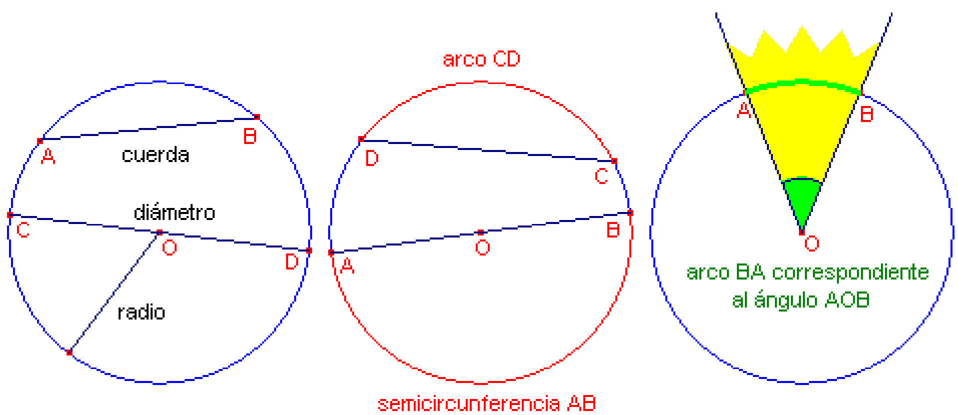
Octágonos

Tienen 8 lados.

Circunferencias

Se llama circunferencia al lugar geométrico formado por los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.

Elementos de la circunferencia



- Se llama **cuerda** al segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

- Se llama **diámetro** a la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- Se llama radio al **segmento** que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia.
- Se llama **arco** a cada una de las partes en las que una cuerda divide a la circunferencia.
- Se llama **semicircunferencia** a cada una de las partes en las que un diámetro divide a la circunferencia.
- Se llama **ángulo central** al ángulo cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia.

Ya hemos estudiado las principales reglas que rigen el análisis matemático y los modelos. Teniendo todos estos conocimientos de nuevo a la mano, en la siguiente unidad, elaboraremos los modelos matemáticos aplicados a la administración.

RESUMEN

En esta unidad hemos repasado los conceptos básicos de matemáticas, a fin de establecer las reglas aritméticas, Algebraicas y geométricas que deben cumplirse en los modelos matemáticos y por ende, en los formulados y empleados en la administración y que la informática debe cumplir.

Primeramente, definimos qué es el análisis matemático, y eventualmente establecimos qué es la aritmética, los números reales y sus propiedades (propiedad conmutativa, asociativa, distributiva y de identidad), así como sus principios fundamentales.

Posteriormente, estudiamos qué son las fracciones como partes de un todo, los decimales como una forma de expresar las fracciones, las escalas para saber la importancia numérica de cada parte con relación al todo. Asimismo, estudiamos lo que son las proporciones.

Como parte del análisis aritmético, analizamos lo que son los exponentes (la multiplicación de un número “n” veces por sí mismo) y los radicales (la raíz de un número). Revisamos las leyes de los exponentes y los radicales.

En seguida, explicamos el análisis Algebraico, el cual se centra en el estudio de los monomios (expresiones en número y literales que representan algo que sucede en el mundo real), los polinomios y las ecuaciones, tanto lineales como cuadráticas. Analizamos el concepto de mínimo común múltiplo y máximo común divisor y las inecuaciones (ecuaciones con desigualdades).

Por último, concentramos nuestros esfuerzos en definir las características fundamentales del análisis geométrico, estudiando el punto, la línea (recta y curva), ángulos (convergencia de rectas), perímetros (límites de área), el área (espacio de una forma), y los principales polígonos como los triángulos y finalmente revisamos la circunferencia.

¿Para qué nos sirve conocer todos estos principios matemáticos? Para poder representar la realidad administrativa, el licenciado en Informática, parte de modelos matemáticos, mismos que estudiaremos en la siguiente unidad.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Arya (2009)	1.	1-58
	2.	59-91
	3.	92-122
	4.	124-174
	5.	176-222
	6.	224-269

Arya, J.C. y R.W. Lardner. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. (5ª ed.) México: Prentice-Hall.

Unidad 4.

Álgebra y tópicos especiales de matemáticas

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno podrá definir el concepto de Investigación de Operaciones así como su utilidad en la Ciencia de la Administración y en la Informática. De igual forma, podrá identificar los elementos relacionados con la construcción de modelos Algebraicos y el análisis cuantitativo.

TEMARIO DETALLADO

(2 horas)

4. Álgebra y tópicos especiales de matemáticas

4.1. Construcción de modelos Algebraicos
4.1.1. Introducción al modelado
4.1.2. Convirtiendo texto en expresiones y ecuaciones
4.1.3. Representación gráfica de ecuaciones lineales
4.2. Análisis cuantitativo
4.2.1. Definición del problema
4.2.2. Desarrollo del modelo
4.2.3. Datos de entrada
4.2.4. Solución y análisis de resultados
4.2.5. Implementación

INTRODUCCIÓN

La ciencia de la administración es una manera de abordar la toma de decisiones en la administración, ya que se basa en el método científico, utiliza ampliamente el análisis cuantitativo.

Otro nombre ampliamente conocido y aceptado es *investigación de operaciones*. En la actualidad muchas personas utilizan los términos *Investigación de Operaciones* y C*iencia de la Administración* en forma indistinta.

La revolución científica en las técnicas administrativas de principios de este siglo, iniciada por Frederick W. Taylor, es la que sentó la base para la actual CA/IO. Pero se considera, en términos generales, que la moderna ciencia de la administración/investigación de operaciones se originó durante la Segunda Guerra Mundial, cuando se formaron grupos de investigación de operaciones para abordar y manejar los problemas tácticos y estratégicos que enfrentaban los organismos militares. Se constituyeron equipos que con frecuencia contaban con personas de diversas especialidades (por ejemplo, matemáticos, ingenieros, científicos de la conducta y otros) para resolver un problema común mediante la utilización del método científico.

Dos procesos, que ocurrieron en el periodo posterior a la Segunda Guerra Mundial, condujeron al desarrollo y uso de la ciencia de la administración en organizaciones no militares.

En primer lugar, la continuación de las investigaciones sobre los métodos cuantitativos para la toma de decisiones dio como resultado numerosos progresos metodológicos. Es posible que el progreso más significativo haya sido el descubrimiento que hizo George Dantzig en 1947 del método *simplex* para resolver problemas de programación lineal.

Junto con estos progresos metodológicos se dio una virtual explosión en la capacidad de cálculo que las computadoras hicieron disponible. Las computadoras permitieron a los investigadores implantar con éxito los avances en metodología en la resolución de una gran variedad de problemas industriales.

En esta unidad vamos a estudiar precisamente de qué tratan los modelos cuantitativos, cómo se formulan y cuál es su significado, a fin de poder tomar decisiones administrativas.

4.1. Construcción de modelos algebraicos

El modelaje es la esencia del enfoque de las matemáticas. El construir un modelo ayuda a colocar los aspectos complejos e inciertos de un problema de decisión en una estructura lógica que es adecuada para el análisis formal. Este modelo especifica las alternativas de la decisión y sus consecuencias anticipadas para todos los eventos posibles que pueden ocurrir, indica los datos importantes para analizar las alternativas y conduce a condiciones generales que informan y tienen sentido.

¿Qué es un modelo? Un *modelo* es una abstracción o una representación idealizada de la vida real. El propósito del modelo es proporcionar un medio para analizar el comportamiento del sistema con el fin de mejorar su desempeño. O si el sistema no existe todavía, para definir la estructura ideal de este sistema futuro indicando las relaciones funcionales entre sus elementos. La realidad de la solución obtenida depende de su validez para representar el sistema real. Entre más grande sea la discrepancia entre la salida del modelo y el mundo real, más impreciso es el modelo para describir el comportamiento del sistema original.

Para aumentar la abstracción, los modelos se clasifican como:

- Icónicos
- Análogos
- Simbólicos

Estos sistemas, junto con los que mencionamos en la unidad anterior, conforman los modelos matemáticos. Vamos a definir los modelos que estamos describiendo.

Modelos icónicos

Son las representaciones físicas, a escala reducida o aumentada de un sistema real. Por ejemplo, un barquito de juguete, es un modelo icónico de uno real. Aquí también tenemos los planos y las maquetas.

Modelos análogos

Los modelos análogos esencialmente requieren la sustitución de una propiedad por otra con el fin de permitir la manipulación del modelo. Después de resolver el problema, la solución se interpreta de acuerdo con el sistema original. Por ejemplo, un modelo de redes eléctricas puede utilizarse como un modelo análogo para el estudio de flujos de un sistema de transporte.

Modelos simbólicos

Son aquellos en los que se emplea un conjunto de símbolos matemáticos y funciones para representar las variables de decisión y sus relaciones para describir el comportamiento del sistema. La solución del problema se obtiene aplicando técnicas matemáticas conocidas (tales como programación lineal) al modelo. Por consiguiente son representaciones aproximadas de la realidad.

Con en el empleo de las computadoras y los programas matemáticos han tenido auge también los siguientes modelos:

Modelos de simulación

Los modelos de simulación son generalmente programas de computación que replican el comportamiento de un sistema utilizando el sistema electrónico. En ellos se mueve el valor de las variables que conforman un sistema. Los modelos de simulación, en realidad son un proceso de planteamiento de modelos y experimentación que se utilizan para describir y/o analizar un problema o un área de problemas específicos.

Modelos heurísticos

Los modelos heurísticos son esencialmente modelos que emplean reglas intuitivas o ciertas guías tratando de generar nuevas estrategias que se traduzcan en soluciones mejoradas. Los modelos heurísticos no pretenden obtener soluciones óptimas de un problema. Un ejemplo de un modelo heurístico podría ser: "atienda todos los clientes de una línea sobre la base de que el primero que llega es el primero que se atiende".

El resultado del ejercicio exitoso de construcción de un modelo es entonces, un modelo, que ayudará al tomador de decisiones para realizar la elección que sea más conmensurable con sus metas, indicando aquellas variables de mayor importancia en la decisión y reflejando las suposiciones de simplificación que puedan introducirse sin distorsionar la naturaleza básica del problema.

Elementos del modelo matemático

Un modelo matemático comprende principalmente tres conjuntos básicos de elementos. Estos son:

- Variables y parámetros de decisión
- Restricciones
- Funciones objetivo

Veamos de qué tratan cada uno:

Variables y parámetros de decisión. Las variables de decisión son las incógnitas (o decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo. Los parámetros son los valores conocidos que relacionan las variables de decisión con las restricciones y las funciones objetivo. Los parámetros del modelo pueden ser determinísticos o probabilísticos (estocásticos).

Restricciones. Para tener en cuenta las limitaciones tecnológicas, económicas y otras del sistema, el modelo debe incluir restricciones (implícitas o explícitas) que restrinjan las variables de decisión a un rango de valores factibles.

Función objetivo. La función objetivo define la medida de efectividad del sistema como función matemática de las variables de decisión. Una decisión óptima del modelo se obtiene cuando los valores de las variables de decisión producen el mejor valor de la función objetivo, sujeta a las restricciones.

Una formulación pobre o inapropiada de la función objetivo conduce a una solución pobre del problema. Un ejemplo común de esto ocurre cuando se desprecian algunos aspectos del sistema. Por ejemplo, para determinar el nivel óptimo de producción de un determinado producto, la función objetivo puede reflejar solamente metas de producción del departamento, despreciando las metas de mercado y finanzas.

Veamos cómo se plantea un modelo matemático en términos Algebraicos.

La compañía XYZ produce dos juguetes, los osos Bobby y Teddy. Cada uno de estos productos debe ser procesado en dos máquinas diferentes.

Una máquina tiene 12 horas de capacidad disponible y la otra 8. Cada Bobby producido necesita 2 horas de tiempo en ambas máquinas. Cada Teddy producido requiere 3 horas de tiempo en la primera máquina y 1 hora en la segunda máquina. La ganancia incremental es de $ 6 por Bobby y de $7 por Teddy vendidos y la firma puede vender tantas unidades de cada producto como fabrique. El problema es determinar cuántas unidades de Bobbies y Teddies deben producirse.

Para resolver este problema, lo primero que debemos hacer es, traducir el problema de la compañía XYZ a un problema de descripción verbal en términos matemáticos y posteriormente utilizando las herramientas matemáticas disponibles, resolver el problema matemático nuevamente definido.

Supongamos: x_1: número de unidades de Bobbies que se deben producir.
x_2: número de unidades de Teddies que se deben producir.
Z: ganancia incremental total de la compañía.

Las variables X_1 y X_2 son variables de decisión del problema. Estas son las variables sobre las cuales la compañía ejerce control y cuyos niveles busca establecer (para maximizar su ganancia).

Como la compañía puede hacer una utilidad de \$6 y \$7 respectivamente por cada Bobby y Teddy vendido, la utilidad total de la compañía está dada por

$$P = 6X_1 + 7X_2$$

La ecuación anterior es la función objetivo de la compañía (y del problema) que se debe maximizar. Es una función lineal de las variables de decisión (X_1 y X_2) y de los parámetros (\$6 y \$7). La compañía desea seleccionar valores de X_1 y X_2 que maximicen esta función.

La compañía desea producir cuanto sea posible de X_1 y X_2, pues las utilidades se incrementarán en esa misma forma. Sin embargo no puede hacerlo debido a las restricciones bajo las cuales debe operar.

Hay dos: las restricciones de capacidad en las dos máquinas utilizadas para producir ambos productos.

La restricción de la primera máquina transformada a términos matemáticos se expresa como sigue:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$

Esto es, que cada Bobby utiliza 2 horas de esta máquina y cada Teddy utiliza tres horas (estos son parámetros asociados con las restricciones tecnológicas del problema). Por lo tanto el número total de horas utilizado por los Bobbies y los Teddies está expresado por el lado izquierdo de esta ecuación. Este debe ser igual o menor que el total de horas disponibles en esta máquina (=12).

Para la segunda máquina, la restricción similar es:

$$2X_1 + 1X_2 \leq 8$$

Además, debamos imponer la restricción que limita X_1 y X_2 a valores no negativos.

En términos del problema, esto significa que la compañía no puede producir cantidades negativas de productos.

El problema de la compañía se puede resumir simbólicamente como sigue así:

Maximizar	$P = 6X_1 + 7X_2$
Sujeto a	$2X_1 + 3X_2 \leq 12$
	$2X_1 + 1X_2 \leq 8$
	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

Es un problema de programación (*programación Lineal*) porque nos pide programas o establecer los niveles de variables de decisión para maximizar (algunas veces minimizar) una función objetivo. Es un problema de programación lineal porque nos piden maximizar una función objetivo lineal sujeta a restricciones lineales, incluyendo las condiciones de no negatividad. Los parámetros del problema, esto es, los coeficientes de las variables en la función objetivo y en las restricciones así como también las constantes (12 y 8 en el lado derecho de las restricciones) se suponen determinísticas.

Particularmente, sin embargo, no es posible producir una fracción de oso; así, necesitamos otra restricción a las variables de decisión para asegurar, tanto la condición de no negatividad como la integridad. Esto es, la restricción no negatividad debe alterarse así

$$X_1 \ , \ X_2 \ = \ 0 \ , 1 \ , 2 \ , 3 \ , .\text{etc.}, \text{entero}$$

Tenemos ahora, un problema de *programación entera.*

En este orden de ideas, otra forma de clasificar los modelos es desde el punto de vista de la ciencia de la administración: modelos determinísticos y estocásticos, lineales y no lineales, estáticos y dinámicos y, por último modelos de simulación.

Modelos determinísticos

En un modelo determinístico, las relaciones fundamentales, es decir, los parámetros del modelo, se conocen con certidumbre.

Modelos estocásticos

En un modelo estocástico puede tener algunas relaciones funcionales que sean determinísticas y estocásticas o todas pueden ser estocásticas.

Un modelo lineal es en el que todas las relaciones funcionales implican que la variable dependiente es proporcional a las variables independientes. Por otra parte los modelos no lineales utilizan ecuaciones curvilíneas o no proporcionales.

Los modelos estáticos se definen en un punto fijo del tiempo y se supone que las condiciones del modelo no cambian en ese periodo específico en el proceso de solución del modelo.

Un modelo dinámico difiere de uno estático en que el curso de acción mejor u óptimo se determina examinando periodos múltiples.
Los modelos dinámicos se utilizan en situaciones en las que no puede determinarse el curso óptimo de acción para un número óptimo de periodos sin considerar en forma colectiva las acciones que se emprenden en cada periodo.

Representación gráfica de ecuaciones lineales

Una de las funciones matemáticas clave para la formulación de modelos, está representada por las ecuaciones lineales o de primer grado, que estudiamos en la unidad anterior, y que por cierto, se estableció en la función objetivo del caso de Bobbies y Teddies.

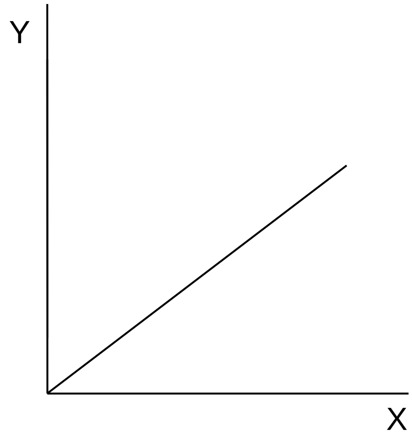
Como vimos, se denomina ecuación lineal a aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir, las incógnitas no están elevadas a potencias, ni multiplicadas entre sí, ni en el denominador.

Por ejemplo, $3x + 2y + 6z = 6$ es una ecuación lineal con tres incógnitas.

Como es bien sabido, las ecuaciones lineales con 2 incógnitas representan una recta en el plano.

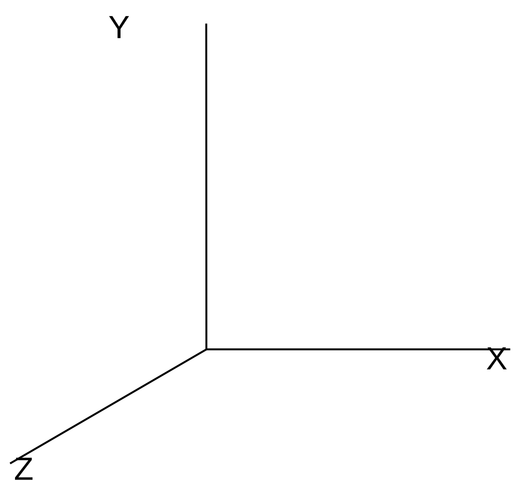
Si la ecuación lineal tiene 3 incógnitas, su representación gráfica es un plano en el espacio.

Un ejemplo de ambas representaciones puede observarse en la siguiente figura:



Este es un plano cartesiano, en el que se presenta una serie de coordenadas que forman la recta.

Si la ecuación tuviera tres dimensiones, entonces el plano sería:



El objetivo del tema es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, es decir, un conjunto de varias ecuaciones lineales. Diremos que dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones, o geométricamente representan la misma recta o plano.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \cdot \cdot \cdot + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$
$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \cdot \cdot \cdot + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$
$$am_1 \cdot x_1 + am_2 \cdot x_2 + am_3 \cdot x_3 + \cdot \cdot \cdot + am_n \cdot x_n = b_m$$

En este caso se tiene "m" ecuaciones y "n" incógnitas. Los números reales a_{ij} se denominan *coeficientes* y los x_i se denominan *incógnitas* (o números a determinar) y b_j se denominan *términos independientes.*

En el caso de que las incógnitas sean 2 se suelen designar simplemente por x_e y en vez de x_1 y x_2.

En el caso de tres, x, y, z en lugar de x_1, x_2 y x_3 pero esto es indiferente a la hora de resolver el sistema.

Diremos que dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones y este tipo de ecuaciones da origen al sistema de matices.

Matrices

Desde 1920, la teoría de matrices ha sido una herramienta importante de las ciencias físicas, se ha aplicado en la astronomía, la mecánica y la teoría de circuitos eléctricos, entre otras. Su primera aplicación directa en las disciplinas administrativas fue en 1940, cuando el matemático G. Dantzing, quien trabajaba para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, desarrolló las ideas de la programación lineal.

Una matriz es una tabla rectangular de números cuya aplicación principal es la representación de sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas. Cada fila de la matriz representa una ecuación, en donde los valores de una fila son los coeficientes de las distintas variables de la ecuación, en determinado orden, de tal manera que el primer renglón está situado arriba de la matriz y la primera columna, al extremo izquierdo. Entonces, podemos localizar siempre un número o variable (al que llamamos elemento) ocupando un lugar en la intersección de una columna y un renglón, de la misma manera que podemos localizar a un amigo en la intersección entre dos calles.

Una matriz se representa normalmente entre paréntesis o corchetes:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 2 & 0.3 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}15 & 0.5 & 3\\ 10 & 3 & -1\\ 7 & 6 & 9\end{bmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 7\\ -1 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 7 & 8\\ 21 & 3 & 4 & 8\end{pmatrix}$$

El tamaño de una matriz está dado por el número de filas y de columnas, en este orden. Así, A, B, C son de tamaño 2 X 3 (dos por tres), 3 X 3, 4 X 4, respectivamente. Los elementos de una matriz general de tamaño $m \times n$ se representan normalmente utilizando un doble subíndice: el primero, i, indica el número de fila; y el segundo, j, el número de columna. Entonces, el elemento a_{23} está en la segunda fila, tercera columna.

La matriz general:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2n}\\ . & . & . & & .\\ . & . & . & & .\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .... & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Se puede representar de forma abreviada como $A = (a_{ij})$, en donde los posibles valores de los índices $i = 1, 2,..., m$ y $j = 1, 2,..., n$ se han de dar explícitamente si no se sobrentienden. Si $m = n$, la matriz es cuadrada; y el número de filas (o columnas), el orden de la matriz. Dos matrices, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, son iguales si y sólo si son de igual tamaño y si para todo i y j, $a_{ij} = b_{ij}$. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada, los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33},... forman la diagonal principal de la matriz. La matriz traspuesta A^T de una matriz A es otra matriz, en la cual la fila i es la columna i de A; y la columna j, la fila j de A. Por ejemplo, tomando la matriz A anterior,

$$A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0.3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

es la matriz traspuesta de A.

La adición y multiplicación de matrices están definidas de manera que ciertos conjuntos de matrices forman sistemas Algebraicos. Consideremos los elementos de las matrices de números reales cualesquiera. La matriz cero es aquella en la que todos los elementos son cero; y la matriz unidad I_m de orden m es una matriz cuadrada de orden m en la cual todos los elementos son cero, excepto los de la diagonal principal, que son 1. El orden de la matriz unidad se puede omitir si se sobrentiende con el resto de la expresión; por lo que I_m se escribe simplemente I.

La suma de dos matrices sólo está definida si ambas tienen el mismo tamaño. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ tienen igual tamaño, entonces la suma $C = A + B$ se define como la matriz (c_{ij}), en la que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; es decir, para sumar dos matrices de igual tamaño basta con sumar los elementos correspondientes.

Por otro lado, en el conjunto de todas las matrices de un determinado tamaño, la adición tiene las propiedades uniforme, asociativa y conmutativa. Además, hay una matriz única O tal que, para cualquier matriz A, se cumple

$A + O = O + A = A$ y una matriz única B tal que $A + B = B + A = O$.

El producto matricial AB se define si y sólo si el número de columnas de A es igual al de renglones de B, o $n_A = m_B$.

Si la multiplicación puede efectuarse, el producto resultante será una matriz que tenga la dimensión $m_A = n_B$

En el cálculo matricial se utiliza una simbología que resulta muy útil para varios tipos de cálculo en Administración. La notación matricial es fundamentalmente un medio de simplificación, en particular para la investigación de operaciones, en cuyas soluciones se puede encontrar sistemas con decenas de ecuaciones lineales y decenas de variables.

Conforme comiences a trabajar con las matrices, te darás cuenta de que al vaciar la información en ellas, lograrás precisar datos. La desventaja de esto es que debes ser muy cuidadoso, pues al mecanizar cualquier proceso hay menos señales que te permitirán darte cuenta si cometes algún error. Por ello, una de las primeras aplicaciones en las que se usaron las computadoras fue el trabajo de matrices.

Así, al igual que con los conjuntos, es posible realizar diversas operaciones con las matrices, que dan origen a otras matrices. Y para que las operaciones puedan efectuarse, las matrices con las que trabajes deben tener ciertas características; de otra manera, la operación no es posible o “conformable”, como se dice en el lenguaje de matrices.

Ya se comentó que una de las aplicaciones principales de las matrices es la representación de sistemas de ecuaciones de primer grado con variables incógnitas. Cada renglón de la matriz representa una ecuación, los elementos de una fila o los coeficientes de las distintas variables de la ecuación.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x+2y&=20 \\ x-3y&=16 \end{aligned}$$ lo podemos representar como $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 20 \\ 1 & -3 & 16 \end{array}\right)$

De esta manera, se logra ser más conciso y la manipulación es más sencilla, pero es necesario ser muy cuidadosos con el orden.

La representación matricial de sistemas de ecuaciones permite la solución de los mismos en una fracción de tiempo, con mucho menos trabajo y con los métodos Algebraicos que el lector ya puede conocer, como la igualación y la sustitución. Esto en un sistema pequeño (de dos ecuaciones con dos incógnitas, por ejemplo) no tiene importancia; no obstante, en un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, los métodos matriciales y Algebraicos mencionados resuelven el problema fácilmente.

Entre los métodos matriciales de solución de sistemas de ecuaciones lineales, se encuentra el de Gauss-Jordan, cuyo aprendizaje es difícil al principio, pero una vez comprendido te será más fácil aplicarlo.

Cuando domines la manipulación de matrices, podrás aplicarlas en economía, mercadotecnia y producción. A continuación, te mostramos el método Gauss Jordan para resolver las matrices.

El método Gauss-Jordan

El método de eliminación Gauss-Jordan consiste en representar el sistema de ecuaciones por medio de una matriz y escalonarla para obtener la solución de la ecuación.

Una matriz escalonada es de la forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si escribimos la ecuación como una matriz aumentada tenemos	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -17 \\ 7 & 5 & -41 \end{pmatrix}$
El primer renglón lo multiplicamos por 1/3 por lo tanto tenemos	$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -17/3 \\ 7 & 5 & 41 \end{pmatrix}$
El mismo primer renglón lo multiplicamos por siete y lo usamos al segundo y el resultado lo ponemos en el segundo renglón. Ahora $-7R1+R2 \rightarrow R2$	$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -17/3 \\ 0 & 1/3 & -4/3 \end{pmatrix}$
Ahora multiplicamos el renglón 2 por el 3. Entonces 3R2	$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -17/3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
Enseguida multiplicamos el segundo renglón por -2/3 y se le suma al primer renglón. Como en el primer renglón y la primera columna de la matriz tiene el valor de uno, esto implica que el resultado para	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9/3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ***x* = -3, *y* = -4**

x es -9/3=-3. Por otro lado en el segundo renglón y la segunda columna de la matriz tiene el valor de uno, esto implica que el resultado para *y* es -4.	

Veamos los tipos de matrices:

Tipo de matriz	Definición	Ejemplo
Fila	Aquella matriz que tiene una sola fila, siendo su orden 1×n	$A_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$
Columna	Aquella matriz que tiene una sola columna, siendo su orden m×1	$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
Rectangular	Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden m×n , $m \neq n$	$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
Traspuesta	Dada una matriz A, se llama traspuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por At ó AT	$Si\ es\ A = (a_{ij})_{m\times n}$ $su\ traspuesta\ es\ A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Opuesta	La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de A es -A.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \; -A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
Nula	Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por 0m×n	$0_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Identidad	Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1. También se denomina matriz unidad.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Inversa	Decimos que una matriz cuadrada A tiene inversa, A-1, si se verifica que: A-1 = A-1·A = I	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

4.2. Análisis cuantitativo

La mayor parte de los problemas de un negocio u organización comienzan con el análisis y definición de un modelo cualitativo y se avanza gradualmente hasta obtener un modelo cuantificable. Algunos problemas sin embargo no pueden cuantificarse por:

- Técnicas inadecuadas de medición
- Necesidad de muchas variables
- Algunas relaciones son desconocidas o especiales
- Algunas variables son desconocidas
- Algunas relaciones son demasiado complejas

Cuando el problema ha quedado definido en forma adecuada, el científico de administración comienza su labor de desarrollar un modelo que se pueda utilizar para representar el problema en términos matemáticos.

A continuación se presenta un breve panorama de las técnicas de la ciencia de la Administración y que son empleadas en la informática.

Programación Lineal

La programación lineal es un método de solución de problemas que se ha desarrollado para situaciones que implican la maximización o la minimización de una función lineal sujeta a restricciones lineales que limitan la medida en la que se puede tender hacia la función objetivo.

Programación lineal según enteros

Esta programación lineal es un método que se utiliza para problemas que pueden plantearse como programas lineales, con el requisito adicional de que algunas o todas las decisiones recomendadas deben asumir valores enteros.

Modelos de redes

Una red es una representación gráfica de un problema que consiste en pequeños círculos, a los que se denomina nodos, interconectados por líneas a las que se denomina arcos. Existen procedimientos de solución especializados para este tipo de problemas que permiten resolver rápidamente muchos problemas gerenciales en áreas como diseño de sistemas de transporte, diseño de sistemas de información y programación de proyectos.

Administración de proyectos: PERT/CPM

En muchos casos los administradores asumen la responsabilidad de la planeación, la programación y el control de proyectos que constan de numerosas tareas o trabajos que son llevados a cabo por diversos departamentos.

Modelos de inventarios

Estos modelos se utilizan para auxiliar a administradores que enfrentan los problemas duales de mantener suficientes inventarios para satisfacer la demanda de bienes, y, al mismo tiempo, de incurrir en los menores costos posibles por el mantenimiento de esos inventarios.

Modelos de líneas de espera (colas)

Se han desarrollado los modelos de líneas de espera (colas o filas) para ayudar a los administradores a comprender y a tomar mejores decisiones con respecto a la operación de sistemas de líneas de espera.

En la siguiente unidad se profundizaran en estos modelos.

Modelo de teoría de juegos

Los psicólogos destacan la importancia del juego en la infancia como medio de formar la personalidad y de aprender de forma experimental a relacionarse en sociedad, a resolver problemas y situaciones conflictivas. Todos los juegos, de niños y de adultos, juegos de mesa o juegos deportivos, son modelos de situaciones conflictivas y cooperativas en las que podemos reconocer situaciones y pautas que se repiten con frecuencia en el mundo real.

El estudio de los juegos ha inspirado a científicos de todos los tiempos para el desarrollo de teorías y modelos matemáticos. La **estadística** es una rama de las matemáticas que surgió precisamente de los cálculos para diseñar estrategias vencedoras en juegos de azar. Conceptos tales como probabilidad, media ponderada y distribución o desviación estándar, son términos acuñados por la estadística matemática y que tienen aplicación en el análisis de juegos de azar o en las frecuentes situaciones sociales y económicas en las que hay que adoptar decisiones y asumir riesgos ante componentes aleatorios.

Se dice de un comportamiento que es estratégico cuando se adopta teniendo en cuenta la influencia conjunta sobre el resultado propio y ajeno de las decisiones propias y ajenas.

La Teoría de Juegos ha alcanzado un alto grado de sofisticación matemática y ha mostrado una gran versatilidad en la resolución de problemas. Muchos campos de la Economía se han visto beneficiados por las aportaciones de este método de análisis. En el medio siglo transcurrido desde su primera formulación el número de científicos dedicados a su desarrollo no ha cesado de crecer. Y no son sólo economistas y matemáticos sino sociólogos, politólogos, biólogos o psicólogos. Existen también aplicaciones jurídicas: asignación de responsabilidades, adopción de decisiones de pleitear o conciliación, etc.

Hay dos clases de juegos que plantean una problemática muy diferente y requieren una forma de análisis distinta. Si los jugadores pueden comunicarse entre ellos y negociar los resultados se tratará de juegos con transferencia de utilidad (también llamados **juegos cooperativos**), en los que la problemática se concentra en el análisis de las posibles coaliciones y su estabilidad. En los juegos sin transferencia de utilidad, (también llamados **juegos no cooperativos**) los jugadores no pueden llegar a acuerdos previos; es el caso de los juegos conocidos como "la guerra de los sexos", el "dilema del prisionero" o el modelo "halcón-paloma".

Los modelos de juegos sin transferencia de utilidad suelen ser **bipersonales**, es decir, con sólo dos jugadores. Pueden ser **simétricos** o **asimétricos** según que los resultados sean idénticos desde el punto de vista de cada jugador. Pueden ser de **suma cero**, cuando el aumento en las ganancias de un jugador implica una disminución por igual cuantía en las del otro, o de **suma no nula** en caso contrario, es decir, cuando la suma de las ganancias de los jugadores puede aumentar o disminuir en función de sus decisiones. Cada jugador puede tener opción sólo a dos estrategias, en los **juegos biestratégicos**, o a muchas.

Las estrategias pueden ser **puras** o **mixtas**; éstas consisten en asignar a cada estrategia pura una probabilidad dada. En el caso de los **juegos con repetición**, los que se juegan varias veces seguidas por los mismos jugadores, las estrategias pueden ser también **simples** o **reactivas**, si la decisión depende del comportamiento que haya manifestado el contrincante en jugadas anteriores.

Definición del problema

La definición de un problema es el primero y más importante de los pasos de todo el proceso de investigación. El problema permite conocer y delimitar el terreno de lo desconocido, es decisivo en el resultado final. Una definición incorrecta nos lleva a encontrar una pseudo-solución. Su planteamiento adecuado no sólo implica considerar la situación problemática, sino también establecer las posibles vías de solución. El planteamiento correcto del problema significa, en ocasiones, más de la mitad de su solución.

Como *premisas* para el establecimiento de esta definición se tiene que:

- Para que una situación matemática represente un problema para un individuo, ésta debe contener una *dificultad intelectual* y no sólo operacional o algorítmica. Además debe suceder que la persona de manera consciente reconozca la presencia de la dificultad y la situación pase a ser objeto de interés para la misma, o sea, que exista una *disposición para resolverla*.
- La *base de conocimientos* requerida puede estar compuesta por conocimientos y experiencias que se han adquirido y acumulado previamente o puede ser ampliada al abordar el problema, mediante consulta de textos o de personas capacitadas.
- En todo problema aparece *al menos un objeto,* que puede ser matemático como un triángulo, un número, una ecuación, etc., o puede ser real, como un camino que enlace dos puntos, un río, un poste, etc. También pueden aparecer objetos de ambos tipos, de todas formas los objetos reales en el proceso de resolución del problema deben representarse matemáticamente para poder aplicar los métodos de esta ciencia.
- Junto a los objetos, en cada problema suele aparecer una serie de *características* de los mismos, algunas de carácter cuantitativo como longitudes, volúmenes, número de vértices, aristas, etc. y otras cualitativas como el tipo de triángulo (equilátero, isósceles, escaleno o rectángulo), el tipo de camino (recto, curvo, poligonal), etc. También pueden aparecer *relaciones* entre los objetos, tales como relaciones de distancia, tangencia, semejanza, equivalencia, congruencia, etc.
- *Las condiciones* del problema son conformadas por algunos objetos, características de estos y relaciones entre los mismos, que son dadas en la formulación del problema. *La exigencia o interrogante* a la cual hay que dar

respuesta también se expresa en términos de objetos, características o relaciones.

- Si la dificultad que presenta la situación matemática es sólo algorítmica, es decir, si el conocimiento previo incluye un programa bien preciso para su solución, no lo consideramos problema, sino *ejercicio*.

Una vez definido el problema matemático, podemos adentrarnos en el estudio de su proceso de resolución.

Cuando hablamos de modelos aplicables a la administración, nos estamos refiriendo a la Investigación de operación que como su nombre lo dice, significa “hacer investigación sobre las operaciones”. Entonces, la investigación de operaciones se aplica a problemas que se refieren a la conducción y coordinación de operaciones (o actividades) dentro de una organización. La naturaleza de la organización es esencialmente inmaterial y, de hecho, la investigación de operaciones se ha aplicado de manera extensa en áreas tan diversas como la manufactura, el transporte, la constitución, las telecomunicaciones, la planeación financiera, el cuidado de la salud, la milicia y los servidores públicos, por nombrar sólo unas cuantas. Así, la gama de aplicaciones es extraordinariamente amplia.

La parte de investigación en el nombre significa que la *investigación de operaciones* usa un enfoque similar a la manera en que se lleva a cabo la investigación en los campos científicos establecidos. En gran medida, se usa el método científico para investigar el problema en cuestión. (De hecho, en ocasiones se usa el término ciencias de al administración como sinónimo de investigación de operaciones.) En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema incluyendo la recolección de los datos pertinentes. El siguiente paso es la construcción de un modelo científico (por lo general matemático) que intenta abstraer la esencia del problema real. En este punto se propone la hipótesis de que el modelo es una representación lo suficientemente precisa de las características esenciales de la situación como para que las conclusiones (soluciones) obtenidas sean válidas también para el problema real. Después, se llevan a cabo los experimentos adecuados para probar esta hipótesis, modificarla si es necesario y eventualmente verificarla. (Con frecuencia este paso se conoce como la validación del modelo.) Entonces, en cierto modo, la investigación de operaciones incluye la investigación científica creativa de las propiedades fundamentales de las operaciones. Sin embargo, existe más que esto. En particular, la IO se ocupa también de la administración práctica de la organización. Así, para tener éxito, deberá también proporcionar conclusiones claras que pueda usar el tomador de decisiones cuando las necesite.

Una característica más de la IO es su amplio punto de vista. Como quedó implícito en la sección anterior, la IO adopta un punto de vista organizacional, de esta manera, intenta resolver los conflictos de intereses entre las componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa. Esto no significa que el estudio de cada problema deba considerar en forma explícita todos los aspectos de la organización sino que los objetivos que se buscan deben ser consistentes con los de toda ella.

Una característica adicional es que la IO intenta encontrar una mejor solución (llamada solución óptima) para el problema bajo consideración. (Decimos una mejor solución y no la mejor solución porque pueden existir muchas soluciones que empaten como la mejor.) En lugar de contentarse con mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible. Aun cuando debe interpretarse con todo cuidado en términos de las necesidades reales de la administración, esta “búsqueda de lo óptimo” es un aspecto importante dentro de la investigación de operaciones.

Todas estas características llevan de manera casi natural a otra. Es evidente que no puede esperarse que un solo individuo sea un experto en todos los múltiples aspectos del trabajo de investigación de operaciones o de los problemas o de los problemas que se estudian; se requiere un grupo de individuos con diversos antecedentes y habilidades. Entonces, cuando se va a emprender un estudio de investigación de operaciones completo de un nuevo problema, por lo general es necesario emplear el término de equipo. Este debe incluir individuos con antecedentes firmes en matemáticas, estadística y teoría de probabilidades, al igual que en economía, administración de empresas, ciencias de la computación, ingeniería, ciencias físicas, ciencias del comportamiento y, por supuesto, en las técnicas especiales de IO. El equipo también necesita tener la experiencia y las habilidades necesarias para permitir la consideración adecuada de todas las ramificaciones del problema a través de la organización.

Al aplicar la IO al estudio de sistemas y a la resolución de problemas se corre el riesgo de tratar de manipular los problemas para buscar que se ajusten a las diferentes técnicas, modelos de algoritmos establecidos en lugar de analizar los problemas y buscar resolverlos obteniendo las soluciones mejores, utilizando los métodos apropiados, es decir resolver el problema utilizando los métodos que proporcionan las mejores soluciones y no buscar ajustar el problema a un método específico.

Para llegar a hacer un uso apropiado de la IO, es necesario primero comprender la metodología para resolver los problemas, así como los fundamentos de las técnicas de solución para de esta forma saber cuándo utilizarlas o no en las diferentes circunstancias.

Enfoque de la Investigación de Operaciones

La parte innovadora de la IO es sin duda alguna su enfoque modelístico, producto de sus creadores aunado a la presión de supervivencia de la guerra o la sinergia generada al combinarse con diferentes disciplinas, una descripción del enfoque es el siguiente:

1. Se define el sistema real donde se presenta el problema. Dentro del sistema interactúan normalmente un gran número de variables.
2. Se seleccionan las variables que norman la conducta o el estado actual del sistema, llamadas variables relevantes, con las cuales se define un sistema asumido del sistema real.

3. Se construye un modelo cuantitativo del sistema asumido, identificando y simplificando las relaciones entre las variables relevantes mediante la utilización de funciones matemáticas.
4. Se obtiene la solución al modelo cuantitativo mediante la aplicación de una o más de las técnicas desarrolladas por la IO.
5. Se adapta e imprime la máxima realidad posible a la solución teórica del problema real obtenida en el punto 4, mediante la consideración de factores cualitativos o no cuantificables, los cuales no pudieron incluirse en el.
6. Se implanta la solución en el sistema real.

La investigación de operaciones obtiene la solución del problema real indirectamente, y no como normalmente se intentaría pasando del problema real a la solución real.

Metodología de la Investigación de Operaciones

I. Definición del problema y recolección de datos

La mayor parte de los problemas prácticos con los que se enfrenta el equipo IO están descritos inicialmente de una manera vaga. Por consiguiente, la primera actividad que se debe realizar es el estudio del sistema relevante y el desarrollo de un resumen bien definido del problema que se va a analizar. Esto incluye determinar los objetivos apropiados, las restricciones sobre lo que se puede hacer, las interrelaciones del área bajo estudio con otras áreas de la organización, los diferentes cursos de acción posibles, los límites de tiempo para tomar una decisión, etc. Este proceso de definir el problema es crucial ya que afectará en forma significativa la relevancia de las conclusiones del estudio.

Por su naturaleza, la investigación de operaciones se encarga del bienestar de toda la organización, no sólo de algunos de sus componentes. Un estudio de IO busca soluciones óptimas globales y no soluciones sub-óptimas aunque sean lo mejor para uno de los componentes. Entonces, idealmente, los objetivos que se formulan deben coincidir con los de toda la organización. Sin embargo, esto no siempre es conveniente. Muchos problemas interesan pero exclusivamente a una parte de la organización, de manera que el análisis sería innecesariamente basado si lo objetivos fueran muy generales y si se prestara atención especial a todos los efectos secundarios sobre el resto de la organización. En lugar de ello, los objetivos usados en un estudio deben ser tan específicos como sea posible, siempre y cuando contemplen las metas principales del tomador de decisiones y mantengan un nivel razonable de consistencia con los objetivos de los altos niveles.

Las condiciones fundamentales para que exista un problema es que se establezca una diferencia entre lo que es (situación actual) y lo que debe ser (situación deseada u objetivo) y además exista cuando menos una forma de eliminar o disminuir esa diferencia. Los componentes de un problema son:

a) El tomador de decisiones o ejecutivo;
b) Los objetivos de la organización;
c) El sistema o ambiente en el que se sitúa el problema;
d) Los cursos de acción alternativos que se pueden tomar para resolverlo.

Para formular un problema se requiere:

a) Identificar los componentes y variables controlables y no controlables del sistema;
b) Identificar los posibles cursos de acción, determinados por las componentes controlables;
c) Definir el marco de referencia dado por las componentes no controlables;
d) Definir los objetivos que se busca alcanzar y clasificarlos por orden de importancia;
e) Identificar las interpelaciones importantes entre las diferentes partes del sistema y encontrar las restricciones que existen.

II. Formulación de un modelo matemático

Una vez definido el problema del tomador de decisiones. La siguiente etapa consiste en reformularlo de manera conveniente para su análisis. La forma convencional en que la investigación de operaciones realiza esto es construyendo un modelo matemático que represente la esencia del problema. Antes de analizar cómo formular los modelos de este tipo, se explorará la naturaleza general de los modelos y, en particular, la de los modelos matemáticos.

El modelo matemático está constituido por relaciones matemáticas (ecuaciones y desigualdades) establecidas en términos de variables, que representa la esencia del problema que se pretende solucionar.

Para construir un modelo es necesario primero definir las variables en función de las cuales será establecido. Luego, se procede a determinar matemáticamente cada una de las dos partes que constituyen un modelo: a) la medida de efectividad que permite conocer el nivel de logro de los objetivos y generalmente es una función (ecuación) llamada *función objetivo*; b) las limitantes del problema llamada *restricciones* que son un conjunto de igualdades o desigualdades que constituyen las barreras y obstáculos para la consecución del objetivo.

Un modelo debe ser menos complejo que el problema real, es una aproximación abstracta de la realidad con consideraciones y simplificaciones que hacen más manejable el problema y permiten evaluar eficientemente las alternativas de solución.

Los modelos matemáticos tienen muchas ventajas sobre una descripción verbal del problema. Una ventaja obvia es que el modelo matemático describe un problema en forma mucho más concisa. Esto tiende a hacer que toda la estructura del problema sea más comprensible y ayude a relevar las relaciones importantes entre causa y efecto. De esta manera, indica con más claridad qué datos adicionales son importantes para el análisis. También facilita simultáneamente el manejo del problema en su totalidad y el estudio de todas sus interpelaciones. Por último, un modelo matemático forma un puente para poder emplear técnicas matemáticas y computadoras de alto poder, para analizar el problema. Sin duda, existe una amplia disponibilidad de paquetes de software para muchos tipos de modelos matemáticos, para micros y minicomputadoras.

Por otro lado, existen obstáculos que deben evitarse al usar modelos matemáticos. Un modelo es, necesariamente, una idealización abstracta del problema, por lo que casi siempre se requieren aproximaciones y suposiciones de simplificación si se quiere que el modelo sea manejable (susceptible de ser resuelto). Por lo tanto, debe tenerse cuidado de que el modelo sea siempre una representación válida del problema. El criterio apropiado para juzgar la validez de un modelo es el hecho de si predice o no con suficiente exactitud los efectos relativos de los diferentes cursos de acción, para poder tomar una decisión que tenga sentido. En consecuencia, no es necesario incluir detalles sin importancia o factores que tienen aproximadamente el mismo efecto sobre todas las opciones. Ni siquiera es necesario que la magnitud absoluta de la medida de efectividad sea aproximadamente correcta para las diferentes alternativas, siempre que sus valores relativos (es decir, las diferencias entre sus valores) sean bastante precisos. Entonces, todo lo que se requiere es que exista una alta correlación entre la predicción del modelo y lo que ocurra en la vida real. Para asegurar que este requisito se cumpla, es importante hacer un número considerable de pruebas del modelo y las modificaciones consecuentes. Aunque esta fase de pruebas se haya colocado después en el orden del libro, gran parte del trabajo de validación del modelo se lleva a cabo durante la etapa de construcción para que sirva de guía en la obtención del modelo matemático.

III. Obtención de una Solución a partir del modelo

Resolver un modelo consiste en encontrar los valores de las variables dependientes, asociadas a los componentes controlables del sistema con el propósito de optimizar, si es posible, o cuando menos mejorar la eficiencia o la efectividad del sistema dentro del marco de referencia que fijan los objetivos y las restricciones del problema.

La selección del método de solución depende de las características del modelo. Los procedimientos de solución pueden ser clasificados en tres tipos:

a) **Analíticos**, que utilizan procesos de deducción matemática;
b) **Numéricos**, que son de carácter inductivo y funcionan en base a operaciones de prueba y error,
c) **Simulación**, que utiliza métodos que imitan o, emulan al sistema real, con base en un modelo.

Muchos de los procedimientos de solución tienen la característica de ser iterativos, es decir buscan la solución basándose en la repetición de la misma regla analítica hasta llegar a ella, si la hay, o cuando menos a una aproximación.

IV. Prueba del Modelo

El desarrollo de un modelo matemático grande es análogo en algunos aspectos al desarrollo de un programa de computadora grande. Cuando se completa la primera versión, es inevitable que contenga muchas fallas. El programa debe probarse de manera exhaustiva para tratar de encontrar y corregir tanto problemas como sea posible. Eventualmente, después de una larga serie de programas mejorados, el programador (o equipo de programación) concluye que el actual da, en general, resultados razonablemente válidos. Aunque sin duda quedarán algunas fallas ocultas en el programa (y quizá nunca se detecten, se habrán eliminado suficientes problemas importantes como para que sea confiable utilizarlo.

De manera similar, es inevitable que la primera versión de un modelo matemático grande tenga muchas fallas. Sin duda, algunos factores o interpelaciones relevantes no se incorporaron la modelo y algunos parámetros no se estimaron correctamente. Esto no se puede eludir dada la dificultad de la comunicación y la compresión de todos los aspectos y sutilezas de un problema operacional complejo, así como la dificultad de recolectar datos confiables. Por lo tanto, antes de usar el modelo debe probarse exhaustivamente para intentar identificar y corregir todas las fallas que se pueda. Con el tiempo, después de una larga serie de modelos mejorados, el equipo de IO concluye que el modelo actual produce resultados razonablemente válidos. Aunque sin duda quedarán algunos problemas menores ocultos en el modelo (y quizá nunca se detecten), las fallas importantes se habrán eliminado de manera que ahora es confiable usar el modelo. Este proceso de prueba y mejoramiento de un modelo para incrementar su validez se conoce como *validación del modelo*.

Debido a que el equipo de IO puede pasar meses desarrollando todas las piezas detalladas el modelo, es sencillo “no ver el bosque para buscar los árboles”. Entonces, después de completar los detalles (“árboles”) de la versión inicial del modelo, una buena manera de comenzar las pruebas es observarlo en forma global (“el bosque”) para verificar los errores u omisiones obvias. El grupo que hace esta revisión debe, de preferencia, incluir por lo menos a una persona que no haya participado en la formulación. Al examinar de nuevo la formulación del problema y compararla con el modelo pueden descubrirse este tipo de errores. También es útil asegurarse de que todas las expresiones matemáticas sean consistentes en las dimensiones de las unidades que se emplean. Además, puede obtenerse un mejor conocimiento de la validez del modelo variando los valores de los parámetros de entrada o de las variables de decisión, y comprobando que los resultados del modelo se comporten de una manera factible. Con frecuencia, esto es especialmente revelador cuando se asignan los parámetros o a las variables valores extremos cercanos a su máximo o mínimo.

Un enfoque más sistemático para la prueba del modelo es emplear una prueba retrospectiva. Cuando es aplicable, esta prueba utiliza datos históricos y reconstruye el pasado para determinar si el modelo y la solución resultante hubieran tenido un buen desempeño, de haberse usado. La comparación de la efectividad de este desempeño hipotético con lo que en realidad ocurrió, indica si el uso del modelo tiende a dar mejoras significativas sobre las evidencias en cuanto a lo bien que el modelo predice los efectos relativos de los diferentes cursos de acción.

Cuando se determina que el modelo y la solución no son válidos, es necesario iniciar nuevamente el proceso revisando cada una de las fases de la metodología de la investigación de operaciones.

V. Establecimiento de controles sobre la solución

Una solución establecida como válida para un problema, permanece como tal siempre y cuando las condiciones del problema tales como: las variables no controlables, los parámetros, las relaciones, etc., no cambien significativamente. Esta situación se vuelve más factible cuando algunos modelos de los parámetros fueron estimados aproximadamente. Por lo anterior, es necesario generar información adicional sobre el comportamiento de la solución debido a cambios en los parámetros del modelo. Usualmente esto se conoce como análisis de sensibilidad. En pocas palabras, esta fase consiste en determinar los rangos de variación de los parámetros dentro de los cuales no cambia la solución del problema

VI. Implantación de la solución

El paso final se iniciará con el proceso de “vender” los hallazgos que se hicieron a lo largo del proceso a los ejecutivos o tomadores de las decisiones. Una vez superado este obstáculo, se debe traducir la solución encontrada a instrucciones y operaciones comprensibles para los individuos que intervienen en la operación y administración del sistema. La etapa de implantación de una solución se simplifica en gran medida cuando se ha propiciado la participación de todos los involucrados en el problema en cada fase de la metodología.

Preparación para la aplicación del modelo. Esta etapa es crítica, ya que es aquí, donde se cosecharán los beneficios del estudio. Por lo tanto, es importante que el equipo de IO participe, tanto para asegurar que las soluciones del modelo se traduzcan con exactitud a un procedimiento operativo, como para corregir cualquier defecto en la solución que salga a la luz en este momento.

El éxito de la puesta en práctica depende en gran parte del apoyo que proporcionen tanto la alta administración como la gerencia operativa. Es más probable que el equipo de IO obtenga este apoyo si ha mantenido a la administración bien informada y ha fomentado la guía de la gerencia durante el estudio. La buena comunicación ayuda a asegurar que el estudio logre lo que la administración quiere y por lo tanto merezca llevarse a la práctica. También proporciona a la administración el sentimiento de que el estudio es suyo y esto facilita el apoyo para la implantación.

La etapa de implantación incluye varios pasos. Primero, el equipo de investigación de operaciones da una cuidadosa explicación a la gerencia operativa sobre el nuevo sistema que se va a adoptar y su relación con la realidad operativa. En seguida, estos dos grupos comparten la responsabilidad de desarrollar los procedimientos requeridos para poner este sistema en operación. La gerencia operativa se encarga después de dar una capacitación detallada al personal que participa, y se inicia entonces el nuevo curso de acción. Si tiene éxito, el nuevo sistema se podrá emplear durante algunos años. Con esto en mente, el equipo de IO supervisa la experiencia inicial con la acción tomada para identificar cualquier modificación que tenga que hacerse en el futuro.

A la culminación del estudio, es apropiado que el equipo de investigación de operaciones documente su metodología con suficiente claridad y detalle para que el trabajo sea reproducible. Poder obtener una réplica debe ser parte del código de ética profesional del investigador de operaciones. Esta condición es crucial especialmente cuando se estudian políticas gubernamentales en controversia.

Limitaciones de la Investigación de Operaciones

- Frecuentemente es necesario hacer simplificaciones del problema original para poder manipularlo y detener una solución.
- La mayoría de los modelos sólo considera un único objetivo y frecuentemente en las organizaciones se tienen objetivos múltiples.

- Existe la tendencia a no considerar la totalidad de las restricciones en un problema práctico, debido a que los métodos de enseñanza y entrenamiento dan la aplicación de esta ciencia centralmente se basan en problemas pequeños para razones de índole práctico, por lo que se desarrolla en los alumnos una opinión muy simplista e ingenua sobre la aplicación de estas técnicas a problemas reales.
- Casi nunca se realizan análisis costo-beneficio de la implantación de soluciones definidas por medio de la IO, en ocasiones los beneficios potenciales se ven superados por los costos ocasionados por el desarrollo e implantación de un modelo.

Modelos Específicos de la Investigación de Operaciones

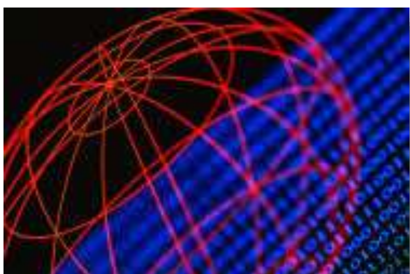
- Planeación de la Producción
- Asignación de personal
- Transporte
- Inventarios
- Dietas
- Mercado
- Estrategias de Inversión

Los resultados de la Investigación de Operaciones son útiles porque constituyen modelos de planeación. En la siguiente unidad hablaremos de la aplicación de la IO en la Ciencia de la Administración y en consecuencia, para la Informática; así mismo, elaboraremos modelos matemáticos de *problem solving y data sufficiency.*

RESUMEN

En esta unidad has aprendido en qué consiste la construcción de modelos matemáticos y para qué sirven.

Lo primero que se analizó fue la importancia de la Investigación de Operaciones para la Ciencia de la Administración. La Investigación de Operaciones no es otra cosa que la aplicación matemática del método científico a la Administración.



Los modelos IO, nacieron en la Guerra, pero fácilmente se adaptaron a la realidad administrativa y de gran competencia que viven las empresas modernas: Por ello, identificamos los tipos de modelos provenientes de este enfoque, tales como la programación lineal, el método símplex, las matrices como técnica clave para la resolución de problemas que implican ecuaciones lineales, los modelos icónicos, análogos, simbólicos, de simulación, heurísticos, estocásticos, lineales, etc.

También identificamos los elementos de los modelos matemáticos, como lo son las variables, la función objetivo expresada como ecuación, y las restricciones.

Y finalmente, revisamos los modelos que permiten la realización del análisis cuantitativo, es decir, el análisis matemático que se expresa en ecuaciones y en resultados numéricos. Así, volvimos a definir los problemas de programación lineal para la maximización de utilidades, enfocados a la producción (programación lineal según enteros). Después analizamos la teoría de redes para la programación y secuencia de actividades, los modelos PERT/CPM o ruta crítica, los modelos para hacer más eficiente al almacén, la teoría de filas para la logística y la prestación de servicios y la teoría de juegos.

En la siguiente unidad, profundizaremos en todas y cada una de estas técnicas, para identificar su aplicación práctica en la Administración.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Arya (2009)	10.	406-446
Wayne (2005)	1.	1-10
	2.	11-47

Arya, J.C. y R.W. Lardner. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. (5ª ed.) México: Prentice-Hall.

Wayne, Winston. (2005). *Investigación de operaciones, aplicaciones y algoritmos*. México: Thompson.

Unidad 5.

Métodos cuantitativos aplicados a los negocios y la toma de decisiones

OBJETIVO PARTICULAR

Al término de la unidad, el alumno podrá identificar y poner en práctica, los modelos de investigación de operaciones aplicados a los negocios y a la toma de decisiones.

TEMARIO DETALLADO

(20 horas)

5. Métodos cuantitativos aplicados a los negocios y la toma de decisiones

5.1. Programación lineal
5.2. Programación entera
5.3. Modelos de redes
5.4. PERT/CPM
5.5. Teoría de filas
5.6. Teoría de juegos

INTRODUCCIÓN

La Investigación de operaciones ha tenido un impacto impresionante en el mejoramiento de la eficiencia de numerosas organizaciones en todo el mundo. En el proceso, la IO ha hecho contribuciones significativas al incremento de la productividad dentro de la economía de varios países.

Recordemos que la IO es la aplicación, por grupos interdisciplinarios, del método científico a problemas relacionados con el control de las organizaciones o sistemas (hombre – máquina), a fin de que se produzcan soluciones que mejor sirvan a los objetivos de la organización.

De esta definición se pueden destacar los siguientes conceptos:

1. Una organización es un sistema formado por componentes que interaccionan, algunas de estas interacciones pueden ser controladas y otras no.

2. En un sistema la información es parte fundamental, ya que entre las componentes fluye información que ocasiona la interacción entre ellas. También dentro de la estructura de los sistemas se encuentran recursos que generan interacciones. Los objetivos de la organización se refieren a la eficacia y a la eficiencia con que las componentes pueden controlarse, el control es un mecanismo de autocorrección del sistema que permite evaluar los resultados en términos de los objetivos establecidos.

3. La complejidad de los problemas que se presentan en las organizaciones ya no encajan en una sola disciplina del conocimiento, se han convertido en

multidisciplinario por lo cual para su análisis y solución se requieren grupos compuestos por especialistas de diferentes áreas del conocimiento que logran comunicarse con un lenguaje común.

4. La investigación de operaciones es la aplicación de la metodología científica a través de modelos matemáticos, primero para representar al problema y luego para resolverlo.

La definición de la Sociedad de Investigación de Operaciones de la Gran Bretaña es la siguiente:

La Investigación de Operaciones es el ataque de la ciencia moderna a los complejos problemas que surgen en la dirección y en la administración de grandes sistemas de hombres, máquinas, materiales y dinero, en la industria, en los negocios, en el gobierno y en la defensa. Su actitud diferencial consiste en desarrollar un modelo científico del sistema tal, que incorpore valoraciones de factores como el azar y el riesgo y mediante el cual se predigan y comparen los resultados de decisiones, estrategias o controles alternativos. Su propósito es el de ayudar a la gerencia a determinar científicamente sus políticas y acciones.

En relación con esta definición deben destacarse los siguientes aspectos:

1. Generalmente se asocian los conceptos de dirección y administración a las empresas de tipo lucrativo, sin embargo, una empresa es un concepto más amplio, es algo que utiliza hombres, máquinas, materiales y dinero con un propósito específico; desde este punto de vista, se considera como empresa desde una universidad hasta una armadora de automóviles.

2. Para tratar de explicar el comportamiento de un sistema complejo, el científico debe representarlo en términos de los conceptos que maneja, lo hace expresando todos los rasgos principales del sistema por medio de relaciones matemáticas. A esta representación formal se le llama modelo.

3. La esencia de un modelo es que debe ser predictivo, lo cual no significa predecir el futuro, pero sí ser capaz de indicar muchas cosas acerca de la forma en que se puede esperar que un sistema opere en una variedad de circunstancias, lo que permite valorar su vulnerabilidad. Si se conocen las debilidades del sistema se pueden tomar cursos de acción agrupados en categorías:

   a) Efectuar cambios que lleven a la empresa o parte de ella a una nueva ruta;
   b) Realizar un plan de toma de decisiones;
   c) Instalar estrategias que generen decisiones. Cuando se aplica alguno de estos remedios, la investigación de operaciones nos ayuda a determinar la acción menos vulnerable ante un futuro incierto.

4. El objetivo global de la investigación de operaciones es el de apoyar al tomador de decisiones, en cuanto a cumplir con su función basado en estudios científicamente fundamentados.

Como ya mencionábamos en la unidad anterior, son muchos los modelos de IO aplicables a la Ciencia de la Administración y a la informática. A continuación se describirán los más empleados.

5.1. Programación Lineal

Muchas personas clasifican el desarrollo de la programación linean entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, su impacto desde 1950 ha sido extraordinario. En la actualidad es una herramienta de uso normal que ha ahorrado miles o millones de pesos a muchas compañías o negocios, incluyendo empresas medianas en los distintos países industrializados del mundo, su aplicación a otros sectores de la sociedad se está ampliando con rapidez. Una proporción muy grande de los cálculos científicos en computadoras está dedicada a los usos de la programación lineal.

¿Cuál es la naturaleza de esta notable herramienta y qué tipos de problemas puede manejar?

Expresado brevemente, el tipo más común de aplicación abarca el problema general de asignar recursos limitados entre actividades competitivas de la mejor manera posible (es decir, en forma óptima). Con más precisión, este problema incluye elegir el nivel de ciertas actividades que compiten por escasos recursos necesarios para realizarlas. Después, los niveles de actividad elegidos dictan la cantidad de cada recurso que consumirá cada una de ellas. La variedad de situaciones a las que se puede aplicar esta descripción es sin duda muy grande, y va desde la asignación de instalaciones de producción a los productos, hasta la asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país; desde la selección de cartera de inversiones, hasta la selección de patrones de envío; desde la planeación agrícola, hasta el diseño de una terapia de radiación, etc. No obstante, el ingrediente común de todas estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las actividades eligiendo niveles de las mismas.

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser funciones lineales. En este caso, la palabra 'programación' no se refiere a programación en computadoras; en esencia es un sinónimo de planeación. Así, la programación lineal trata la planeación de actividades para obtener un resultado óptimo, esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada (según el modelo matemático) entre todas las alternativas de solución.

Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, la programación lineal tiene muchas otras posibilidades, de hecho, cualquier problema cuyo modelo matemático se ajuste al formato general del modelo de programación lineal es un problema de programación lineal. Aún más, se dispone de un procedimiento de solución extraordinariamente eficiente llamado método simplex, para resolver estos problemas, incluso los de gran tamaño. Estas son algunas causas del tremendo auge de la programación lineal en las últimas décadas.

Modelo de Programación Lineal

Los términos clave son recursos y actividades, en donde m denota el número de distintos tipos de recursos que se pueden usar y n denota el número de actividades bajo consideración. Algunos ejemplos de recursos son dinero y tipos especiales de maquinaria, equipos, vehículos y personal. Los ejemplos de actividades incluyen inversión en proyectos específicos, publicidad en un medio determinado y el envío de bienes de cierta fuente a cierto destino. En cualquier aplicación de programación lineal, puede ser que todas las actividades sean de un tipo general (como cualquiera de los ejemplos), y entonces cada una correspondería en forma individual a las alternativas específicas de esta categoría general.

El tipo más usual de aplicación de programación lineal involucra la asignación de recursos a ciertas actividades. La cantidad disponible de cada recurso está limitada, de forma que deben asignarse con todo cuidado. La determinación de esta asignación incluye elegir los niveles de las actividades que lograrán el mejor valor posible de la medida global de efectividad.

Ciertos símbolos se usan de manera convencional para denotar las distintas componentes de un modelo de programación lineal. Estos símbolos se enumeran a continuación, junto con su interpretación para el problema general de asignación de recursos de actividades:

Z = valor de la medida global de efectividad

xj = nivel de la actividad j (para j = 1,2,..,n)

cj = incremento en Z que resulta al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j

bi = cantidad de recurso i disponible para asignar a las actividades (para i = 1,2, etc., m)

aij = cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j

El modelo establece el problema en términos de tomar decisiones sobre los niveles de las actividades, por lo que x1, x2, ..., xn se llaman *variables de decisión*. Los valores de cj, bi y aij (para i = 1,2,.., m y j = 1, 2, ..., n) son las *constantes de entrada* al modelo. Las cj, bi y aij también se conocen como *parámetros* del modelo.

Forma estándar del modelo

Ahora se puede formular al modelo matemático para este problema general de asignación de recursos a actividades. En Datos necesarios para un modelo de programación lineal que maneja la asignación de recursos a actividades particulares, este modelo consiste en elegir valores de x1, x2, ..., xn para:

optimizar (maximizar o minimizar) Z = c1x1 + c2x2 + ... + cnxn

Sujeta a las restricciones:

a11x1 + a12x2 + ... + a1nxn (<=,>=,=) b1
a21x1 + a22x2 + ... + a2nxn (<=,>=,=) b2

am1x1 + am2x2 + ... + amnxn (<=,>=,=) bm

X1 >= 0, X2 >= 0, …, Xn >= 0.

Suposiciones del modelo de Programación Lineal

Proporcionalidad

La contribución de cada actividad al valor de la función objetivo Z es proporcional al nivel de actividad xj, como lo representa el término cjxj en la función objetivo. De manera similar, la contribución de cada actividad al lado izquierdo de cada restricción funcional es proporcional al nivel de la actividad xj, en la forma en que lo representa el término aijxj en la restricción. En consecuencia, esta suposición elimina cualquier exponente diferente a 1 para las variables en cualquier término de las funciones (ya sea la función objetivo o la función en el lado izquierdo de las restricciones funcionales) en un modelo de programación lineal.

Aditividad

Establece que la entrada y salida de un recurso en particular al conjunto de actividades, deben ser la misma cantidad; o sea, que las actividades transforman los recursos y no los crean o destruyen. Esta suposición garantiza que la contribución total tanto a la función objetivo como a las restricciones es igual a la suma de las contribuciones individuales. Cuando en un problema dado no se tenga la aditividad puede recurrirse al empleo de otras técnicas de la programación matemática, dependiendo de cada caso particular.

Cada función en un modelo de programación lineal (ya sea la función objetivo o el lado izquierdo de las restricciones funcionales) es la suma de las contribuciones individuales de las actividades respectivas.

Divisibilidad

Las variables de decisión en un modelo de programación lineal pueden tomar cualquier valor, incluyendo valores no enteros, que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad. Así, estas variables no están restringidas a sólo valores enteros. Como cada variable de decisión representa el nivel de alguna actividad, se supondrá que las actividades se pueden realizar a niveles fraccionales.

Limitaciones del Modelo de Programación Lineal

Modelo Determinístico

El modelo de PL involucra únicamente tres tipos de parámetros: Cj, aij y bi; de ahí se sencillez y su gran aplicación. Sin embargo, el valor de dichos parámetros debe ser conocido y constante. Cuando el valor de los parámetros tiene un cierto riesgo o incertidumbre, puede utilizarse la programación estocástica, o realizarse un análisis de sensibilidad.

Modelo Estático

En algunos modelos matemáticos se han empleado con éxito las ecuaciones diferenciales, para inducir la variable tiempo en ellos. En este sentido, puede decirse que la PL utiliza un modelo estático, ya que la variable tiempo no se involucra formalmente. Adquiriendo un poco de experiencia en la formulación de modelos de PL, puede imbuirse la temporalidad mencionada, con el uso de subíndices en las variables.

Modelo que no Sub-optimiza

Debido a la forma que se plantea el modelo de PL, o encuentra la solución óptima o declara que ésta no existe. Cuando no es posible obtener una solución óptima y se debe tomar alguna, se recurre a otra técnica más avanzada que la PL, la cual se denomina programación lineal por metas.

Formulación de modelos de programación lineal

A continuación se presenta una lista, no exhaustiva, de los principios generales de modelación:

1. No debe elaborarse un modelo complicado cuando uno simple es suficiente.
2. El problema no debe ajustarse al modelo o al método de solución.
3. La fase deductiva de la modelación debe realizarse rigurosamente.
4. Los modelos deben validarse antes de su implantación.
5. Nunca debe pensarse que el modelo es el sistema real.
6. Un modelo debe criticarse por algo para lo que no fue hecho.
7. No venda un modelo como la perfección máxima.
8. Uno de los primeros beneficios de la modelación reside en el desarrollo del modelo.
9. Un modelo es tan bueno o tan malo como la información con la que trabaja.
10. Los modelos no pueden reemplazar al tomador de decisiones.

Recordemos que los modelos de Investigación de Operaciones conducen al ejecutivo a mejores decisiones y no a simplificar la toma de éstas.

Metodología de Formulación Directa para construir Modelos de Programación Lineal

Como su nombre lo indica, la formulación directa estriba en pasar directamente del sistema asumido al modelo de PL. Para tal efecto, se propone el siguiente orden: definir el objetivo, definir las variables de decisión, enseguida las restricciones estructurales y finalmente establecer las condiciones técnicas.

Definir el Objetivo: Consiste en definir un criterio de optimización el cuál puede ser Maximización o Minimización dependiendo del problema que se desee resolver, el cual es una función lineal de las diferentes actividades del problema. Bajo el criterio de optimización definido se pretende medir la contribución de las soluciones factibles que puedan obtenerse y determinar la óptima.

Definir las variables de decisión: Son las incógnitas del problema, básicamente consisten en los niveles de todas las Actividades que pueden llevarse a cabo en el problema a formular, estas pueden ser de tantos tipos diferentes como sea necesario, e incluir tantos subíndices como sea requerido.

Definir las restricciones: Son los diferentes requisitos que debe cumplir cualquier solución para que pueda llevarse a cabo. En cierta manera son las limitantes en los valores de los niveles de las diferentes actividades (variables). Las restricciones más comunes son de seis tipos, las cuales se listan a continuación:

- Restricción de capacidad: limitan el valor de las variables debido a la disponibilidad de horas – hombre, horas – máquina, espacio, etc.
- Restricción de mercado: Surge de los valores máximos y mínimos en las ventas o el uso del producto o actividad por realizar.
- Restricción de entradas: Son limitantes debido a la escasez de materias primas, mano de obra, dinero, etc.

- Restricción de calidad: Son las restricciones que limitan las mezclas de ingredientes, definiendo usualmente la calidad de los artículos por manufacturar.
- Restricciones de balance de material: Estas son las restricciones que definen las salidas de un proceso en función de las entradas, tomando en cuenta generalmente cierto porcentaje de merma o de desperdicio.
- Restricciones Internas: Son las que definen a una variable dada, en la formulación interna del problema, un ejemplo tipo es el de inventario.

Condiciones técnicas: En este apartado se establece que todas las variables deben tomar valores no negativos.

Formulación de Modelos de Programación Lineal

Algunos de los tipos de problemas que se pueden formular son:

- Planeación de la producción de inventarios
- Mezcla de Alimentos
- Transporte y asignación
- Planeación financiera
- Mercadotecnia
- Asignación de recursos

Métodos de Solución de Programación Lineal

La PL es una técnica mediante la cual se toman decisiones, reduciendo el problema bajo estudio a un modelo matemático general, el cual debe ser resuelto por métodos cuantitativos.

Método Gráfico

El método gráfico se utiliza para la solución de problemas de PL, representando geométricamente a las restricciones, condiciones técnicas y el objetivo.

El modelo se puede resolver en forma gráfica solo si tiene dos variables. Para modelos con tres o más variables, el método gráfico es impráctico o imposible.

Cuando los ejes son relacionados con las variables del problema, el método es llamado método gráfico en actividad. Cuando se relacionan las restricciones tecnológicas se denomina método gráfico en recursos.

Los pasos necesarios para realizar el método son nueve:

1. Graficar las soluciones factibles, o el espacio de soluciones (factible), que satisfagan todas las restricciones en forma simultánea.
2. Las restricciones de no negatividad Xi>=0 confían todos los valores posibles.
3. El espacio encerrado por las restricciones restantes se determinan sustituyendo en primer término <= por (=) para cada restricción, con lo cual se produce la ecuación de la línea recta.
4. Trazar cada línea recta en el plano y la región en la cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad lo indica la dirección de la flecha situada sobre la línea recta asociada.
5. Cada punto contenido o situado en la frontera del espacio de soluciones satisface todas las restricciones y por consiguiente, representa un punto factible.
6. Aunque hay un número infinito de puntos factibles en el espacio de soluciones, la solución óptima puede determinarse al observar la dirección en la cual aumenta la función objetivo.
7. Las líneas paralelas que representan la función objetivo se trazan mediante la asignación de valores arbitrarios a fin de determinar la pendiente y la dirección en la cual crece o decrece el valor de la función objetivo.

Ejemplo

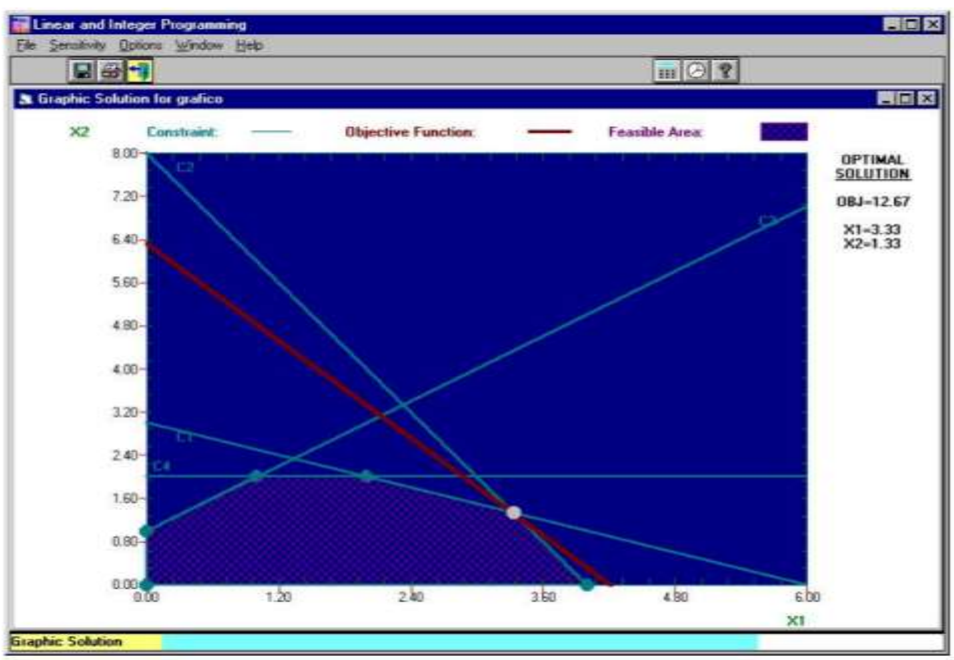
Maximizar Z = 3X1 + 2X2

restricciones :	X1 + 2X2 <=6	(1)
	2X1 + X2 <=8	(2)
	-X1 + X2 <=1	(3)
	X2 <=2	(4)
	X1 >=0	(5)
	X2 >=0	(6)

Convirtiendo las restricciones a igualdad y representándolas gráficamente se tiene:

X1 + 2X2 = 6	(1)
2X1 + X2 = 8	(2)
-X1 + X2 = 1	(3)
X2 = 2	(4)
X1 = 0	(5)
X2 = 0	(6)

En la siguiente figura se presentan las posibles soluciones:



Soluciones

Maximizar Z = 3X1 + 2X2

Punto	(X1, X2)	Z
A	(0, 0)	0
B	(4, 0)	12
C	(3.3, 1.3)	12.6 (óptima)
D	(2, 3)	12
E	(1, 3)	9
F	(0, 2)	4

Para obtener la solución gráfica, después de haber obtenido el espacio de solución y graficada la función objetivo el factor clave consiste en decidir la dirección de mejora de la función objetivo.

5.2. Programación entera

Método Simplex

En la solución gráfica observamos que la solución óptima está asociada siempre con un punto extremo del espacio de soluciones. El método simplex emplea un proceso iterativo que principia en un punto extremo factible, normalmente el origen, y se desplaza sistemáticamente de un punto extremo factible a otro, hasta que se llega por último al punto óptimo.

Existen reglas que rigen la solución del siguiente punto extremo del método simplex:

1. El siguiente punto extremo debe ser adyacente al actual.
2. La solución no puede regresar nunca a un punto extremo considerando la anterioridad.

El algoritmo simplex da inicio en el origen, que suele llamarse solución inicial. Después se desplaza a un punto extremo adyacente. La elección específica de un punto a otro punto depende de los coeficientes de la función objetivo hasta encontrar el punto óptimo. Al aplicar la condición de optimidad a la tabla inicial seleccionamos a Xi como la variable que entra. En este punto la variable que sale debe ser una de las variables artificiales.

Los pasos del algoritmo simplex son:

1. Determinar una solución básica factible inicial.
2. Prueba de optimidad: determinar si la solución básica factible inicial es óptima y sólo si todos los coeficientes de la ecuación son no negativos (>=0). Si es así, el proceso termina; de otra manera se lleva a cabo una interacción para obtener la nueva solución básica factible inicial.
3. Condición de factibilidad.- Para todos los problemas de maximización y minimización, variable que sale es la variable básica que tiene la razón más pequeña (positiva). Una coincidencia se anula arbitrariamente.
4. Seleccionar las variables de holgura como las variables de inicio básicas.
5. Selecciona una variable que entra de entre las variables no básicas actuales que, cuando se incrementan arriba de cero, pueden mejorar el valor de la función objetivo. Si no existe la solución básica es la óptima, si existe pasar al siguiente paso.
6. Realizar el paso iterativo.

    a) Se determina la variable básica entrante mediante la elección de la variable con el coeficiente negativo que tiene el mayor valor absoluto de la ecuación. Se enmarca la columna correspondiente a a este coeficiente y se le da el nombre de columna pivote.
    b) Se determina la variable básica que sale, para esta, se toma cada coeficiente positivo (>0) de la columna enmarcada, se divide el lado derecho de cada

renglón entre estos coeficientes, se identifica la ecuación con el menor coeficiente y se selecciona la variable básica para esta ecuación.

c) Se determina la nueva solución básica factible construyendo una nueva tabla en la forma apropiada de eliminación de Gauss, debajo de la que se tiene. Para cambiar el coeficiente de la nueva variable básica en el renglón pivote a 1, se divide todo el renglón entre el número pivote, entonces:

Renglón pivote nuevo = renglón pivote antiguo / número pivote

Para completar la primera iteración es necesario seguir usando la eliminación de Gauss para obtener coeficientes de 0 para la nueva variable básica Xj en los otros renglones, para realizar este cambio se utiliza la siguiente fórmula:

Renglón nuevo = renglón antiguo – (coeficiente de la columna pivote X renglón pivote nuevo)

Cuando el coeficiente es negativo se utiliza la fórmula:

Renglón nuevo = renglón antiguo + (coeficiente de la columna pivote X renglón pivote nuevo)

Tabla Simplex

Como se capturaría la solución básica factible inicial en el siguiente ejemplo:

Sea:

Maximizar Z = 2X1 + 4X2

Sujeto a:

2X1 + X2 <= 230

X1 + 2X2 <= 250

X2 >=0

Todas las X1, X2 >=0

BASE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUCIÓN	RAZÓN
Z	0	-2	-4	0	0	0	0	0
S1	0	2	1	1	0	0	230	230/1
S2	0	1	2	0	1	0	250	250/2
S3	0	0	1	0	0	1	120	120/1

Seleccione la variable que entra y la variable que sale de la base:

Entra X2 y sale S3, se desarrolla la nueva tabla solución y se continua el proceso iterativo hasta encontrar la solución óptima si es que está existe.

Tabla Óptima

BASE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUCIÓN	RAZÓN
Z	0	0	0	0	2	0	500	
S1	0	0	0	1	-2	3	90	
X1	0	1	0	0	1	-2	10	
X2	0	0	1	0	0	1	120	

Solución: Z = $500

Fabricando

X1 = 10

X2 = 120

Sobrante de

S1 = 90

Tipo de solución: Óptima Múltiple.

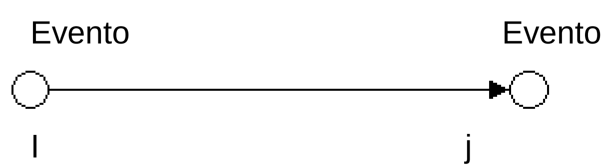
5.3. Teoría de Redes

Se llama red la representación gráfica de las actividades que muestran sus eventos, secuencias, interrelaciones y el camino (o ruta) crítico. No solamente se llama camino crítico al método sino también a la serie de actividades contadas desde la iniciación del proyecto hasta su terminación, que no tienen flexibilidad en su tiempo de ejecución, por lo que cualquier retraso que sufriera alguna de las actividades de la serie provocaría un retraso en todo el proyecto.

Desde otro punto de vista, camino crítico es la serie de actividades que indica la duración total del proyecto. Cada una de las actividades se representa por una flecha que empieza en un evento y termina en otro.

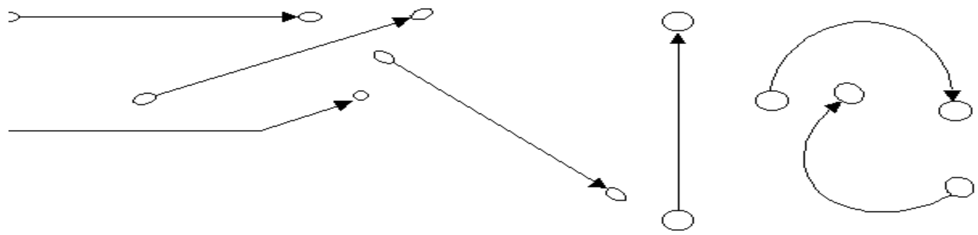
Se llama evento al momento de inicio o término de una actividad. Se determina en un tiempo variable entre el más temprano y el más tardío posible, de iniciación o de terminación.

A los eventos se les conoce también con los nombres de nodos.

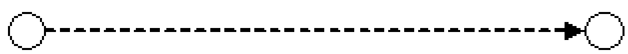


El evento inicial se llama i y el evento final se denomina j. El evento final de una actividad será el evento inicial de la actividad siguiente.

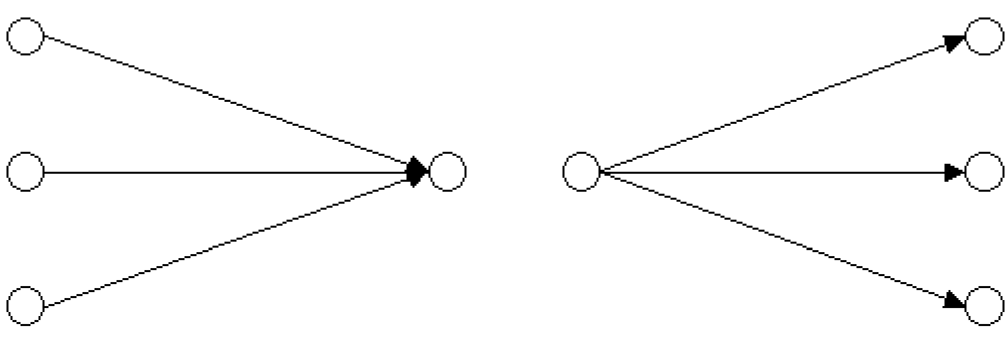
Las flechas no son vectores, escalares ni representan medida alguna. No interesa la forma de las flechas, ya que se dibujarán de acuerdo con las necesidades y comodidad de presentación de la red. Pueden ser horizontales, verticales, ascendentes, descendentes curvas, rectas, quebradas, etc.



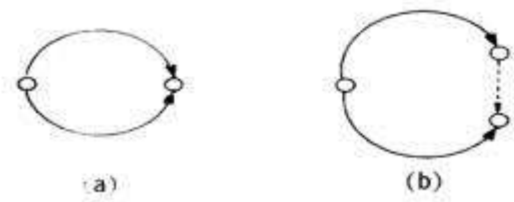
En los casos en que haya necesidad de indicar que una actividad tiene una interrelación o continuación con otra se dibujará entre ambas una línea punteada, llamada liga, que tiene una duración de cero.



La liga puede representar en algunas ocasiones un tiempo de espera para poder iniciar la actividad siguiente.



Varias actividades pueden terminar en un evento o partir de un mismo evento.

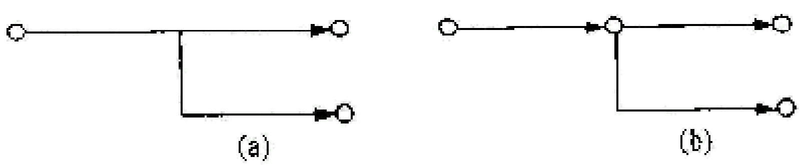


(a) Incorrecto, (b) Correcto

Al construir la red, debe evitarse lo siguiente:

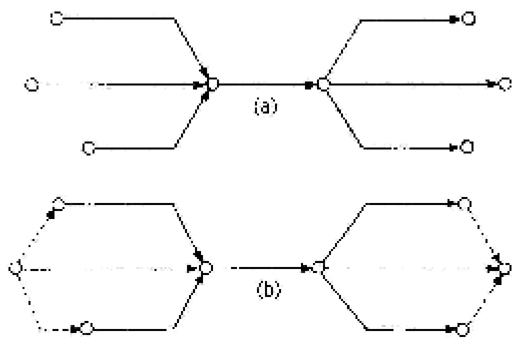
1. Dos actividades que parten de un mismo evento y llegan a un mismo evento. Esto produce confusión de tiempo y de continuidad. Debe abrirse el evento inicial o el evento final en dos eventos y unirlos con una liga.

2. Partir una actividad de una parte intermedia de otra actividad. Toda actividad debe empezar invariablemente en un evento y terminar en otro. Cuando se presenta este caso, a la actividad base o inicial se le divide en eventos basándose en porcentajes y se derivan de ellos las actividades secundadas.



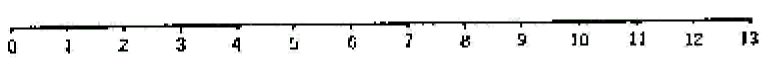
(a) Incorrecto, (b) Correcto.

3. Dejar eventos sueltos al terminar la red. Todos ellos deben relacionarse con el evento inicial o con el evento final.

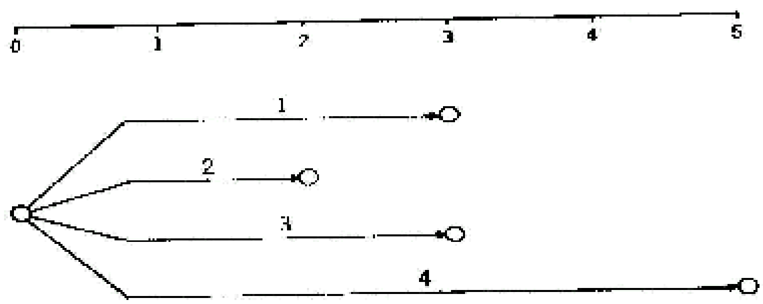


Procedimiento para trazar la red medida

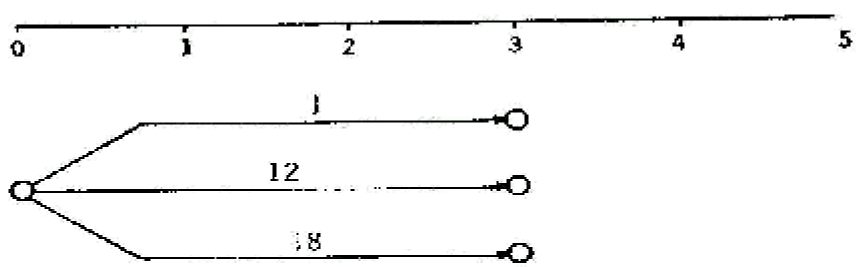
Para dibujar la red medida, se usa papel cuadriculado indicándose en la parte superior la escala con las unidades de tiempo escogidas, en un intervalo razonable para la ejecución de todo el proyecto. Como en este momento no se conoce la duración del mismo, ya que uno de los objetivos de la red es conocerlo, este intervalo sólo es aproximado.



A continuación se inicia la red dibujando las actividades que parten del evento cero. Cada una de ellas debe dibujarse de tal manera que el evento j termine, de acuerdo con la duración estándar, en el tiempo indicado en la escala superior. Ahora mostraremos la iniciación de las actividades 1, 2, 3, y 4 con duración de tres, dos, tres y cinco días respectivamente.

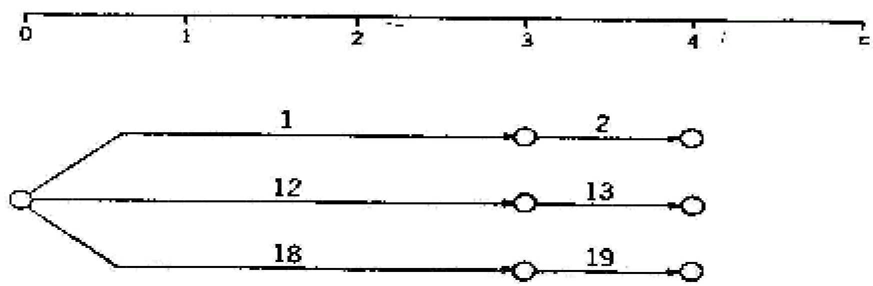


En el caso de la ampliación de la fábrica las actividades iniciales son las que se muestran en la figura que sigue, ya que las tres actividades que parten de cero tienen tres días de duración cada una.



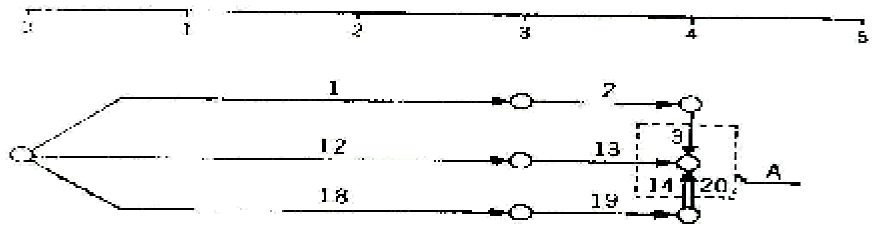
A continuación no debe tomarse la numeración progresiva de la matriz de secuencias para dibujar la red, sino las terminales de las actividades, de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha, según vayan apareciendo los eventos j.

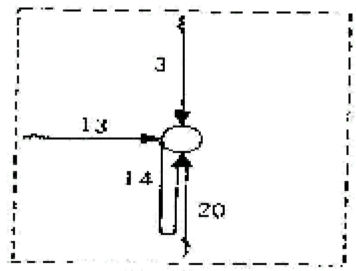
En el caso anterior buscamos las secuencias de la actividad 1, después de la 12 y al último de la 18. En su orden, buscamos las secuencias de la 2, de la 13 y de la 19. Si una actividad tiene cero de duración se dibuja verticalmente, ya sea ascendente o descendente, de tal manera que no ocupe tiempo dentro de la red.



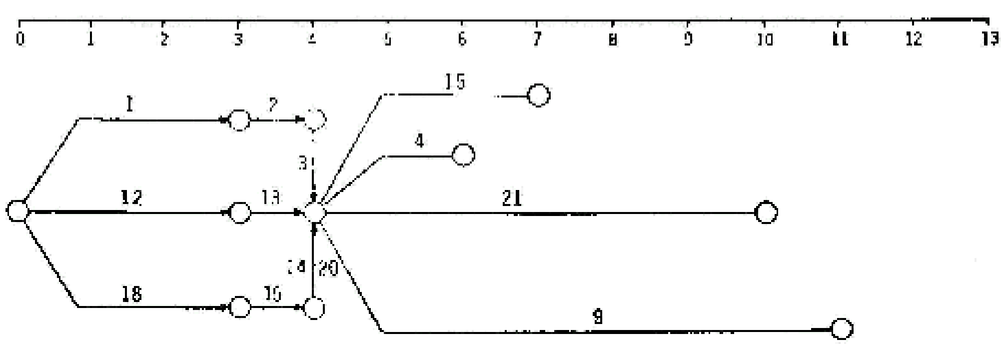
Rigurosamente, una actividad no puede tener tiempo de duración cero, ya que no existiría; sin embargo, algunas actividades tienen tan escasa duración que ésta es despreciable y no es conveniente que se considere una unidad de tiempo. Por ejemplo, si la unidad con la que se trabaja de un día y la duración de la actividad es de cinco o diez minutos, no hay razón para que esta actividad tenga asignado un día de trabajo. En el caso que se desarrolla, la aprobación de los presupuestos se supone que tomarán de media hora a una hora para su ejecución; pero como la unidad tomada en el proyecto es de un día, el tiempo de ejecución se considera cero.

De acuerdo con las anotaciones de la matriz de secuencias las actividades 3, 14 y 20 deben ser simultáneas, por lo que necesitamos un evento común para terminar las tres. Por necesidad de construcción, la actividad 14 quedará solamente indicada con el número en forma paralela a la actividad 3, que también tiene duración cero. También puede aparecer paralela a la actividad 20.



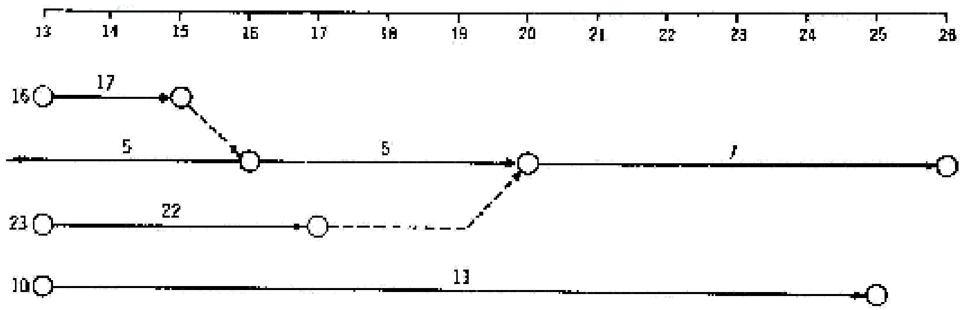


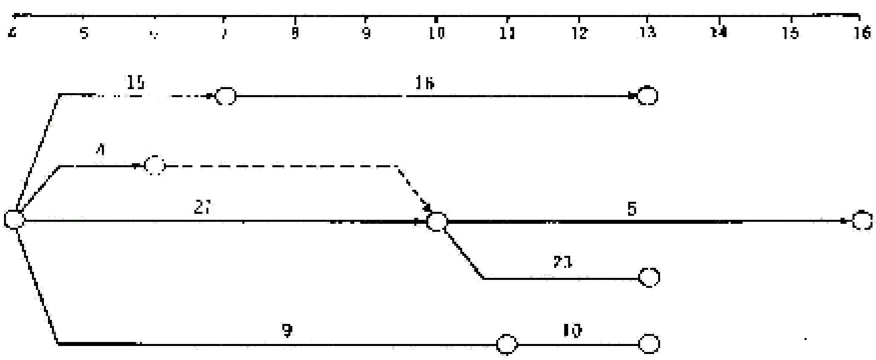
En este tipo de red no hay necesidad de indicar las actividades con flechas, sino sólo con líneas, excepto las ligas que indicarán la dirección de la continuidad. Para seguir con el dibujo de la red, se debe recordar que al evento común convergen las actividades 3, 14 y 20 y por lo tanto debemos buscar las secuencias a estas tres actividades, que partirán lógicamente del mismo evento. Continuamos alargando las terminales 15, 4, 21 y 9, en este orden precisamente, de acuerdo con el método adoptado.



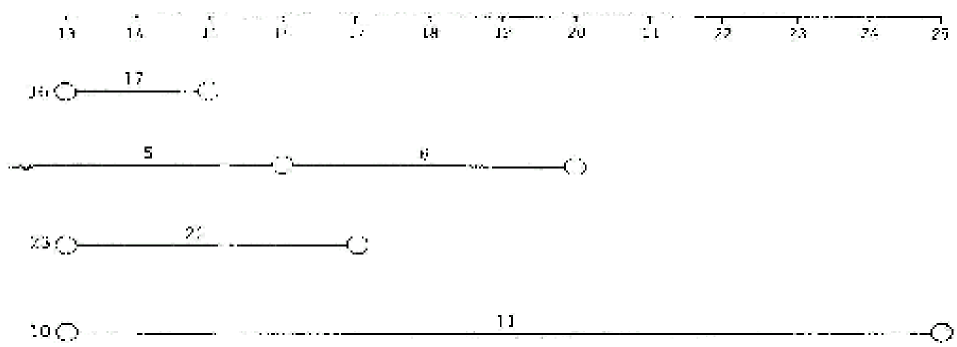
Así encontramos que después de la actividad 15 sigue la 16 con duración de seis días; después de la actividad 4 sigue la 5 con duración de seis días; después de la actividad

21 sigue la 23 con duración de tres días y también la 5 con duración de seis días; y después de la actividad 9 sigue la 10 con duración de dos días.

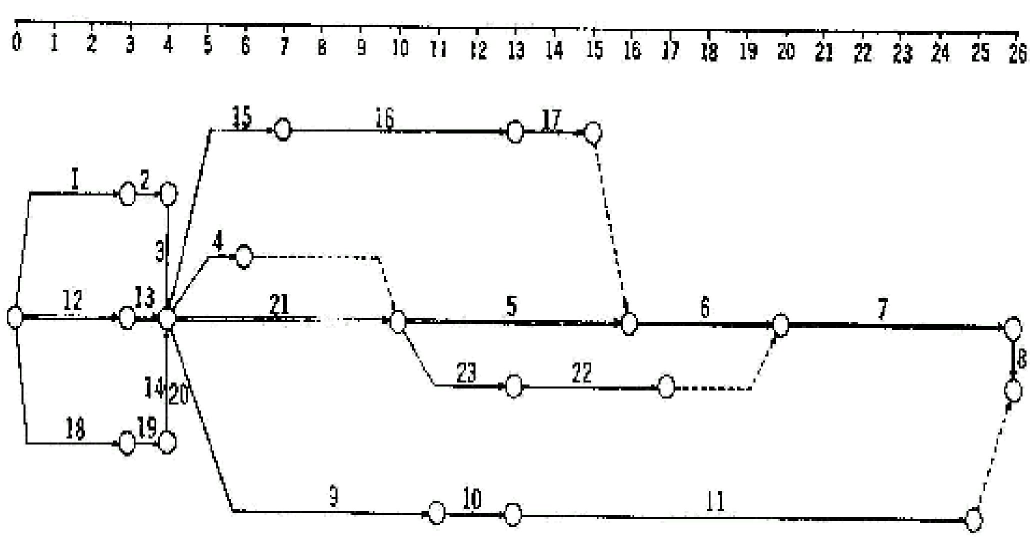




Cuando una actividad es secuencia de dos o más actividades anteriores, debe colocarse en la red a continuación de la actividad antecedente más adelantada. Por ello es conveniente hacer la red con lápiz para poder borrar las actividades y cambiarlas fácilmente de lugar. De esta manera, hay que modificar el diagrama de la figura anterior, ya que la actividad 5 es posterior a la 4 y a la 21; la quitamos del lugar que termina en fecha anterior y la colocamos después de la 21 que aparece en fecha más adelantada. Sin embargo, para que no se pierda la secuencia de la 4 con la 5 se coloca una liga entre las dos. Buscamos la continuación de las terminales de las actividades 16, 5, 23 y 10, encontrando que son respectivamente la 17 con dos días; la 6 con cuatro días; la 22 con cuatro días y la 11 con doce días.



Las actividades consecuentes a la 17, 6, 22 y 11 son respectivamente la 6 con cuatro días; la 7 con seis días y ninguna para la 11, por lo que en la red sólo colocamos una liga entre la terminación de la 17 y la iniciación de la 6 para indicar continuidad y otra entre la terminación de la 22 y la iniciación de la 7 con el mismo objeto de continuidad. Ahora colocamos la secuencia de la 6 solamente, pues ya hemos visto que la 11 es final de proceso. La secuencia de la actividad 6 es la 7 con seis días y la secuencia de la actividad 7 es la 8 con duración de cero. No existiendo ninguna otra actividad posterior a las terminales de la red, debe considerarse que se ha terminado con el proyecto, por lo que la duración del mismo es de 26 días.



En virtud de que no deben dejarse eventos sueltos, se pone una liga entre la terminal de la 11 y el evento final del proyecto, quedando toda la red de la siguiente manera y en la que se aprecian las siguientes particularidades:

a) Las actividades que tienen duración cero se indican en forma vertical, bien sea ascendente o descendente, como las correspondientes a las actividades 3, 20 y 8.
b) La actividad 14 con duración cero no aparece dibujada en la red por razones de construcción y sólo se indica junto con la actividad 20 que tiene las mismas características.
c) Las actividades que son consecuentes a dos o más actividades anteriores aparecen dibujadas a continuación de la antecedente que tenga en su evento final la fecha más alta. Como la actividad 5 que es consecuente de las actividades 4 y 21. La 4 termina al día 6 y la 21 termina el día 10. La actividad 7 es secuencia de las actividades 6 y 22 y está colocada enfrente de la que tiene la fecha más alta al terminar, o sea la actividad 6. Esta misma actividad 6 es posterior a las actividades 17 y 5 y está colocada a continuación de la 5 por la razón ya dada.
d) Las ligas que aparecen en la gráfica significan lo siguiente: la actividad 5 es continuación de la 4; la 6 es continuación de la 17; la 7 continúa de la 22 y la 11 acabará al concluir el proyecto.
e) El camino crítico es la serie de actividades que se inician en el evento i del proyecto y terminan en el evento j del mismo, sin sufrir interrupción por lo que señalan el tamaño o duración del proyecto, y está representado por las actividades 12, 13, 21, 5, 6, 7 y 8 trazadas con línea doble.

La red anterior se puede dibujar con colores para indicar diferentes responsabilidades: por ejemplo, la responsabilidad del ingeniero electricista se dibuja en rojo, la del ingeniero civil con verde y la del ingeniero de planta con azul.

Teoría general de Redes

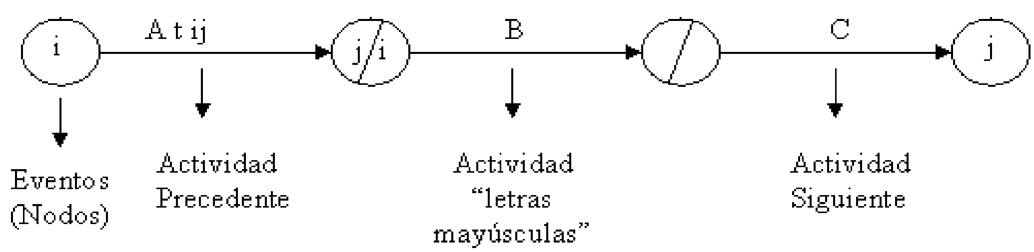
Conceptos básicos

Proyecto: Conjunto de actividades tendientes a la ejecución de un objetivo.

Actividad: Componente del proyecto que va a permitir cumplir con el objetivo fijado.

Evento: Parámetro que determina el inicio y fin de una actividad y el inicio y fin del proyecto.

Estructura básica



i: Inicio de la actividad

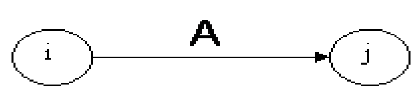
j: Fin de la actividad

tij: Tiempo de la actividad enmarcada dentro de ij

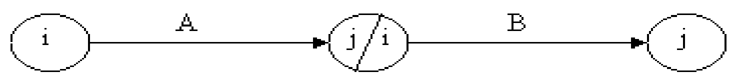
i>j: No se puede.

Reglas básicas para la construcción de la red

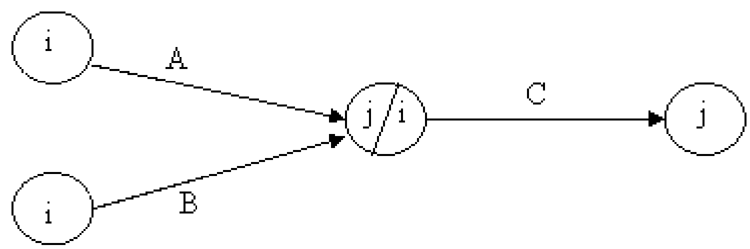
1. Se representan con flechas de izquierda a derecha
2. Toda actividad inicia y termina en un evento ó nodo.



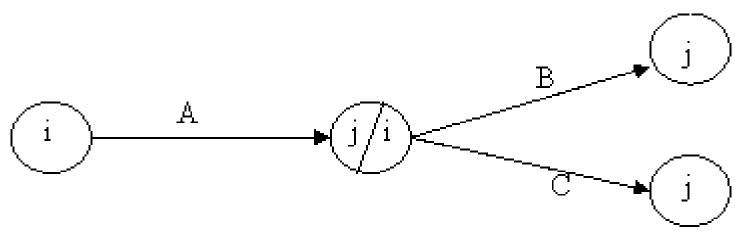
3. Si el inicio de una actividad depende o está determinado por el fin de una actividad precedente el evento inicial de dicha actividad debe ser el evento final de la actividad precedente.



4. Si el inicio de una actividad depende de la terminación de dos o más actividades precedentes, el evento inicial de dicha actividad debe ser el evento final de sus actividades precedentes. (Dependencia múltiple).



5. Si el inicio de dos o más actividades está determinado por la finalización de una actividad precedente, el evento inicial de dicha actividad debe ser el evento final de la actividad precedente.



6. Si dos o más actividades tienen en común su evento inicial y final, estas actividades son indeterminadas, para poder determinar dichas actividades se debe incluir "n-1" actividades ficticias donde "n" es el número de actividades que se trabajan, ya sea en el evento inicial o en el evento final.

Nota: Sólo una de las actividades puede ir directamente del evento inicial al final.

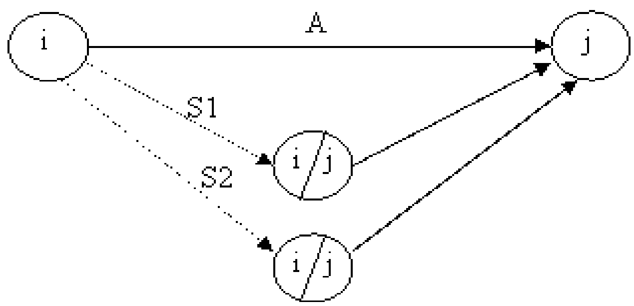
Actividad Ficticia: Es una actividad que no consume tiempo ni recursos.

Costo = $ 0

Tiempo = 0 unidades de tiempo

Se representa por una flecha orientada no continua y se nombra con la letra Si para todo i: 1,...n.

n - 1:



Actividad real:

Costo >0 $

Tiempo > 0 unidades de tiempo

A – Z

Ai - Zi

Nota: La actividad ficticia no es más que la proyección de las actividades que terminan en el evento inicial de dicha actividad.

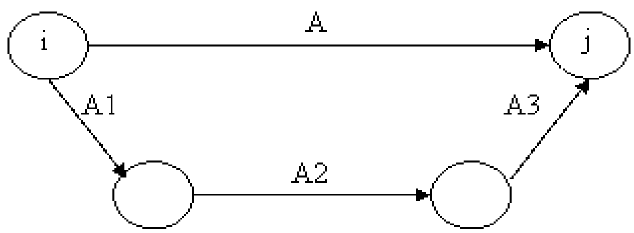
7. Cuando un evento termina y de él parten más actividades que no son dependientes recíprocamente, entonces, la dependencia se tiene que mostrar o determinar con ayuda de actividades ficticias.

8. Podemos utilizar la cantidad necesaria de actividades ficticias, pero como se habla de técnica de optimización, el número de actividades debe ser mínimo.

9. Si para mayor descripción de una macro actividad es necesario generar detalle de sus actividades componentes, utilice micro actividades denotadas con la letra mayúscula de la macro actividad y el subíndice i para todo i: 1...n.

Ejemplo: El proyecto de una obra civil: Adecuar salones

1. Diseño
2. Adecuación
3. Acabados



10. Una actividad, cualquiera que ella sea, puede suceder solamente una vez.

5.4. Redes PERT/CPM

Los proyectos en gran escala por una sola vez han existido desde tiempos antiguos; este hecho lo atestigua la construcción de las pirámides de Egipto y los acueductos de Roma. Pero sólo desde hace poco se han analizado por parte de los investigadores operacionales los problemas gerenciales asociados con dichos proyectos.

El problema de la administración de proyectos surgió con el proyecto de armamentos del Polaris, empezando 1958. Con tantas componentes y subcomponentes juntos producidos por diversos fabricantes, se necesitaba una nueva herramienta para programar y controlar el proyecto. El PERT (evaluación de programa y técnica de revisión) fue desarrollado por científicos de la oficina Naval de Proyectos Especiales. Booz, Allen y Hamilton y la División de Sistemas de Armamentos de la Corporación Lockheed Aircraft. La técnica demostró tanta utilidad que ha ganado amplia aceptación tanto en el gobierno como en el sector privado.

Casi al mismo tiempo, la Compañía DuPont, junto con la División UNIVAC de la Remington Rand, desarrolló el método de la ruta crítica (CPM) para controlar el mantenimiento de proyectos de plantas químicas de DuPont. El CPM es idéntico al PERT en concepto y metodología. La diferencia principal entre ellos es simplemente el método por medio del cual se realizan estimados de tiempo para las actividades del proyecto. Con CPM, los tiempos de las actividades son determinísticos. Con PERT, los tiempos de las actividades son probabilísticos o estocásticos.

El PERT/CPM fue diseñado para proporcionar diversos elementos útiles de información para los administradores del proyecto. Primero, el PERT/CPM expone la "ruta crítica" de un proyecto. Estas son las actividades que limitan la duración del proyecto. En otras palabras, para lograr que el proyecto se realice pronto, las actividades de la ruta crítica deben realizarse pronto. Por otra parte, si una actividad de la ruta crítica se retarda, el proyecto como un todo se retarda en la misma cantidad. Las actividades que no están en la ruta crítica tienen una cierta cantidad de holgura; esto es, pueden empezarse más tarde, y permitir que el proyecto como un todo se mantenga en programa. El PERT/CPM identifica estas actividades y la cantidad de tiempo disponible para retardos.

El PERT/CPM también considera los recursos necesarios para completar las actividades. En muchos proyectos, las limitaciones en mano de obra y equipos hacen que la programación sea difícil. El PERT/CPM identifica los instantes del proyecto en que estas restricciones causarán problemas y de acuerdo a la flexibilidad permitida por los tiempos de holgura de las actividades no críticas, permite que el gerente manipule ciertas actividades para aliviar estos problemas.

Finalmente, el PERT/CPM proporciona una herramienta para controlar y monitorear el progreso del proyecto. Cada actividad tiene su propio papel en éste y su importancia en la terminación del proyecto se manifiesta inmediatamente para el director del mismo. Las actividades de la ruta crítica, permiten por consiguiente, recibir la mayor parte de la atención, debido a que la terminación del proyecto, depende fuertemente de ellas. Las actividades no críticas se manipularán y remplazarán en respuesta a la disponibilidad de recursos.

Antecedentes

Dos son los orígenes del método del camino crítico: el método PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) desarrollo por la Armada de los Estados Unidos de América, en 1957, para controlar los tiempos de ejecución de las diversas actividades integrantes de los proyectos espaciales, por la necesidad de terminar cada una de ellas dentro de los intervalos de tiempo disponibles. Fue utilizado originalmente por el control de tiempos del proyecto Polaris y actualmente se utiliza en todo el programa espacial.

El método CPM (*Crítical Path Method*), el segundo origen del método actual, fue desarrollado también en 1957 en los Estados Unidos de América, por un centro de investigación de operaciones para la firma Dupont y Remington Rand, buscando el control y la optimización de los costos de operación mediante la planeación adecuada de las actividades componentes del proyecto.

Ambos métodos aportaron los elementos administrativos necesarios para formar el método del camino crítico actual, utilizando el control de los tiempos de ejecución y los costos de operación, para buscar que el proyecto total sea ejecutado en el menor tiempo y al menor costo posible.

El método del camino crítico es un proceso administrativo de planeación, programación, ejecución y control de todas y cada una de las actividades componentes de un proyecto que debe desarrollarse dentro de un tiempo crítico y al costo óptimo.

El campo de acción de este método es muy amplio, dada su gran flexibilidad y adaptabilidad a cualquier proyecto grande o pequeño. Para obtener los mejores resultados debe aplicarse a los proyectos que posean las siguientes características:

- Que el proyecto sea único, no repetitivo, en algunas partes o en su totalidad.
- Que se deba ejecutar todo el proyecto o parte de el, en un tiempo mínimo, sin variaciones, es decir, en tiempo crítico.
- Que se desee el costo de operación más bajo posible dentro de un tiempo disponible.

Dentro del ámbito aplicación, el método se ha estado usando para la planeación y control de diversas actividades, tales como construcción de presas, apertura de caminos, pavimentación, construcción de casas y edificios, reparación de barcos, investigación de mercados, movimientos de colonización, estudios económicos regionales, auditorías, planeación de carreras universitarias, distribución de tiempos de salas de operaciones, ampliaciones de fábrica, planeación de itinerarios para cobranzas, planes de venta, censos de población, etc., etc.

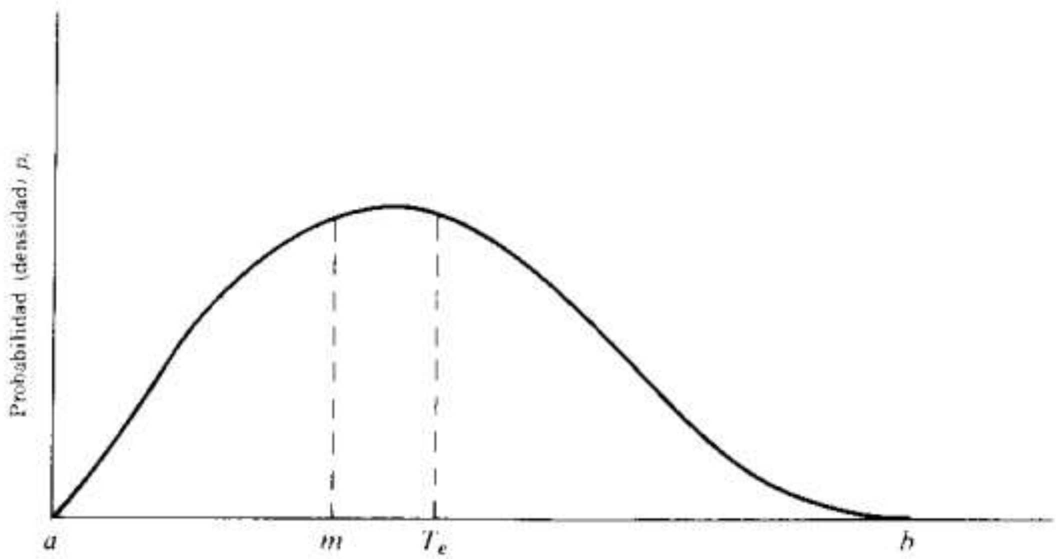
Como se indicó antes, la principal diferencia entre PERT y CPM es la manera en que se realizan los estimados de tiempo. E1 PERT supone que el tiempo para realizar cada una de las actividades es una variable aleatoria descrita por una distribución de probabilidad. E1 CPM por otra parte, infiere que los tiempos de las actividades se conocen en forma determinísticas y se pueden variar cambiando el nivel de recursos utilizados.

La distribución de tiempo que supone el PERT para una actividad es una distribución beta. La distribución para cualquier actividad se define por tres estimados:

- el estimado de tiempo más probable, m;
- el estimado de tiempo más optimista, a; y
- el estimado de tiempo más pesimista, b.

La forma de la distribución se muestra en la siguiente Figura. E1 tiempo más probable es el tiempo requerido para completar la actividad bajo condiciones normales. Los tiempos optimistas y pesimistas proporcionan una medida de la incertidumbre inherente en la actividad, incluyendo desperfectos en el equipo, disponibilidad de mano de obra, retardo en los materiales y otros factores.

a = estimado optimista
b = estimado pesimista
m = estimado más probable que se hace
t = tiempo de actividad
T_e = tiempo esperado de actividad



Con la distribución definida, la media (esperada) y la desviación estándar, respectivamente, del tiempo de la actividad para la actividad Z puede calcularse por medio de las fórmulas de aproximación.

$$T_e(Z) = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\sigma(Z) = \frac{b - a}{6}$$

El tiempo esperado de finalización de un proyecto es la suma de todos los tiempos esperados de las actividades sobre la ruta crítica. De modo similar, suponiendo que las distribuciones de los tiempos de las actividades son independientes (realísticamente, una suposición fuertemente cuestionable), la varianza del proyecto es la suma de las varianzas de las actividades en la ruta crítica. Estas propiedades se demostrarán posteriormente.

En CPM solamente se requiere un estimado de tiempo. Todos los cálculos se hacen con la suposición de que los tiempos de actividad se conocen. A medida que el proyecto avanza, estos estimados se utilizan para controlar y monitorear el progreso. Si ocurre algún retardo en el proyecto, se hacen esfuerzos por lograr que el proyecto quede de nuevo en programa cambiando la asignación de recursos.

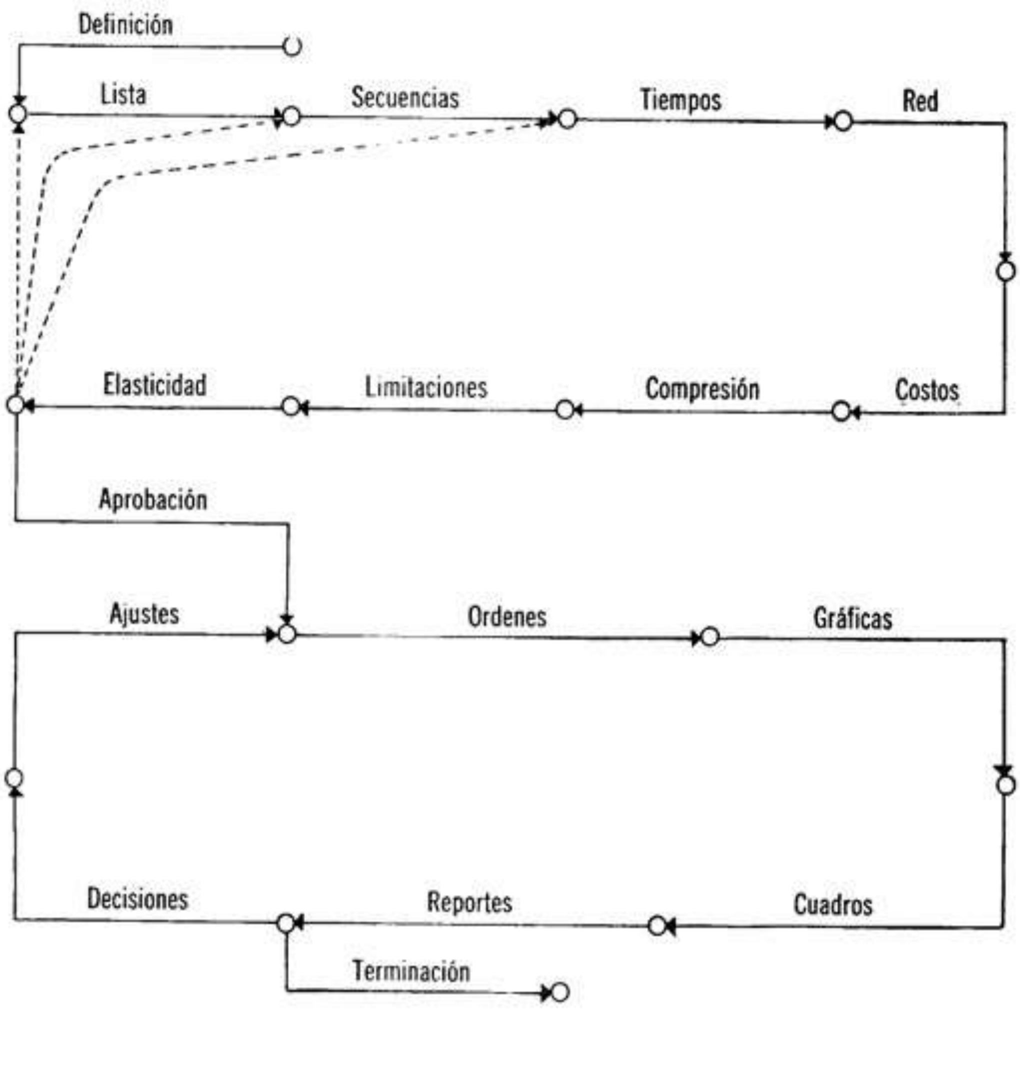
Metodología

El Método del Camino Crítico consta de dos ciclos:

1. Planeación y Programación
   - Definición del proyecto
   - Lista de Actividades
   - Matriz de Secuencias
   - Matriz de Tiempos
   - Red de Actividades
   - Costos y pendientes
   - Compresión de la red
   - Limitaciones de tiempo, de recursos y económicos
   - Matriz de elasticidad
   - Probabilidad de retraso

2. Ejecución y Control

- Aprobación del proyecto
- Ordenes de trabajo
- Gráficas de control
- Reportes y análisis de los avances
- Toma de decisiones y ajustes



Definición del Proyecto

En toda actividad a realizar se requieren conocimientos precisos y claros de lo que se va a ejecutar, de su finalidad, viabilidad, elementos disponibles, capacidad financiera, etc. Esta etapa aunque esencial para la ejecución del proyecto no forma parte del método. Es una etapa previa que se debe desarrollar separadamente y para la cual también puede utilizarse el Método del Camino Crítico. Es una investigación de objetivos, métodos y elementos viables y disponibles.

Lista de Actividades

Es la relación de actividades físicas o mentales que forman procesos interrelacionados en un proyecto total. En general esta información es obtenida de las personas que intervendrán en la ejecución del proyecto, de acuerdo con la asignación de responsabilidades y nombramientos realizados en la *Definición del Proyecto*.

Las actividades pueden ser físicas o mentales, como construcciones, tramites, estudios, inspecciones, dibujos, etc. En términos generales, se considera Actividad a la serie de operaciones realizadas por una persona o grupo de personas en forma continua, sin interrupciones, con tiempos determinables de iniciación y terminación. Esta lista de actividades sirve de base a las personas responsables de cada proceso para que elaboren sus presupuestos de ejecución.

Ejemplo

a) Jefes de mantenimiento y producción

- Elaboración del proyecto parcial de ampliación.
- Calculo del costo y preparación de presupuestos.
- Aprobación del proyecto.
- Desempaque de las maquinas nuevas.
- Colocación de las maquinas viejas y nuevas.
- Instalación de las maquinas.
- Pruebas generales.
- Arranque general.
- Revisión y limpieza de máquinas viejas.
- Pintura de máquinas viejas.
- Pintura y limpieza del edificio.

b) Ingeniero electricista

- Elaboración del proyecto eléctrico.
- Calculo de los costos y presupuestos.
- Aprobación del proyecto.
- Instalación de un transformador nuevo.
- Instalación de nuevo alumbrado.
- Instalación de interruptores y arrancadores.

c) Ingeniero contratista.

- Elaboración del proyecto de obra muerta.
- Cálculo de los costos y presupuestos.
- Aprobación del proyecto.
- Cimentación de las máquinas.
- Pisos nuevos.
- Colocación de ventanas nuevas.

Limitaciones de Tiempo

Se debe determinar el tiempo normal de ejecución de la red y si no puede realizarse en el intervalo disponible, se deberá comprimir la red al tiempo necesario, calculando el costo incrementado. El tiempo óptimo de ejecución indicará si puede hacerse o no el proyecto dentro del plazo señalado.

Limitaciones de Recursos

Es posible en cualquier proyecto se suscite el caso de tener recursos humanos o materiales limitados, por lo que dos actividades deben realizarse durante el mismo lapso con personal diferente o maquinaria diferente, no se pueda ejecutar y de esta manera no habría más que esperar que se termine una actividad para empezar la siguiente.

En el siguiente proyecto nos aparecen las siguientes limitaciones:

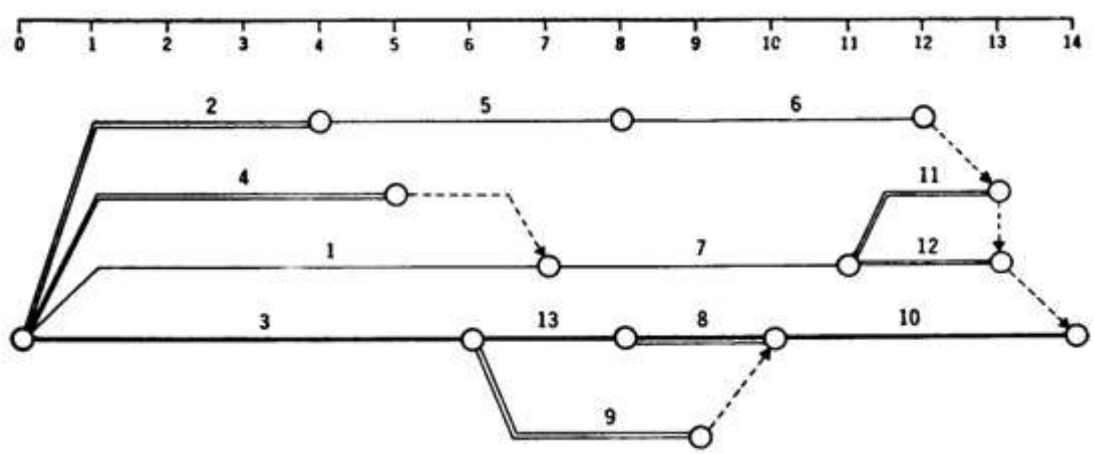
Actividad	*Secuencias*	*Tiempos*				*Costos*		
		o	*M*	*p*	*t*	$N	$L	*m*
0	1, 2, 3, 4	–	–	—	–	—	—	—
1	7	3	7	11	7	600	1 000	100
2	5	2	4	6	8	700	1 200	250
3	9, 13	2	5	10	6	100	700	150
4	7	2	5	8	5	600	900	100
5	6	3	4	5	4	400	800	400
6	—	1	3	7	4	200	800	200
7	11, 12	2	4	6	4	300	600	150
8	10	2	2	2	2	700	700	0
9	10	2	3	4	3	100	600	500
10	—	2	3	6	4	200	600	200
11	—	1	2	3	2	300	600	900
12	—	1	2	3	2	300	600	300
13	8	1	1	5	2	200	400	200
$F = 500 al día						4 700		

a) Las actividades 11 y 12 deben realizarse con la misma máquina, por lo que se hace necesario terminar una para poder empezar la otra.

b) Las actividades 2 y 4 deben llevarse a efecto con el mismo personal.

c) Las actividades 8 y 9 deben ser emprendidas también con la misma máquina.

Para la solución de este problema debe hacerse primero una red medida sin limitaciones, luego se estudiara sobre esa misma red, que actividades de las limitadas deben realizarse primero y cuales después. Una vez que se tome la decisión, se hace el ajuste en la matriz de secuencias y se dibuja la red correspondiente con esos ajustes.



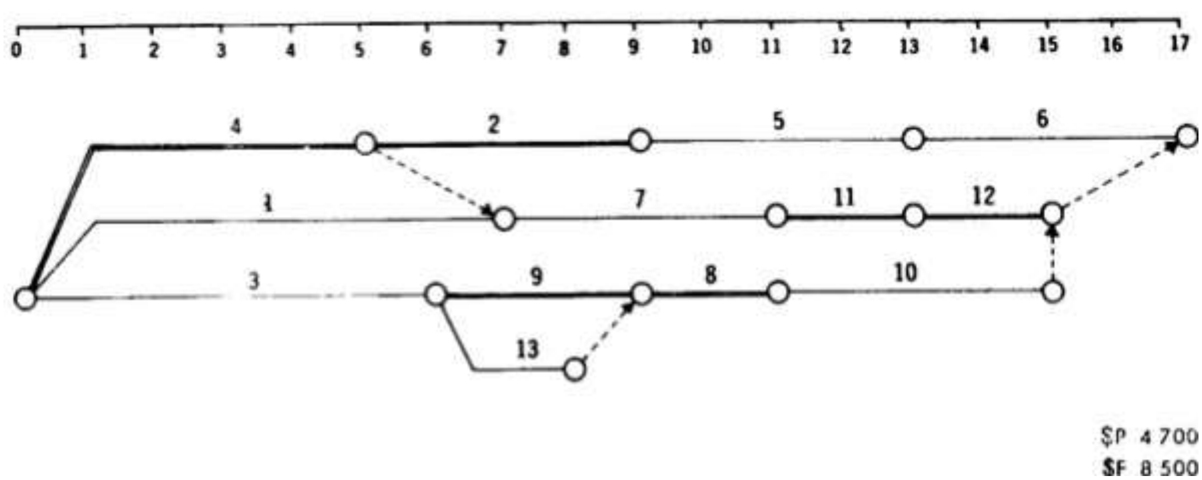
Actividad	*Secuencias*	*t*
0	1, 2, 3, 4	—
1	7	7
2	5	4
3	9, 13	6
4	7, 2	5
5	6	4
6	—	4
7	11, 12	4
8	10	2
9	10, 8	3
10	—	4
11	12	2
12	—	2
13	8	2

Aquí podemos observar que por conveniencia es mejor hacer la actividad 11 antes que la 12; la actividad 4 antes que la 2 y la actividad 9 antes que la 8; por ende adicionamos las secuencias correspondientes a las actividades 11, 2 y 8 en la matriz de información:

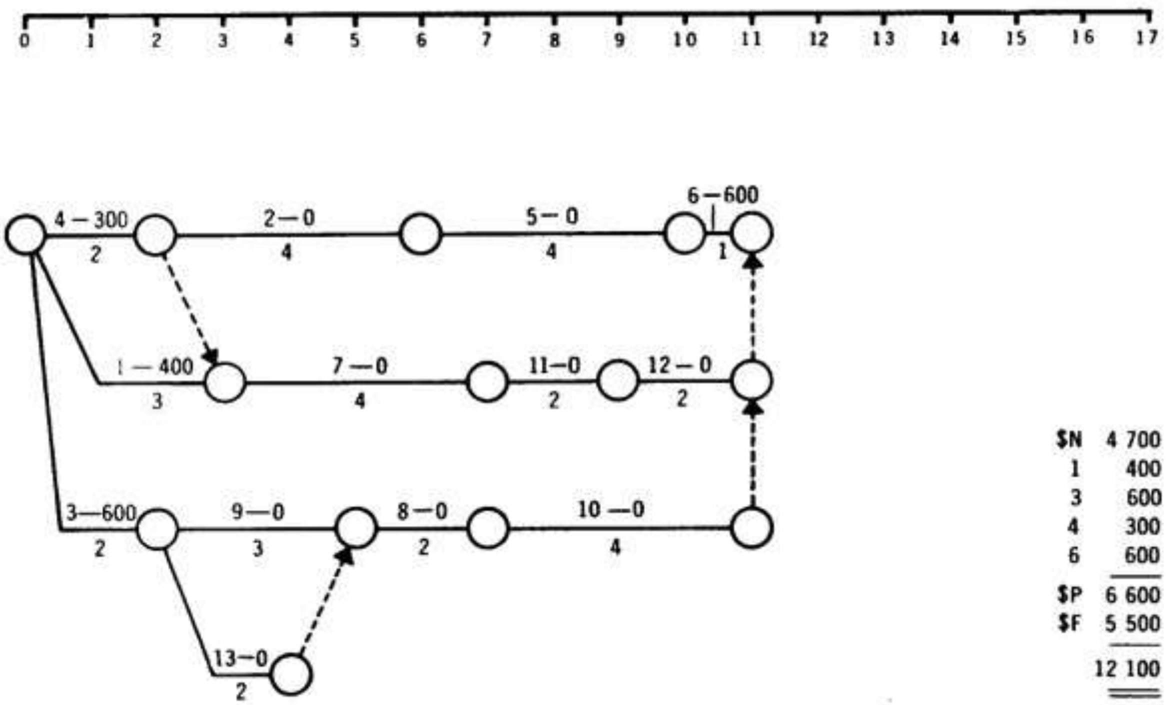
Con estos ajustes ya se podría dibujar la red que contendría las limitaciones de recursos, pudiéndose hacer los estudios de optimización en el tiempo y en los costos; esto lo mostraremos en los dibujos siguientes después de hablar sobre las limitaciones económicas.

Limitaciones Económicas

Se determinara el costo óptimo para conocer si se puede hacer el proyecto con los recursos económicos disponibles. Si hay la posibilidad de realizarlo, se buscara el tiempo total más favorable para las necesidades y objetivos del proyecto; en caso contrario pues simplemente el proyecto deberá esperar hasta tener los recursos económicos mínimos para poder realizarlo.

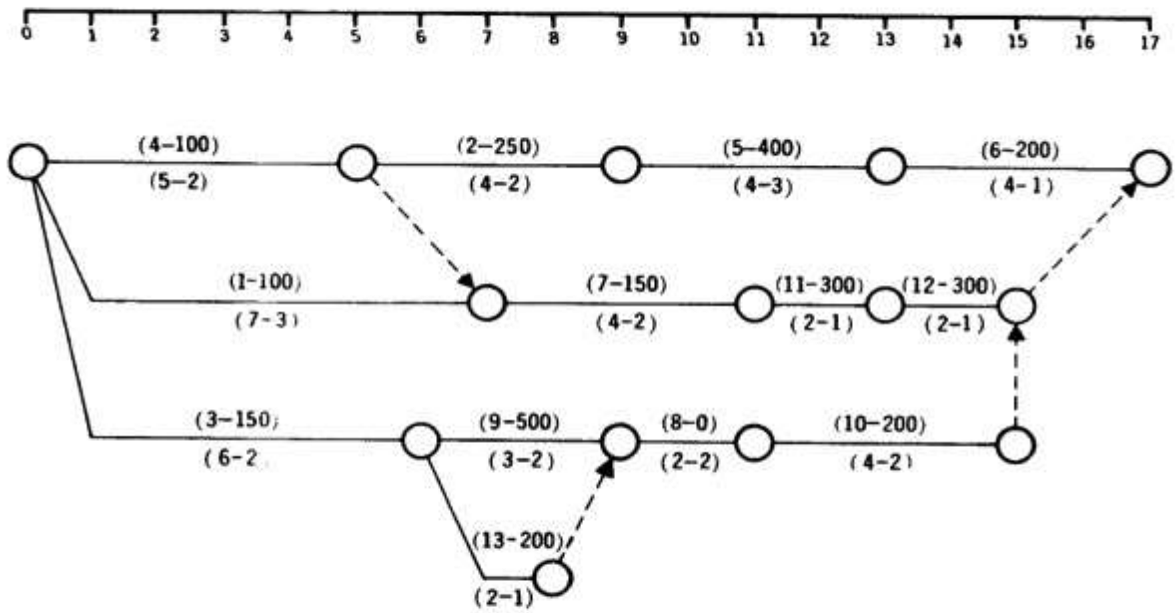


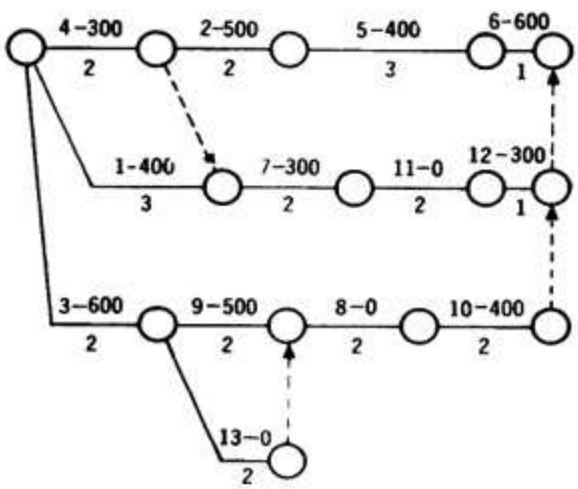
Red con limitaciones de recursos a tiempo normal



$N	4 700
1	400
3	600
4	300
6	600
$P	6 600
$F	5 500
	12 100

Red con limitaciones de recursos a costo óptimo





$N	4 700
1	400
2	500
3	600
4	300
5	400
6	600
7	300
9	500
10	400
12	300
$R	9 000
$F	4 000
TOTAL	13 000

Red con limitaciones de recursos a tiempo óptimo

Modelo de Inventarios

Las empresas industriales mantienen inventarios de materias primas y de productos terminados. Los inventarios de materias primas sirven como entradas al proceso de producción y los inventarios de productos terminados sirven para satisfacer la demanda de los clientes. Puesto que estos inventarios representan frecuentemente una considerable inversión, las decisiones con respecto a las cantidades de inventarios son importantes. Los modelos de inventario y la descripción matemática de los sistemas de inventario constituyen una base para estas decisiones.

Mantener un inventario (existencia de bienes) para su venta o uso futuro es una práctica común en el mundo de los negocios. Las empresas de venta al menudeo, los mayoristas, los fabricantes y aún los bancos de sangre por lo general almacenan bienes o artículos. ¿Cómo decide una instalación de este tipo sobre su "política de inventarios", es decir, cuándo y cómo se reabastece?

En una empresa pequeña, el administrador puede llevar un recuento de su inventario y tomar estas decisiones. Sin embargo, como esto puede no ser factible incluso en empresas chicas, muchas compañías han ahorrado grandes sumas de dinero al aplicar la "administración científica del inventario". En particular, ellos:

1. Formulan un modelo matemático que describe el comportamiento del sistema de inventarios.
2. Derivan una política óptima de inventarios con respecto a este modelo.
3. Con frecuencia, utilizan una computadora para mantener un registro de los niveles de inventario y señalar cuándo deben reabastecer.

Modelo de Inventario sin Déficit

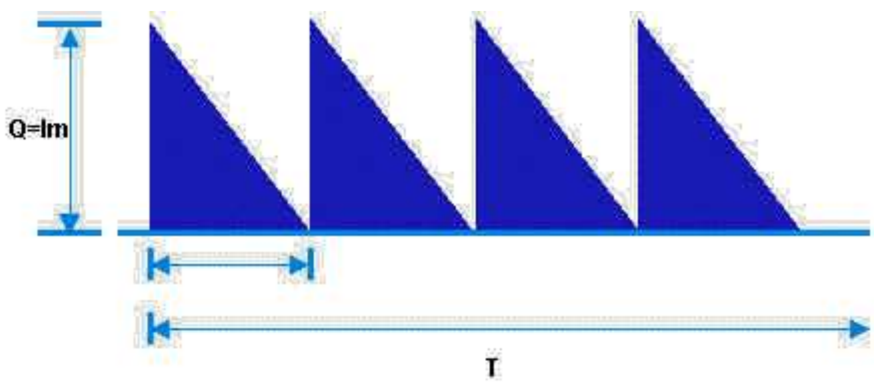
Este modelo tiene como bases el mantener un inventario sin falta de productos para desarrollar las actividades de cualquier empresa. Este es un modelo de inventarios que se encuentra basado en las siguientes suposiciones:

- La demanda se efectúa a tasa constante.
- El reemplazo es instantáneo (la tasa se reemplazo es infinita).
- Todos los coeficientes de costos son constantes.

En este modelo no se permite la falta de productos para la venta, es decir, una empresa que maneje este modelo de inventario no se puede quedar sin mercancías para la venta.

En la siguiente figura se ilustra esquemáticamente este modelo.

Q = Im x t x T



Símbolos

Q = Cantidad optima a pedir

Im = Inventario Máximo

t = Periodo entre pedidos

T = Periodo de Planeación

En este modelo se representan iguales el inventario máximo y la cantidad económica pedida.

Cabe mencionar que esto no siempre es verdadero.

El costo total para un periodo en este modelo está conformado por tres componentes de costo:

- Costo unitario del producto (C_1)
- Costo de ordenar una compra (C_2)
- Costo de mantener un producto en almacén (C_3)

El costo para un periodo estará conformado de la siguiente manera:

Costo por periodo = [Costo unitario por periodo] + [Costo de ordenar un pedido] + [Costo de mantener el inventario en un periodo]

El costo total para el periodo de planeación estará conformado de la manera siguiente:

Costo total = Costo por periodo x Número de pedidos a realizar

A continuación, analizamos las ecuaciones:

a) *Costo unitario por periodo*

El costo unitario por periodo simplemente es el costo de la cantidad óptima a pedir.

$$C1\ Q$$

b) *Costo de ordenar una compra*

Puesto que solo se realiza una compra en un periodo el costo de ordenar una compra está definido por:

$$C2$$

c) *Costo de mantener el inventario por periodo*

El inventario promedio por periodo es [Q / 2]. Por consiguiente el costo de mantenimiento del inventario por periodo es:

Para determinar el costo en un periodo se cuenta con la siguiente ecuación:

$$\frac{Q}{2} C_3 t$$

El tiempo de un periodo se expresa de la siguiente manera:

$$t = \frac{Q}{D}$$

Nota: La demanda del artículo en un periodo de planeación se define con la letra D.

El número de periodos se expresa de la manera siguiente:

$$N = \frac{D}{Q}$$

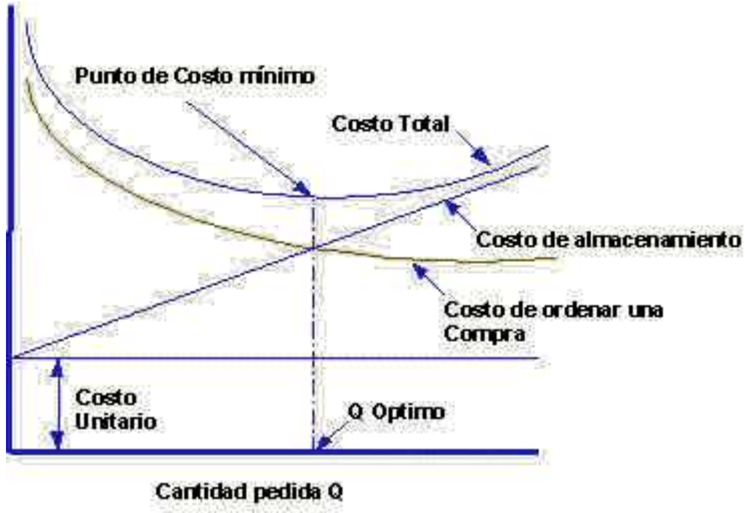
Si se desea determinar el costo total en el periodo de planeación (T) se multiplica el costo de un periodo por el número de inter períodos (t) que contenga el periodo de planeación. Para determinar este costo se aplica la siguiente ecuación:

Costo Total = Costo (Q*)t

Otra manera de representar el costo total para el periodo de planeación es por medio de la siguiente ecuación:

$$CostoTotal = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + \frac{Q}{2} C_3$$

Cuando los componentes del costo total se representan gráficamente se obtiene un punto óptimo (de costo mínimo).



Una forma de determinar la cantidad óptima a pedir es suponer diversos valores de Q y sustituir en la ecuación anterior hasta encontrar el punto de costo mínimo. Un procedimiento más sencillo consiste en derivar la ecuación del costo total con respecto a Q e igualar la derivada a cero.

$$\frac{dC}{dQ} = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + \frac{Q}{2} C_3$$

Al resolver esta derivada tenemos la ecuación para determinar la cantidad óptima a pedir.

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2 D}{C_3}}$$

Esta ecuación ocasiona un costo mínimo y tiene como base un balance entre los dos costos variables (costo de almacenamiento y costo de compra) incluidos en el modelo. Cualquier otra cantidad pedida ocasiona un costo mayor.

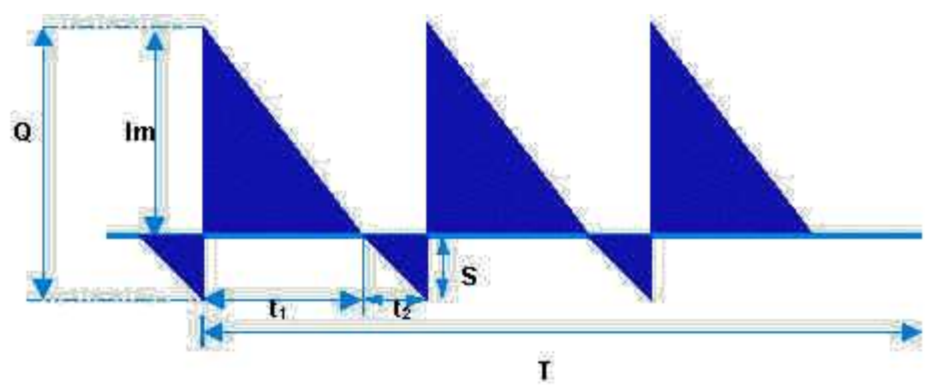
Modelo de Inventario con Déficit

El modelo de compra que permite déficit tiene como base las siguientes suposiciones:

- La demanda se efectúa a tasa constante.
- El reemplazo es instantáneo (la tasa se reemplazo es infinita).
- Todos los coeficientes de costos son constantes.

Este modelo tiene costos normales (costo unitario del producto, costo de ordenar una compra, costo de mantener en inventario) pero además tiene un costo adicional, el costo por unidad de faltante.

En este modelo es posible diferir un pedido, de manera que una vez recibida la cantidad pedida desaparece el déficit, esto se representa claramente en el siguiente esquema.



Q = Cantidad optima a pedir

S = Cantidad de unidades agotadas

Im = Inventario Máximo

t = Periodo entre pedidos

T = Periodo de Planeación

t_1 = Tiempo en donde se cuenta con inventario

t_2 = Tiempo en donde se cuentan con unidades agotadas.

Por consiguiente, en este modelo, los costos de déficit son ocasionados por agotamiento de existencias durante el periodo de tiempo y no por la pérdida de ventas.

En este modelo se incluyen los costos de déficit para determinar el costo para un periodo.

Costo por periodo = [Costo unitario por periodo] + [Costo de ordenar un pedido] + [Costo de mantener el inventario en un periodo] + [costo de déficit por periodo]

Análisis de Ecuaciones

El costo unitario y el costo de ordenar un pedido se determinan de una manera semejante a como se determinan en el modelo de compra sin faltante.

Para determinar el tiempo t_1, el inventario máximo y el tiempo t_2 en función de la cantidad óptima a pedir (Q) y la cantidad de existencias agotadas (S) se realiza el siguiente proceso.

El inventario máximo estará definido por:

$$Im = Q - S$$

Las siguientes ecuaciones se obtienen a partir de la semejanza de triángulos:

$$t_1 = \frac{t\,Im}{Q} = \frac{t(Q - S)}{Q}$$

$$t_2 = \frac{tS}{Q}$$

Debido a que el tiempo de un periodo t es Q / D. Las ecuaciones anteriores pueden representarse de la siguiente forma.

$$t_1 = \frac{Q - S}{Q}\frac{Q}{D}$$

$$t_2 = \frac{S}{Q}\frac{Q}{D}$$

Sustituyendo las ecuaciones 1,2 y 5 en la ecuación del costo por periodo tenemos.

$$Costo(Q^*) = C_1Q + C_2 + C_3\frac{Q-S}{Q}\frac{Q}{D}\frac{Q-S}{2} + C_4\frac{S}{Q}\frac{Q}{D}\frac{S}{2}$$

Multiplicando el costo de un periodo por el número total de inter períodos que tiene el periodo de planeación obtenemos el costo total.

$$CostoTotal = C_1D + C_2\frac{D}{Q} + C_3\frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_4\frac{S^2}{2Q}$$

Para determinar la cantidad optima a pedir y la cantidad de existencias agotadas se realiza una operación de derivación parcial con respecto a cada una de estas variables.

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = C_1D + C_2\frac{D}{Q} + C_3\frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_4\frac{S^2}{2Q}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = C_1D + C_2\frac{D}{Q} + C_3\frac{(Q-S)^2}{2Q} + C_4\frac{S^2}{2Q}$$

El resultado de estas operaciones nos da como resultado.

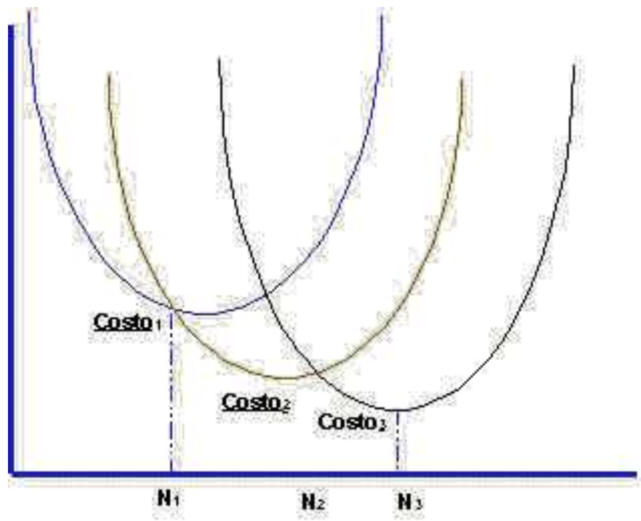
$$Q = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_3}}\sqrt{\frac{C_3 + C_4}{C_4}}$$

$$S = \sqrt{\frac{2C_2D}{C_4}}\sqrt{\frac{C_3}{C_3 + C_4}}$$

Modelo de descuento en todas las unidades

Este modelo se basa manejar diferentes costos según las unidades pedidas, es decir, la cantidad de productos a comprar definirá el precio de los mismos.

Algunas empresas manejan este modelo de inventario debido a que sus costos le permiten realizar este tipo de compras. Este modelo les proporciona sus costos totales más bajos según sus necesidades y los recursos con los que cuenten. En la siguiente gráfica se representa este modelo.



Ni = Cantidades a pedir

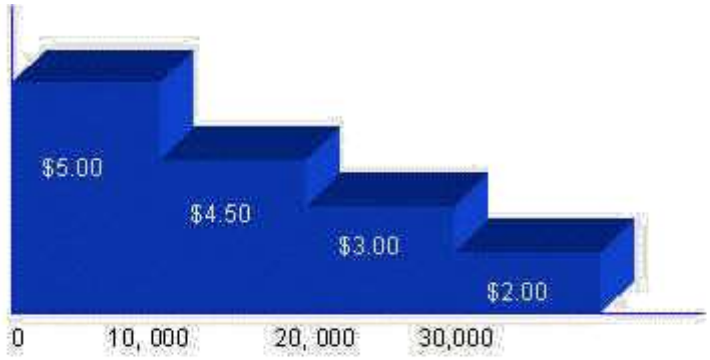
Costoi = Costos de adquirir la cantidad Ni

En este modelo se realizan descuentos según la cantidad a comprar, por ejemplo, una empresa distribuye artículos, sus precios son los siguientes:

De	A	Costo Unitario
0	10, 000	$ 5.00
10, 001	20,000	$4.50
20, 001	30, 000	$3.00
30, 001	En adelante	$2.00

Según estos costos si nosotros deseamos comprar entre 0 y 10, 000 unidades estas tendrán un costo de $5.00, entre 10, 0001 y 20, 000 un costo de $4.50, entre 20, 001 y 30, 000 un costo de $3.00 y arriba de 30, 001 un costo de $2.00.

En la siguiente gráfica se presentan los datos antes descritos.



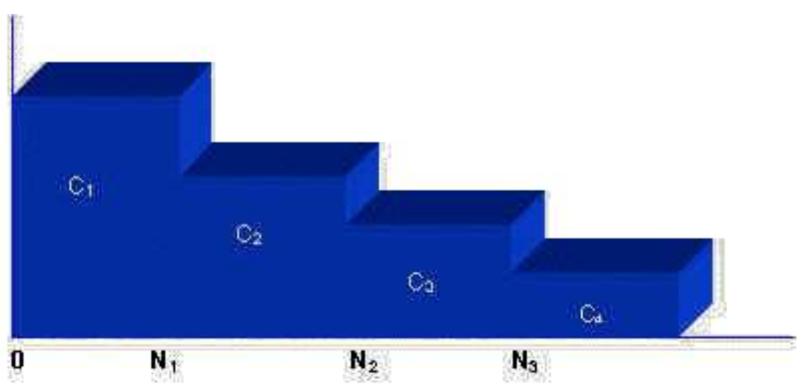
Esto resulta bueno para algunas empresas que cuenten con costos de mantener inventarios muy bajos, ya que pueden realizar compras en gran escala a precios bajos.

Con este tipo de modelo los costos unitarios de los productos se ven mermados pero los costos de mantener un almacén se pueden ver incrementados sustancialmente.

Cabe mencionar que se debe de tomar en cuenta que la mercancía en ocasiones mantenerla en un almacén le ocasiona deterioro. Para realizar el desarrollo de este modelo estructuraremos un algoritmo que consta de cuatro pasos, en los cuales se tomarán aspectos importantes de este modelo.

Pasos para la aplicación de este modelo

Para realizar el desarrollo de este algoritmo nos apoyaremos en la siguiente gráfica en donde se representa este modelo.



Paso 1

El primer paso es determinar la cantidad optima a pedir según los costos (Costo de pedir, Costo de mantener) que maneje la empresa, para cada uno de los descuentos con que se cuentan.

Determinaremos la cantidad óptima a pedir para cada uno de los costos (C_1, C_2, C_3, C_4) de los descuentos.

$$Q_j = \sqrt{\frac{2DC_2}{iC_{1j}}}$$

Q = Cantidad Optima
D = Demanda del artículo.
C1 = Costo unitario del artículo.
C2 = Costo de ordenar un pedido.
i = Porcentaje sobre el precio del artículo por mantenimiento en inventario.

Existen ocasiones en que la empresa maneja un costo de almacén adicional, entonces la ecuación que definida de la siguiente forma:

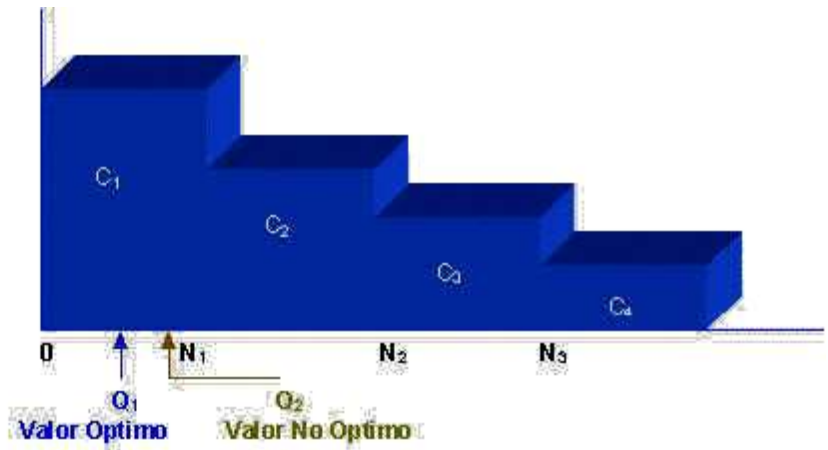
$$Q_j = \sqrt{\frac{2DC_2}{C_3 + iC_{1j}}}$$

En donde C3 + iC1j será el costo total de mantener en almacén.

Paso 2

El segundo paso es realizar una comparación de los valores de Qj con sus respectivos niveles de precio (Ci), por ejemplo, se compara el valor obtenido de Q1 con respecto al intervalo que corresponde el valor del costo de C1, si este se encuentra entre el valor de 0 y el valor de N1 entonces este valor de Q se tomará como un valor óptimo. De igual manera se realizará una comparación entre Q2 y el intervalo de N1 y N2. Esto operación se realiza con todos los valores de Q obtenidos.

En caso de que el valor obtenido no se encontrara dentro de este intervalo, la cantidad óptima estará definida por el límite inferior del intervalo.



En la gráfica el valor de Q_1 no se encuentra dentro de su intervalo, por consiguiente el valor de Q_2 será su límite inferior, o sea, $Q_2 = N_1$.

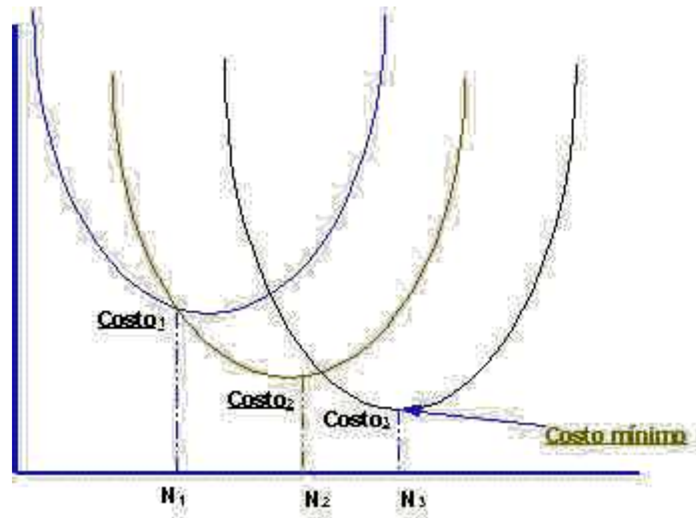
Paso 3

El tercer paso es determinar los costos totales para cada uno de los valores óptimos obtenidos anteriormente. El costo total lo determinaremos con la siguiente ecuación.

$$CostoTotal = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + \frac{Q}{2} C_3$$

Paso 4

El cuarto paso es determinar el menor costo total obtenido en el paso anterior. El valor de Q utilizado para determinar este costo será la cantidad óptima a pedir según los costos estimados en el planteamiento del problema.

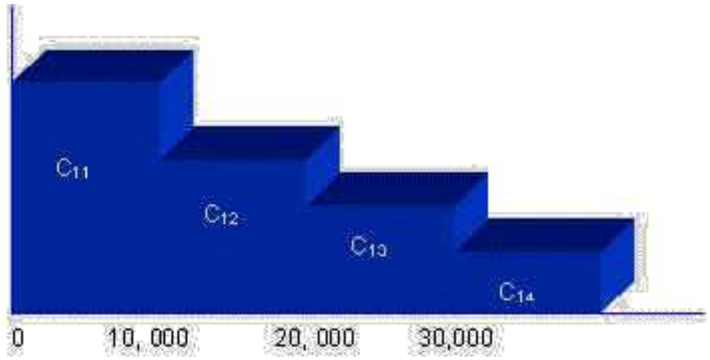


Modelo con descuentos incrementales

Este modelo se basa en manejar un precio unitario de un producto en referencia a la cantidad necesitada, a diferencia del modelo de descuentos en todas las unidades este realiza descuentos sobre una cierta cantidad de artículos que se encuentran dentro de un intervalo. Para entender mejor este modelo supongamos que tenemos la siguiente tabla de precios y deseamos conocer el costo de 25 000 unidades de cierto producto.

De	A	Costo Unitario
0	10, 000	C_{11}
10, 001	20,000	C_{12}
20, 001	30, 000	C_{13}
30, 001	En adelante	C_{14}

En la siguiente gráfica se presentas los costos unitarios de este producto.



Para determinar el costo de 25 000 unidades se tomarán 10 000 unidades a un costo de C_{11}, 10 000 unidades a un costo de C_{12} y 5 000 unidades a un costo de C_{13}.

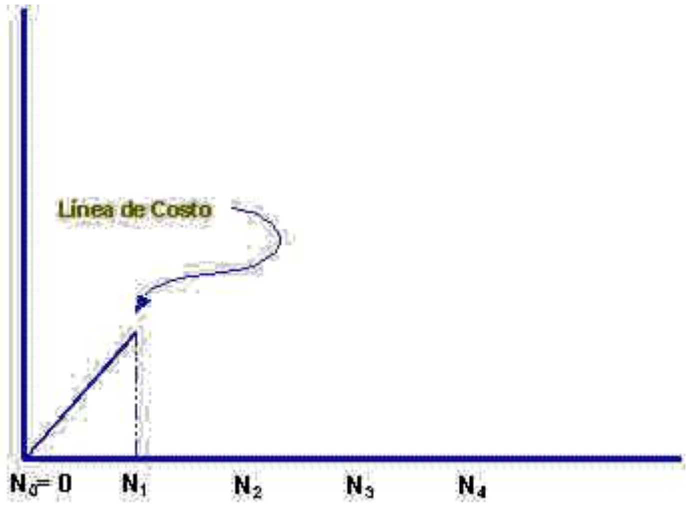
Se toman las cantidades de los intervalos con sus respectivos precios hasta que se logre acumular la cantidad requerida, es obvio que existe un gran contraste en comparación al modelo de descuentos en todas las unidades en donde el precio se toma con referencia al intervalo en donde se encuentra la cantidad requerida.
Por consiguiente el costo de 25 000 unidades será:

$$\textbf{Costo} = \mathbf{C_{11}(10\,000) + C_{12}(10\,000) + C_{13}(5\,000)}$$

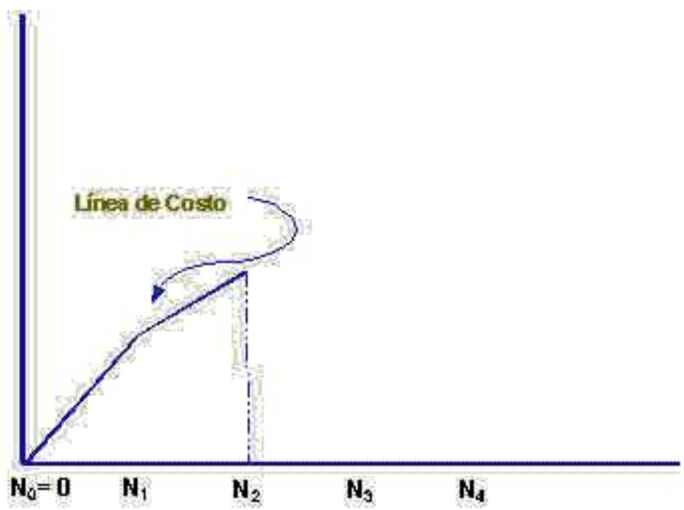
Para el modelo de descuentos en todas las unidades estaría definido de la siguiente manera:

$$\text{Costo} = C_{13}(25\,000)$$

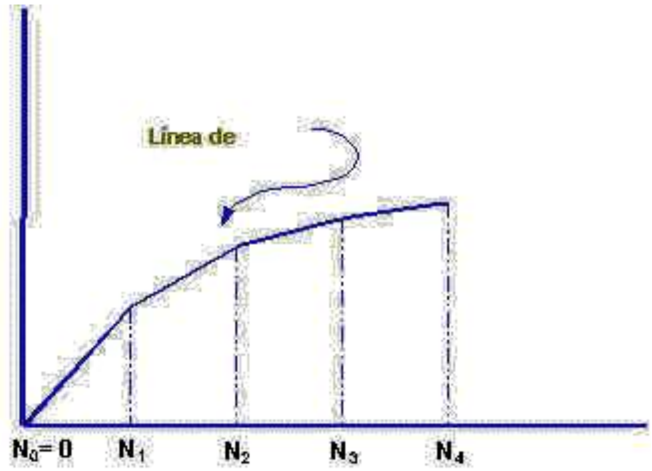
En la siguiente gráfica se presentan los costos que nos representaría adquirir una cierta cantidad de un producto, por ejemplo, si queremos adquirir alguna cantidad que se encontrase entre el intervalo de N_0 y N_1 la línea de costo estaría definida de la siguiente manera:



Si la cantidad a adquirir sobrepasará el intervalo de N_0 y N_1, y se ubicará ahora entre el intervalo de N_1 y N_2 la línea de costo estará representada por:



Esto se realiza para todos los intervalos considerados, dando como resultado la siguiente gráfica.



Ahora podemos concluir que el costo no se incrementa linealmente, sino que toma diversos estados en relación a la cantidad requerida.

En este modelo se deberá determinar la cantidad óptima a pedir con base en los costos unitarios con los que se cuenten, es decir, se determinará la cantidad óptima para cada costo unitario.

Es necesario también definir el costo de adquirir una cantidad Nj, es se realiza mediante la siguiente ecuación.

$$V(N_{j-1}) = \sum_{k=1}^{J-1} C_k(N_k - N_{k-1})$$

Para adquirir una cantidad N_3 el costo de esta se le deberá sumar los costos anteriores, o sea, N_1 y N_2, esto se realiza debido a las bases en las que se fundamenta el modelo anteriormente explicado.

El costo óptimo total de un lote de productos estará definido por la siguiente ecuación.

$$V(Q) = V(N_{j-1}) + C_j(Q - N_{j-1})$$

El costo total para un periodo de planeación estará definido por la siguiente ecuación.

$$CostoTotal(Q) = \left[C_2 + V(N_{j-1}) + C_j(Q - N_{j-1})\right]\frac{D}{Q} + \frac{i}{2}\left[V(N_{j-1}) + C_j(Q - N_{j-1})\right]$$

Si a esta ecuación la derivamos con respecto a Q obtendremos la ecuación para determinar la cantidad óptima a pedir.

$$Q = \sqrt{\frac{2D(C_2 + V(N_{j-1}) - C_j N_{j-1})}{iC_j}}$$

En ocasiones algunas empresas manejan un costo de almacén adicional, entonces la ecuación es la siguiente:

$$Q = \sqrt{\frac{2D(C_2 + V(N_{j-1}) - C_j N_{j-1})}{C_3 + iC_j}}$$

En donde $C_3 + iC_j$ será el costo total de almacén.

Para entender mejor este modelo se resolverá un problema en donde se describirán cada uno de los pasos anteriormente mencionados.

Restricciones de Área de Almacenaje e Inversión

Existen ocasiones en donde se involucran otro tipo de variables con referencia a la cantidad óptima a pedir, como por ejemplo el capital con que se cuente y el espacio para almacenar las unidades adquiridas. Cuando una empresa maneja varios tipos de productos vuelve complicado. La empresa debe de ajustar la cantidad óptima a pedir para todos sus productos a las restricciones de capital y área de almacenaje.

Por ejemplo, una empresa maneja tres productos A, B, C y debe de realizar pedidos de estos productos. El costo de estos pedidos no deben exceder al capital con que cuente la empresa y al espacio del almacén destinado para almacenar estos pedidos.

Para resolver este tipo de problemas podemos seguir este un sencillo algoritmo.

Paso 1

Calcular la cantidad óptima para cada uno de los productos que maneje la empresa. (q_n)

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_2}{C_3}}$$

Paso 2

Evaluar si las cantidades óptimas estimadas se encuentran dentro de las restricciones, es decir, determinar si la restricción es activa.

$$\sum_{i=1}^{n} Q_j a_j \leq A$$ (Restricción no activa)

$$\sum_{i=1}^{n} Q_j a_j \geq A$$ (Restricción activa)

Cuando la restricción no es activa se pueden pedir la qn unidades obtenidas. En caso contrario estas qn se deben ajustar a las restricciones.

Una forma de ajustar las cantidades óptimas a pedir a las restricciones es por multiplicadores de Lagrange, realizando un algoritmo recursivo en donde el resultado obtenido es aproximado con un cierto error de desviación.

Restricción no activa

Cuando la restricción no es activa el coso total para un periodo de planeación estará definido por la siguiente ecuación:

$$CostoTotal(Q_i) = \sum_{i=1}^{n} C_{1i}D_i + C_{2i}\frac{D_i}{Q_i} + C_{3i}\frac{Q_i}{2}$$

La cantidad óptima se calculará con la siguiente ecuación:

$$Q = \sqrt{\frac{2D_i C_{2i}}{C_{3i}}}$$

Restricción activa

Cuando la restricción es activa el costo total para un periodo de planeación estará definido por la siguiente ecuación.

$$S = \sum_{i=1}^{n} C_{1i}D_i + C_{2i}\frac{D_i}{Q_i} + C_3\frac{Q_i}{2} + \lambda\left[\sum Q_i a_i - A\right]$$

La cantidad óptima se calculará con la siguiente ecuación:

$$Q = \sqrt{\frac{2D_i C_{2i}}{C_{3i} + 2\lambda a_i}}$$

L = valor variable

Ai = área que ocupa un artículo i

Sistema de Inventario Q – Sistema de Inventario P

Mantener un inventario (existencia de bienes) para su venta o uso futuro es una práctica común en el mundo de los negocios. Las empresas de venta al menudeo, los mayoristas, los fabricantes y aún los bancos de sangre por lo general almacenan bienes o artículos. ¿Cómo decide una instalación de este tipo sobre su "política de inventarios", es decir, cuándo y cómo se reabastece?

En una empresa pequeña, el administrador puede llevar un recuento de su inventario y tomar estas decisiones. Sin embargo, como esto puede no ser factible incluso en empresas chicas, muchas compañías han ahorrado grandes sumas de dinero al aplicar la "administración científica del inventario". En particular, ellos:

1. Formulan un modelo matemático que describe el comportamiento del sistema de inventarios.
2. Derivan una política óptima de inventarios con respecto a este modelo.
3. Con frecuencia, utilizan una computadora para mantener un registro de los niveles de inventario y señalar cuándo conviene reabastecer.

Definición del Problema de Inventario

Un problema de inventario existe cuando es necesario guardar bienes físicos o mercancías con el propósito de satisfacer la demanda sobre un horizonte de tiempo especificado (finito o infinito). Casi cada empresa debe almacenar bienes para asegurar un trabajo uniforme y eficiente en sus operaciones. Las decisiones considerando cuándo hacer pedidos y en qué cantidad, son típicas de cada problema de inventario. La demanda requerida puede satisfacerse almacenando una vez según todo el horizonte de tiempo o almacenando separadamente cada unidad de tiempo durante el horizonte. Los dos casos que pueden considerarse son sobre-almacenamiento (con respecto a una unidad de tiempo) o sub-almacenamiento (con respecto al horizonte completo).

Un sobre-almacenamiento requeriría un capital invertido superior por unidad de tiempo pero menos ocurrencias frecuentes de escasez y de colocación de pedidos. Un sub-almacenamiento por otra parte disminuiría el capital invertido por unidad de tiempo pero aumentaría la frecuencia de los pedidos así como el tiempo de estar sin mercancía. Los dos extremos son costosos. Las decisiones considerando la cantidad ordenada y el tiempo en el cual se ordena pueden, por consiguiente, estar basadas sobre la minimización de una función de costo apropiada la cual balancea los costos totales resultantes de sobre-almacenamiento y sub-almacenamiento.

Antes de comentar acerca de los sistemas de inventarios se presentan primero características básicas de un sistema de inventarios:

Parámetros económicos

Estos parámetros incluyen los tipos siguientes:

a. **Costo fijo**. Esto implica el costo fijo asociado a la colocación de un pedido o con la preparación inicial de una instalación de producción. El costo fijo usualmente se supone independiente de la cantidad ordenada o producida.
b. **Precios de compra** o **costo de producción**. Este parámetro es de especial interés cuando pueden obtenerse descuentos por mayoreo o rebajas en precio o cuando grandes corridas de producción pueden dar como resultado una disminución en el costo de la misma. En estas condiciones la cantidad ordenada debe ajustarse para aprovechar de estos cambios en el precio.
c. **Precio de venta**. En algunas situaciones de inventarío la demanda puede ser afectada por la cantidad almacenada. En tales casos el modelo de decisión está basado en un criterio de maximización de beneficios el cual comprende el ingreso de venta de la mercancía. El precio de venta unitario puede ser constante o variable dependiendo, por ejemplo, de si se permite un descuento o no en la cantidad.
d. **Costo de mantenimiento del inventario**. Esto representa el costo de tener el inventario en el almacén. Incluye el interés sobre capital invertido, costos de almacenamiento, costos de manejo, costos de depreciación, etc. Los costos de llevar el inventario usualmente se supone que varían directamente con el nivel de inventario, así como con el tiempo que el artículo se tiene en almacén.

Demanda

El modelo de demanda de una mercancía puede ser determinista o probabilista. En el caso del determinista se supone que se conocen con certeza las cantidades necesarias sobre períodos subsecuentes. Esto puede expresarse según períodos iguales en términos de demandas constantes conocidas, o en función de demandas variables conocidas. Los dos casos se denominan demandas estática y dinámica, respectivamente.

La demanda para un período dado puede satisfacerse instantáneamente al inicio del período o uniformemente durante dicho lapso. El efecto de demandas instantáneas y uniformes deberá reflejarse directamente en el costo total de llevar el inventario.

Ciclo para ordenar

Consiste en la medida de tiempo de la situación de inventario. Un ciclo de órdenes o pedidos puede identificarse por el período entre dos órdenes sucesivas. Lo último puede iniciarse en una de dos formas:

a. Revisión continua donde un registro del nivel de inventario se actualiza continuamente hasta que se alcanza un cierto límite inferior, en cuyo punto se coloca un nuevo pedido. Esto se conoce algunas veces como el sistema de "dos depósitos".
b. Revisión periódica donde los pedidos se hacen usualmente a intervalos igualmente espaciados.

Demoras en la entrega

Cuando se coloca un pedido, puede entregarse inmediatamente o puede requerir algún tiempo antes de que la entrega se efectúe. El tiempo entre la colocación de un pedido y su surtido se conoce como demora en la entrega. En general, las holguras de entrega pueden ser deterministas o de probabilidad.

Reabasto del almacén

Aunque un sistema de inventario puede operar con demora en las entregas, el abastecimiento real del almacén puede ser instantáneo o uniforme. El instantáneo ocurre cuando el almacén compra de fuentes externas. El uniforme puede ocurrir cuando el producto se fabrica localmente dentro de la organización. En general, un sistema puede operar con demora positiva en la entrega y también con abastecimiento de almacén.

Un sistema de inventarios puede comprender más de un artículo (mercancías). Este caso es de interés, principalmente si existe una clase de interacción entre los diferentes artículos. Por ejemplo, estos pueden competir en espacio o capital total limitados.

Sistemas de Inventario

Dos sistemas de inventario muy utilizados son el sistema de pedido de tamaño fijo y el sistema de pedido de intervalo fijo. Se designa como sistema Q al sistema de pedido de tamaño fijo, mientras que el sistema de pedido de intervalo fijo se designa como sistema P. La diferencia básica entre los dos consiste en que en el sistema Q se pide una cantidad fija a intervalos variables de tiempo y en el sistema P se ordena cantidad variable a intervalos fijos de tiempo.

Fórmulas para los sistemas P y Q

Para determinar la cantidad pedida es:

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2\bar{D}}{C_3}}$$

El tiempo entre pedido es (IP intervalo entre pedidos):

$$IP = t = \frac{Q}{\bar{D}}$$

Las existencias de seguridad (ES):

$$ES = D_m - \bar{D}(L)$$

ES para el sistema *P* se calcula de la siguiente forma ya que este sistema tiene como base el intervalo entre pedidos más el tiempo promedio de anticipación (*IP* + *L*), entonces ES queda:

$$ES = D_m - D(IP + L)$$

Cantidad pedida = *Q* óptimo + existencias de seguridad - inventario disponible – unidades pedidas + demanda promedio en el tiempo de anticipación.

El costo total anual se calcula con la siguiente ecuación.

$$C = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2}$$

En donde:

C_1: es el Costo de una unidad
C_2: es el Costo de hacer una compra
C_3: es el Costo de almacenar
D_m: es la Demanda máxima
$\overline{D}$: es la Demanda promedio
t = tiempo entre pedidos
L= tiempo de anticipación
ES: son las existencias de seguridad

Cuando el sistema de inventario es determinístico y la tasa de demanda es constante, realmente hay poca diferencia entre los sistemas Q y P. Primero analizaremos el sistema Q con los siguientes datos.

Ejemplo

La de manda de un artículo particular es 18,000 unidades / año. El costo de almacenamiento por unidad es de $1.20 por año y el costo de ordenar una compra es de $400, el tiempo de anticipación (L) es de 20 días, el costo de una unidad es de $1. (Se supone 1 año = 250 días):

Para determinar la cantidad a pedir se hace lo siguiente:

$$Q = \sqrt{\frac{2C_2\bar{D}}{C_3}} = \sqrt{\frac{2(400)(18000)}{1.2}} = 3{,}465$$ unidades

El intervalo entre pedidos es:

1 año = 250 días

$$IP = t = \frac{Q}{\bar{D}} = \frac{3{,}465}{18{,}000} = 0.1925(250) = 48.125$$ días

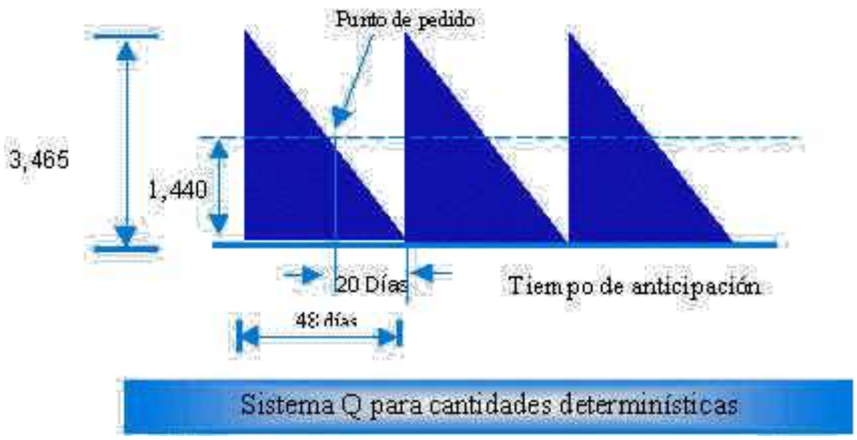
La demanda diaria se saca de la siguiente forma. Como la demanda es de 18,000 por unidades por año y 1 año = 250 días, entonces:

$$\text{Demanda/día} = \frac{18{,}000}{250} = 72$$ unidades / día

El tiempo de anticipación es L=20 días; por tanto el número de unidades que podrían requerirse durante el tiempo de anticipación es:

Demanda en el periodo de anticipación = D L, si el tiempo de anticipación es de 20 días y la demanda diaria es de 72 unidades / día, entonces la demanda en periodo de anticipación es *72(20)=1,440 unidades.*

La representación gráfica de estas cantidades que se muestra en la figura 2-1 indica la siguiente regla de pedido: Verificar continuamente nivel de inventario, y cuando el nivel del inventario alcance 1440 unidades, se ordenan 3,465 unidades.



Aplicando esta regla se obtiene un costo total anual de $22,156 sin permitir déficit.

$$C = C_1 D + C_2 \frac{D}{Q} + C_3 \frac{Q}{2} = 1(18{,}000) + 400 \frac{18{,}000}{3{,}465} + 1.20 \frac{3{,}465}{2}$$

= 18,000 + 2,078 + 2078 = $ 22,156 por año.

Si se permite déficit el punto de pedido disminuye. Por ejemplo, puede suponerse que el tiempo de anticipación de 20 días y el número de unidades agotadas de 747, el punto de pedido es:

72(20) - 747 = 693 unidades

Si el tiempo de anticipación hubiera sido mayor que 48 días, el nivel (punto) de pedido sobrepasa el nivel de inventario. Por ejemplo, puede suponerse que el tiempo de anticipación del ejemplo 2-1 es 60 días en lugar de 20 días. Esto indicaría un punto de pedido de:

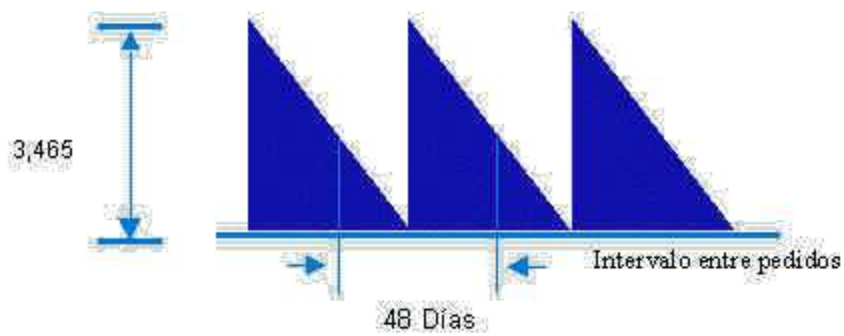
60(72) = 4.320 unidades

Sin embargo, esto es imposible ya que la figura 2-1 indica que el nivel inventario nunca es mayor que 3,465 unidades. El valor de 4,320 unidades implica que cuando el número de unidades en inventario (disponible) y el número de unidades pedidas pero no recibidas es 4,320 unidades, entonces se hace un pedido de 3,465 unidades.

Ahora se discute un sistema P.

En el ejemplo anterior debería usarse un intervalo entre pedidos de 48 días ya que este es el intervalo óptimo indicado por un balance entre los costos de compra e inventario. Cualquier intervalo entre pedidos menor que 48 días ocasiona mayores costos de compra, y cualquier intervalo entre pedidos mayor que 48 días ocasiona déficit.

$$IP = t = \frac{Q}{D} = \frac{3{,}465}{18{,}000} = 0.1925(250) = 48.125 \text{ días}$$



Sistema P para cantidades determinísticas

El sistema P representado en la figura anterior para los datos del ejemplo anterior indica la siguiente regla de pedido: determinar el nivel de inventario cada 48 días y en ese momento pedir una cantidad igual a:

Cantidad pedida = Q óptimo + existencias de seguridad - existencias disponibles - unidades pedidas + cantidad requerida para un período completo de anticipación.

En este caso, el tamaño del pedido es igual a:

$$3{,}465 + 0 - 1{,}440 - 0 + 72(20) = 3{,}465 \text{ unidades}$$

Esta cantidad pedida debe ser la misma en cada punto de pedido ya que todas las componentes de la ecuación de la cantidad pedida son constantes debido a que el sistema es determinístico y la tasa de demanda es constante. Además, por las mismas causas los períodos entre pedidos (48 días) son iguales en ambos sistemas. Por consiguiente, los dos sistemas dan iguales resultados *siempre que* los sistemas sean determinísticos y la tasa de demanda sea constante.

Se presentan diferencias entre los dos sistemas cuando la demanda, el tiempo de anticipación, o ambos se vuelven probabilísticos.
Un enfoque para manejar sistemas probabilísticos de inventario es suponer un modelo de inventario basado en existencias de seguridad (existencias amortiguadoras). Las existencias de seguridad sirven de amortiguador para absorber las variaciones de la demanda y del tiempo de anticipación. También sirven como medio de regulación de las unidades agotadas. Este enfoque permite una aproximación razonable hacia una solución óptima. Es una aproximación ya que supone que las existencias de seguridad para el tiempo de anticipación y el intervalo entre pedidos son independientes. Obviamente, esta suposición no es correcta.

Un enfoque para manejar sistemas probabilísticos de inventario es suponer un modelo de inventario basado en existencias de seguridad (existencias amortiguadoras). Las existencias de seguridad sirven de amortiguador para absorber las variaciones de la demanda y del tiempo de anticipación. También sirven como medio de regulación de las unidades agotadas. Este enfoque permite una aproximación razonable hacia una solución óptima. Es una aproximación ya que supone que las existencias de seguridad para el tiempo de anticipación y el intervalo entre pedidos son independientes. Obviamente, esta suposición no es correcta.

5.5. Teoría de filas

Teoría de colas o líneas de espera

Son innumerables las situaciones en que personas u objetos deben ordenarse o agruparse según una estructura impuesta por un sistema, a la **espera** de recibir un **servicio** para satisfacer una necesidad. Ejemplos de situaciones de esta naturaleza podrían ser: esperar que se desocupe el cajero automático para la extracción de dinero o realizar cualquier otra operación, la espera en un consultorio para ser atendido por un médico, los automóviles que esperan en una estación de peaje para abonar el canon y continuar circulando, las computadoras en un taller que esperan turno para ser reparadas, las cajas agrupadas en una cinta transportadora que esperan ser etiquetadas, etc. Se pueden dar infinitos ejemplos de situaciones idénticas y en todos ellos se puede descubrir que hay dos elementos en común. Por un lado una persona u objeto, en general se llamará **cliente**, que espera para recibir un servicio y por otro lado, alguien que brinda el servicio solicitado por el cliente, en general se le llama **servidor**. La rama de la Investigación Operativa encargada del estudio de sistemas con estas características, es lo que se llama Teoría de Colas o Líneas de Espera.

Dentro de los múltiples temas que trata la Investigación Operativa, se puede afirmar sin ningún temor que la Teoría de Colas o Líneas de Espera es la que mayores posibilidades de aplicación tiene, aunque en la realidad esta situación no se dé de esta manera por lo dificultoso que resulta, en la mayoría de los casos, recoger la información correcta y necesaria para su aplicación. Esta dificultad proviene del hecho de que las variables que intervienen en la formulación del modelo matemático tienen un comportamiento completamente aleatorio de manera que el riguroso tratamiento matemático que se pretende hacer de este fenómeno, carece de sentido en muchos casos, en razón de que los resultados que se obtienen pueden estar muy alejados de la realidad.

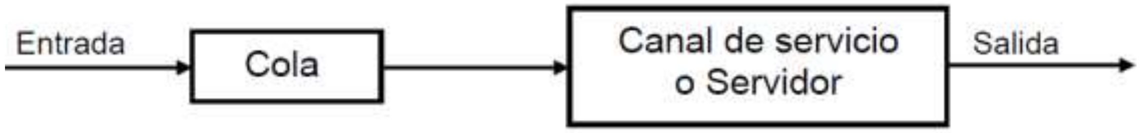
Esta situación conduce a aplicar técnicas tales como la Simulación para el análisis y dimensionado de sistemas con estas características resignando economía y exactitud en algunos casos, pero obteniendo resultados más acordes con la realidad.

Los múltiples temas o situaciones en que se puede aplicar esta importante herramienta pueden ser:

1. Entrada y salida de aviones en un aeropuerto.
2. Carga y descarga de buques en un puerto.
3. Atención al público en ventanillas.
4. Reparación de equipos en un taller.
5. Atención de automóviles en una estación de servicio.
6. Centrales telefónicas en una oficina con líneas externas.
7. Despacho de expedientes por parte de un empleado.
8. Atención de varias máquinas por parte de un solo empleado.

Todos estos son algunos pocos ejemplos en los que se puede aplicar la teoría de colas o líneas de espera.

Todas estas situaciones pueden ser asimiladas al siguiente esquema de funcionamiento:



Este esquema básico de funcionamiento consta de elementos de los cuales dos son los más importantes que son:

La cola o línea de espera
El canal de servicio o servidor.

Cualquier sistema de colas está destinado a servir cierto flujo de pedidos que llegan en ciertos momentos aleatorios de tiempo. También el servicio dura un cierto tiempo aleatorio llamado tiempo de servicio.

En este esquema, los clientes que son los individuos que vienen requiriendo de un servicio, llegan aleatoriamente al sistema y se incorporan a la cola esperando ser atendidos. Si el canal de servicio o servidor está desocupado, el cliente recibe el servicio y abandona inmediatamente el sistema. Por otro lado, el carácter aleatorio del flujo de demandas y de los tiempos de servicio hace que en ciertos periodos de tiempo a la entrada del sistema más precisamente en la cola, se acumule un número demasiado grande de demandas. En estas situaciones, los clientes se incorporan a la cola o bien abandonan el sistema sin recibir el servicio. En otros casos, el sistema funcionará con una utilización incompleta del servicio o permanecerá libre o parado durante tiempos prolongados consumiendo recursos.

Clasificación de los Sistemas de Colas o Líneas de Espera

Las líneas de espera se pueden clasificar de acuerdo a:

1. **Número de clientes que esperan en la cola**. Este puede ser finito o infinito. En la realidad sólo se presenta el primero.
2. **La fuente que genera la población de clientes que puede tener una producción finita o infinita.** A los fines de determinar los parámetros que caracterizan un sistema, considerar que la fuente genera una población infinita, facilita los cálculos.

3. **La manera en que se organizan las colas.** Estas pueden ser de una sola o de varias con opción a cambio de cola o no. Esto depende de la naturaleza del servicio que se presta.
4. **El tiempo transcurrido entre la llegada de dos clientes consecutivos.** Este puede ser una constante o una variable aleatoria independiente que puede responder o no a una determinada distribución de probabilidad. Cuando se analiza un sistema de colas con un enfoque matemático, se asume que el tiempo transcurrido entre dos llegadas consecutivas es una variable aleatoria independiente que responde a una distribución de probabilidades de Poisson.[3]
5. **El tiempo de servicio.** También este tiempo puede ser una constante o una variable aleatoria, independiente o dependiente, cuya distribución de probabilidades puede conocerse o no. Cuando se analiza el sistema con un enfoque matemático, en algunos casos se asume que el tiempo de servicio es una constante o bien que responde a una distribución de probabilidades exponencial negativa o a la distribución de Erlang.[4] Se dice que el tiempo de servicio es dependiente, cuando este tiempo se ve afectado por factores exógenos, es decir algunas causas ajenas al servidor que pueden acelerar o retardar el tiempo de servicio. Si nada de esto ocurre, entonces se dice que el tiempo de servicio es una variable aleatoria independiente.
6. **La disciplina u organización de la cola o más bien la política adoptada para la atención de los clientes.** Obviamente esto depende de las características y naturaleza del servicio. Se pueden adoptar las siguientes modalidades o políticas:

    Primer cliente que llega, es el primero en ser atendido. Este es el caso más común.

    Primer cliente que llega, último en ser atendido, o bien último cliente que llega es el primero en ser atendido.

---

[3] Es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

[4] Es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros *k* y λ cuya función de densidad para valores *x* > 0 es: [illegible]

Atención aleatoria, en este caso el cliente a ser atendido es elegido arbitrariamente por el servidor. Estas situaciones se presentan muy raramente.

Atención prioritaria, es decir que las características del cliente establecen el orden de prioridad de la atención. Esto se presenta con frecuencia en los servicios de salud. Un paciente que llega en estado de gravedad, es el primero en ser atendido dejando de lado los que están esperando en la cola.

7. **Número de servidores o canales de servicio**. Este puede ser único (monocanal) o con canales o servidores múltiples.
8. **Organización de los canales de servicio o servidores**. Estos se pueden organizar en: serie, paralelo o mixtos.
9. **Estabilidad del sistema.** Este puede ser estable o transitorio. Se entiende por sistema estable a aquel en el cual en un periodo determinado de tiempo solo puede ocurrir un arribo al sistema y solo puede ocurrir una salida o abandono del sistema. Estos sistemas se los conoce como sistemas de nacimiento (una entrada), muerte (una salida o abandono).

Estas son algunas de las formas en que se pueden clasificar los sistemas de colas o líneas de espera.

Objetivos de la Teoría de Colas o Líneas de Espera

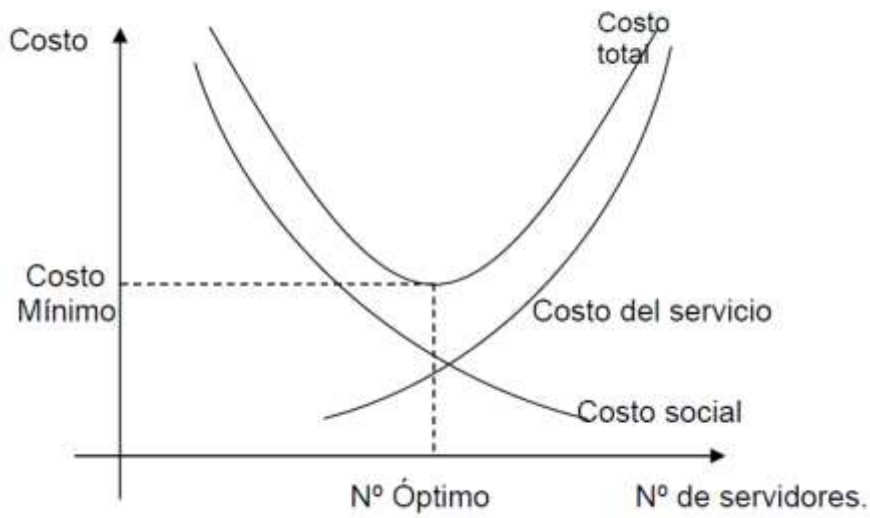
El proceso de funcionamiento de un sistema de colas o líneas de espera, es un proceso aleatorio con estados discretos y tiempos continuos. El sistema cambia a saltos cuando se producen determinados sucesos, por ejemplo cuando llega un cliente requiriendo un servicio, cuando un cliente abandona el sistema después de recibir un servicio, o bien cuando el cliente cansado de esperar, abandona el sistema sin recibir el servicio. Se puede decir que los objetivos que persigue el estudio de la teoría de colas o líneas de espera se los puede sintetizar en los siguientes dos aspectos:

- Caracterizar cualitativa y cuantitativamente una cola o línea de espera.
- Formular modelos matemáticos para determinar los valores adecuados de ciertos parámetros del sistema de manera de compatibilizar o equilibrar el costo social de la espera con los costos asociados al consumo de recursos para la atención de los clientes.

En el primer caso, podemos decir que será de interés conocer que longitud puede alcanzar una cola, que cantidad de clientes hay en el sistema en un determinado instante de arribo de un cliente, cual es el tiempo probable que un cliente debe esperar para ser atendido, cuantas colas o servidores tiene el sistema, etc. Todos estos parámetros se los calcula con un enfoque matemático, con resultados exactos, en tanto y en cuanto las hipótesis que se planteen con respecto al comportamiento de determinadas variables sean las correctas. Esta caracterización también se puede hacer mediante la simulación, que si bien es cierto no nos brinda resultados exactos, en muchos casos, puede estar más cerca de la realidad que si se los determina matemáticamente.

En el segundo caso será de interés estudiar la eficiencia del sistema, definiendo la manera en que deben organizarse las colas, las reglas de funcionamiento, número de servidores, su rendimiento, etc. Es decir todas las características que son de interés para mejorar los índices de eficacia del sistema de manera de cumplir adecuadamente con el flujo de pedidos de servicio. Todo esto se resume diciendo que se procura determinar los parámetros adecuados para el diseño y funcionamiento del sistema con el objeto de lograr un equilibrio entre el costo social que representa la espera y el mejor u óptimo aprovechamiento de los recursos involucrados o invertidos para brindar el servicio.

El comportamiento de los intereses o costos de las partes involucradas en el sistema, esquemáticamente puede representarse como:



Notación y Definición de Términos en la Teoría de Líneas de Espera

Λ = Tasa de llegada o número promedio de llegada de clientes por unidad de tiempo.

M = Tasa de servicio o número promedio de servicios por unidad de tiempo. Este parámetro representa la máxima capacidad de servicio.

ρ = λ/μ = Factor de utilización del sistema con un canal de servicio o un servidor. Evidentemente ρ debe ser menor que 1 porque de lo contrario, si llegan más clientes que la capacidad de atención que tiene el sistema, se formará una cola cuyo crecimiento será infinito. Si no se cumple esta condición y ρ es mayor que 1, se deberá agregar más servidores al sistema de manera que se cumpla.

S = Número de servidores o canales de servicio.

ρS= λ/Sμ = Factor de utilización del sistema cuando hay S servidores.

TS = Esperanza del tiempo o valor esperado de espera de la última llegada para recibir el servicio. Este parámetro responde a la pregunta ¿Cuánto tendré que esperar hasta que me atiendan?

TW = Esperanza del tiempo o valor esperado de espera de la última llegada para abandonar el sistema. Este parámetro responde a la pregunta ¿Dentro de cuánto tiempo saldré de aquí?

1/λ = Periodo de llegada o tiempo promedio que transcurre entre dos llegadas consecutivas.

1/μ = Tiempo promedio de atención a un cliente.

L = Valor esperado del número de clientes formados en la cola.

W = Valor esperado del número de clientes en el sistema, es decir, en la cola y recibiendo el servicio.

Pm (t) = Probabilidad de que en el instante "t" de arribo de un cliente a la cola, se encuentren "m" clientes en el sistema. "S" clientes recibiendo el servicio y (m – S) clientes formados en la cola.

P0 (t) = Probabilidad de que en el instante "t" de arribo de un cliente a la cola, el sistema se encuentre vacío.

Se definen otros términos más, según la complejidad del sistema.

Modelo de una Cola un Canal de Servicio y Población Infinita

Se analiza un sistema con una estructura simple: una cola, un servidor, población infinita y la política de atención que se aplica es, primero en llegar, primero en ser atendido.

Se parte de la hipótesis de que el tiempo de llegada de un cliente responde a una distribución de probabilidades de Poisson con una media 1/λ, de manera que si A(t) es el número de llegadas en un intervalo de tiempo "t", entonces la probabilidad de que A(t) sea igual a:

"k" llegadas, está dado por:

$$P\{A(t)=k\}=e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^{k}$$

Igualmente, se asume que el tiempo de servicio responde a una distribución de probabilidades exponencial negativa con un tiempo medio de servicio igual a **1/**μ, de manera que si **"Z"**, representa el tiempo aleatorio de servicio, la probabilidad de que este tiempo sea mayor a **"t"** unidades está dado por:

$$P(Z > t) = e^{-\mu t}$$

¿Cómo se calcula la probabilidad de que en el instante de arribo "t" a la cola, se encuentren "m" clientes en el sistema? Así:

Pm(t) representa la probabilidad de que en el instante de arribo **"t"** a la cola, se encuentren **"m"** clientes en el sistema, uno recibiendo el servicio y **(m – 1)** clientes en la cola.

Se considera un intervalo elemental de tiempo $0>\Delta t$ suficientemente pequeño en el cual solamente se puede producir el arribo de un cliente al sistema, o solamente un cliente puede abandonarlo luego de recibir el servicio.

Si λ, es el número promedio de llegada de clientes por unidad de tiempo, entonces la probabilidad de que en dicho intervalo elemental llegue un cliente será:

- $t\Delta\lambda$ (Probabilidad de un arribo en el intervalo elemental $t\Delta$). En consecuencia, la probabilidad de que no se produzca ningún arribo en dicho intervalo elemental será su complemento, o sea:
- $t\Delta\lambda-1$ (Probabilidad de que en el intervalo elemental no se produzca ningún arribo). De la misma manera tendremos:
- $t\Delta\mu$ (Probabilidad de brindar un servicio en el intervalo elemental de tiempo).
- $t\Delta\mu-1$ (Probabilidad de no brindar un servicio en el intervalo elemental de tiempo).

Para calcular la probabilidad de que en el instante de arribo **"t"**, se encuentren **"m"** clientes en el sistema, se comienza calculando la probabilidad de que en el instante se encuentren **"m"** clientes en el sistema. Esta situación puede provenir de los siguientes sucesos que, para una mejor comprensión, los representamos en la siguiente tabla.

$t\Delta t$+ Sucesos que, para una mejor comprensión, los representamos en la siguiente tabla.

	Instante "t"	Intervalo "Δt"	Instante (t+Δt)
A1	Pm(t)	No entró ninguno ni salió ninguno	Pm(t+Δt)
A2	Pm(t)	Entró uno y salió uno	Pm(t+Δt)
A3	Pm+1(t)	No entró ninguno y salió uno	Pm(t+Δt)
A4	Pm-1(t)	Entró uno y no salió ninguno	Pm(t+Δt)

Todos estos sucesos son igualmente posibles y mutuamente excluyentes por lo tanto la probabilidad del suceso final será igual a la suma de las probabilidades de todos estos sucesos. O sea:

$$P_m(t+\Delta t) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$$

$$P(A_1) = P_m(t).(1-\lambda\Delta t).(1-\mu\Delta t)$$
$$P(A_2) = P_m(t).(\lambda\Delta t).(\mu\Delta t)$$
$$P(A_3) = P_{m+1}(t).(1-\lambda\Delta t).(\mu\Delta t)$$
$$P(A_4) = P_{m-1}(t).(\lambda\Delta t).(1-\mu\Delta t)$$

De manera que:

$$P_m(t+\Delta t) = P_m(t).(1-\lambda\Delta t).(1-\mu\Delta t) + P_m(t).(\lambda\Delta t).(\mu\Delta t) + \\ + P_{m+1}(t).(1-\lambda\Delta t).(\mu\Delta t) + P_{m-1}(t).(\lambda\Delta t).(1-\mu\Delta t)$$

Desarrollando estos productos, la igualdad queda:

$$\begin{aligned} P_m(t+\Delta t) = {} & P_m(t) - P_m(t).(\lambda\Delta t) - P_m(t).(\mu\Delta t) + P_m(t).(\lambda\Delta t).(\mu\Delta t) + \\ & + P_m(t).\mu.\lambda.\Delta t^2 + P_{m+1}(t).\mu.\Delta t - P_{m+1}(t).\mu.\lambda.\Delta t^2 + \\ & + P_{m-1}(t).\lambda.\Delta t - P_{m-1}(t).\lambda.\mu.\Delta t^2 \end{aligned}$$

Pasando Pm(t) al primer miembro y dividiendo ambos miembros por , la igualdad queda:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(t+\Delta t) - P_m(t)}{\Delta t} = {} & -P_m(t).\lambda - P_m(t).\mu + P_m(t).\lambda.\mu.\Delta t + \\ & + P_m(t).\mu.\lambda.\Delta t + P_{m+1}(t).\mu - P_{m+1}(t).\mu.\lambda.\Delta t + \\ & + P_{m-1}(t).\lambda - P_{m-1}(t).\lambda.\mu.\Delta t \end{aligned}$$

Aplicando límite en ambos miembros para 0→Δ***t***, se tiene:

$$\underset{\Delta t \to 0}{lím}.\frac{P_m(t+\Delta t) - P_m(t)}{\Delta t} = \underset{\Delta t \to 0}{lím}.\begin{bmatrix} -P_m(t).\lambda - P_m(t).\mu + 2.P_m(t).\lambda.\mu.\Delta t + \\ + P_{m+1}(t).\mu - P_{m+1}(t).\mu.\lambda.\Delta t + \\ + P_{m-1}(t).\lambda - P_{m-1}(t).\lambda.\mu.\Delta t \end{bmatrix}$$

Quedando finalmente:

$$\mathbf{P}_m^{\prime}(\mathbf{t}) = -\mathbf{P}_m(\mathbf{t}).(\mu + \lambda) + \mathbf{P}_{m+1}(\mathbf{t}).\mu + \mathbf{P}_{m-1}(\mathbf{t}).\lambda$$

Se define como cola estacionaria a aquellas cuya longitud se mantiene constante, o sea que es independiente del tiempo, en consecuencia su derivada primera con respecto al tiempo es igual a cero. En consecuencia la anterior queda:

$$P'_m(t) = 0 = -P_m(t).(\mu + \lambda) + P_{m+1}(t).\mu + P_{m-1}(t).\lambda = 0$$

Analizamos la (1) para el caso en que "m" sea igual a cero.

$$\mu.P_0(t) = 0$$

Ya que no puede haber servicio si hay 0 clientes en el sistema.

De igual manera: $\lambda.P_{-1}(t) = 0$ carece de sentido ya que no puede haber una cantidad negativa de clientes en el sistema. En consecuencia para m = 0, la (1) queda:

$$-\lambda.P_0(t) + \mu.P_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right).P_0(t)$$

Se analiza la (1) ahora para m = 1.

Siguiendo igual razonamiento se llega a qué:

$$P_2(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 .P_0(t)$$

Para m = 2, se tiene:

$$P_3(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 .P_0(t)$$

Aplicando un razonamiento inductivo, en general se tendrá que:

$$P_m(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m .P_0(t)$$

O bien por ser:

$$P_m(t) = \rho^m . P_0(t) \quad \text{por ser} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

En (2) no se conoce P0(t), para definir la expresión que permita calcular dicho valor, planteamos la sumatoria de las probabilidades de todos los sucesos igualmente posible, es decir:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} P_m(t) = 1$$

Determinación del Número Esperado de Clientes en el Sistema "W"

La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria discreta cualquiera está dado por:

$$E(x) = \sum_{x=0}^{x=\infty} x . P(x)$$

Si la variable es continua es.

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f(x) dx$$

De manera que el número esperado de clientes en el sistema será: *m*

$$W = \sum_{m=0}^{m=\infty} m . \rho^m (1-\rho)$$

Determinación del Número Esperado de Clientes en la Cola "L"

El número esperado de clientes en el sistema se dijo que puede expresarse como:

$$W = \sum_{m=0}^{m=\infty} m.P_m(t)$$

Tratándose de un sistema monocanal o con un servidor, si W, es el número esperado de clientes en el sistema, el número esperado de clientes en la cola puede expresarse como:

$$L = \sum_{m=0}^{m=\infty} (m-1).P_m(t)$$

Esta sumatoria tiene sentido a partir de m = 2 y la anterior a partir de m = 1.

Determinación del Tiempo Esperado de Espera en la Cola "Ts" antes de Recibir el servicio

Si un cliente se incorpora a la cola para recibir un servicio, para que lo atiendan tendrá esperar un tiempo igual al tiempo medio de servicio µ1 por la cantidad W de clientes que hay en el sistema. De manera que:

$$T_s = W.\frac{1}{\mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right)\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu.(\mu-\lambda)} \qquad \boxed{T_s = \frac{\lambda}{\mu.(\mu-\lambda)}}$$

Determinación del Tiempo Esperado de Espera en el Sistema "Tw" para abandonarlo

Por tratarse de un sistema con un servidor, el tiempo esperado para abandonar el sistema será igual al tiempo de espera en la cola más el tiempo medio de prestación de un servicio µ1. De manera que:

$$T_w = T_s + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu.(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad \boxed{T_w = \frac{1}{\mu-\lambda}}$$

Fórmulas diversas

Las siguientes son fórmulas que permiten calcular las probabilidades de algunos sucesos que pueden ser de interés.

- La probabilidad de que el número esperado de clientes W, en el sistema sea mayor que un cierto valor Z está dado por:

$$P(W > Z) = \rho^{Z+1}$$

- La probabilidad de que el tiempo esperado de espera en la cola Ts, sea mayor que “p” unidades de tiempo está dado por:

$$P(T_s > p) = \rho.e^{-\mu(1-\rho).p} \quad con \quad p \geq 0$$

- La probabilidad de que el tiempo esperado de espera en el sistema Tw, sea mayor que “q” unidades de tiempo está dado por:

$$P(T_w > q) = e^{-\mu(1-\rho).q} \quad con \quad q \geq 0$$

- La probabilidad de “x” llegadas por unidad de tiempo está dada por:

$$P(X = x)_\lambda = \frac{\lambda^x}{x!}.e^{-\lambda}$$

- La probabilidad de que “x” clientes reciban el servicio en la unidad de tiempo está dada por:

$$P(X = x)_\mu = \mu.e^{-\mu.x}$$

Simulación Monte Carlo

La simulación Monte Carlo es la amiga de los matemáticos no refinados. Para comprenderla y usarla, se necesita poca capacitación matemática. Puede ser adaptada fácilmente a cualquier situación, con tal que las alternativas puedan ser especificadas cuantitativamente y que los datos requeridos puedan ser calculados con aceptable confianza.

Monte Carlo es un proceso de resolver un problema simulando datos originales con generadores de números al azar. Su aplicación sólo requiere dos cosas básicas:

1. Se debe tener un modelo que represente una imagen de realidad tal como lo vemos. El modelo en este caso no es más que la distribución por probabilidades de la variable que se considera. El mérito importante de la simulación es que puede ser aplicada aunque las distribuciones de probabilidades no puedan ser expresadas explícitamente en cualquiera de las formas teóricas. Todo lo que se requiere es una tabla o un gráfico de una distribución de una variable directa o, indirectamente, por el uso de registros pasados.

2. Es un mecanismo para simular el modelo. El mecanismo pudo ser cualquier generador de números al azar, tal como un par de dados, un puntero giratorio, una rueda de ruleta, una tabla de dígitos al azar o una computadora de alta velocidad apropiadamente instruida.

3. El método Monte Carlo es para simular, mediante procedimientos al azar, situaciones del mundo real de naturaleza probabilística.

Tamaño óptimo de un equipo de servicio

El tamaño óptimo de un equipo de servicio se considera un segundo ejemplo de simulación Monte Carlo. Una nueva empresa industrial, que ha estado en el negocio por espacio de 3000 horas de operación, tiene en uso un gran número de máquinas idénticas. Tiene una sola estación de servicio con un equipo de operarios. La reparación de cualquier máquina es un esfuerzo conjunto del equipo. Cuando la estación de servicio es ocupada por una máquina y ocurren otras descomposturas, se crea una línea de espera. Se han registrado cuidadosamente durante las 3000 horas pasadas datos sobre el número de computadoras por hora y el número de reparaciones que requieren varios periodos de tiempo para prestarles servicio. Las probabilidades de estos dos conjuntos de hechos basados en datos del pasado se indican en los cuadros 1 y 2, respectivamente.

Son los datos sobre descomposturas

Descomposturas por horas	Probabilidad	Probabilidad Acumulativa	Intervalo de números al azar de tres dígitos
0	0.900	0.900	000-899
1	0.090	0.990	900-989
2	0.008	0.998	990-997
3	0.002	1.000	998-999

Cuadro 1. Datos sobre descomposturas

Estos son los datos sobre tiempo requerido para reparación:

HORAS DE REPARACIÓN	PROBABILIDAD	PROBABILIDAD ACUMULATIVA	INTERVALO DE NÚMEROS AL AZAR DE TRES DÍGITOS
1	0.251	0.251	000-250
2	0.375	0.626	251-625
3	0.213	0.839	626-838
4	0.124	0.963	839-962
5	0.037	1.000	963-999

Cuadro 2. Datos sobre tiempo requerido para reparación

Se considera que los dos conjuntos de hechos son estadísticamente independientes. Una prueba Chi Cuadrado (X^2) sobre las frecuencias absolutas conjuntas mostraría si la independencia estadística es razonable.

Lo primero que debemos hacer es asignar intervalos de números al azar a descomposturas de máquinas por hora y a números de horas requeridos para reparar las máquinas. Estos intervalos se dan en las últimas columnas de los cuadros 1 y 2. Obsérvese que en ambos casos los intervalos de números al azar asignados *n* proporcionales a las probabilidades de ocurrencia de los hechos respectivos.

5.6. Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos se desarrolló con el simple hecho de que un individuo se relacione con otro u otros. Hoy en día se enfrenta cotidianamente a esta teoría, en cualquier momento, tenemos por ejemplo cuando nos inscribimos en un nuevo semestre en la universidad, cuando la directiva toma la decisión sobre el monto que se va a cobrar, la directiva está realizando un juego con sus clientes, en este caso los alumnos. Para el hombre la importancia que representa la Teoría de Juegos es evidente, pues a diario se enfrenta a múltiples situaciones que son juegos.

Actualmente la Teoría de Juegos se ocupa sobre todo de que ocurre cuando los hombres se relacionan de forma racional, es decir, cuando los individuos se interrelacionan utilizando el raciocinio. Sin embargo, la Teoría de Juegos no tiene todas las respuestas a los todos problemas del mundo.

Evidentemente definir la Teoría de Juegos es tan absurdo como su lógica, pero la realidad es que la Teoría de Juegos consiste en razonamientos circulares, los cuales no pueden ser evitados al considerar cuestiones estratégicas. Por naturaleza, a los humanos no se les da muy bien pensar sobre los problemas de las relaciones estratégicas, pues generalmente la solución es la lógica a la inversa.

En la Teoría de Juegos la intuición no educada no es muy fiable en situaciones estratégicas, razón por la que se debe entrenar tomando en consideración ejemplos instructivos, sin necesidad que los mismos sean reales. Por el contrario, en muchas ocasiones disfrutaremos de ventajas sustanciales estudiando juegos, si se eligen cuidadosamente los mismos En estos juegos-juegos, se pueden desentender de todos los detalles.

Si en lugar de utilizar personajes ficticios utilizamos personajes reales para los juegos, si se observase qué tan honesto es ese personaje, cómo manipularía la información obtenida, etc. Para un especialista en Teoría de Juegos el ser deshonesto, etc., sería un error comparable al de un matemático que no respeta las leyes de la aritmética porque no le gustan los resultados que está obteniendo.

Origen de la teoría de juegos

La Teoría de Juegos fue creada por von Neumann y Morgenstern en su libro clásico *The Theory of Games Behavior*, publicado en 1944. Otros habían anticipado algunas ideas. Los economistas Cournot y Edgeworth fueron particularmente innovadores en el siglo XIX. Otras contribuciones posteriores mencionadas fueron hechas por los matemáticos Borel y Zermelo. El mismo Von Neumann ya había puesto los fundamentos en el artículo publicado en 1928. Sin embargo, no fue hasta que apareció el libro de von Neumann y Morgenstern que el mundo comprendió cuán potente era el instrumento descubierto para estudiar las relaciones humanas.

Todavía encontramos profesores mayores que nos explican que la Teoría de juegos no sirve para nada porque la vida no es un “Juego de suma cero”, o porque se puede obtener el resultado que uno quiera seleccionando el apropiado “concepto de solución cooperativa”.

Afortunadamente las cosas han evolucionado con mucha rapidez en los últimos veinte años, y éste y otros libros modernos sobre teoría de juegos ya no padecen algunos de los presupuestos restrictivos que von Neumann y Morgenstern consideraron necesarios para progresar. Como resultado, lo que la teoría de juegos prometía en un principio se está empezando a cumplir. En los últimos años, sus repercusiones en la teoría económica sólo se pueden calificar de explosivas. Todavía es necesario, sin embargo, saber algo de la corta historia de juegos, aunque sólo sea para entender por qué se usan algunos términos.

von Neumann y Morgenstern investigaron dos planteamientos distintos de la Teoría de Juegos. El primero, el planteamiento estratégico o no cooperativo. Este planteamiento requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante el juego, y después buscar cada jugador una estrategia óptima. Lo que es mejor para un jugador depende de lo que los otros jugadores piensan hacer, y esto a su vez depende de lo que ellos piensan del primer jugador hará. Von Neumann y Morgenstern resolvieron este problema en el caso particular de juegos con dos jugadores cuyos intereses son diametralmente opuestos. A estos juegos se les llama estrictamente competitivos, o de suma cero, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. El ajedrez, el backgammon y el póquer son juegos tratados habitualmente como juegos de suma cero.

La segunda parte del libro de von Neumann y Morgenstern desarrollaron el planteamiento coalicional o cooperativo, en el que buscaron describir la conducta óptima en juegos con muchos jugadores. Puesto que éste es un problema mucho más difícil, no es de sorprender que sus resultados fueran mucho menos precisos que los alcanzados para el caso de suma cero y dos jugadores. En particular, von Neumann y Morgenstern abandonaron todo intento de especificar estrategias óptimas para jugadores individuales. En lugar de ello se propusieron clasificar los modelos de formación de coaliciones que son consistentes con conductas racionales. La negociación, en cuanto a tal, no jugaban papel alguno en esta teoría. De hecho, hicieron suyo el punto de vista, que había predominado entre los economistas al menos desde la época de Edgeworth, según el cual los problemas de negociación entre dos personas son inherentemente indeterminados.

A principio de los años cincuenta, en una serie de artículos muy famosa el matemático John Nash rompió dos de las barreras que von Neumann y Morgenstern se había auto-impuesto. En el frente no cooperativo, estos parecen haber pensado que en estrategias la idea de equilibrio, introducida por Cournot en 1832, no era en sí misma una noción adecuada para construir sobre ella una teoría, de aquí que se restringieran a juegos de suma cero. Sin embargo, la formulación general de Nash de la idea de equilibrio hizo ver claramente que una restricción así es innecesaria. Hoy día, la noción de equilibrio de Nash, la cual no es otra cosa que cuando la elección estratégica de cada jugador es la respuesta óptima a las elecciones estratégicas de los otros jugadores. A Horace y Maurice les fueron aconsejados, por su consultor especialista en teoría de juegos, que usaran un equilibrio de *Nash*. Es tal vez, el más importante de los instrumentos que los especialistas en teoría de juegos tienen a disposición. Nash también hizo contribuciones al planteamiento cooperativo de von Neumann y Morgenstern. Nash no aceptó la idea de que la teoría de juegos debe considerar indeterminados problemas de negociación entre dos personas y procedió a ofrecer argumentos para determinarlos. Sus ideas sobre este tema fueron generalmente incomprendidas y, tal vez como consecuencia de ello, los años que la teoría de juegos pasó en Babia se gastaron principalmente desarrollando el planteamiento cooperativa de von Neumann y Morgenstern en direcciones que finalmente resultaron improductivas.

Lo que es tal vez más importante sobre los últimos veinte años de teoría de juegos es que los mayores progresos se han dado en la teoría no cooperativa.

Es difícil explicar hacia dónde se dirige la teoría de juegos a una audiencia que no sabe dónde se encuentra. Estas observaciones, por tanto, son para quienes ya saben algo de teoría de juegos.

Aplicaciones de la teoría de juegos

La Teoría de Juegos actualmente tiene muchas aplicaciones, sin embargo, la economía es el principal cliente para las ideas producidas por los especialistas en Teoría de Juego. Entre las disciplinas donde hay aplicación de la Teoría de Juegos tenemos:

La economía

No debería sorprender que la Teoría de Juegos haya encontrado aplicaciones directas en economía. Esta ciencia se supone que se ocupa de la distribución de recursos escasos. Si los recursos son escasos es porque hay más gente que los quiere de la que puede llegar a tenerlos. Este panorama proporciona todos los ingredientes necesarios para un juego. Además, los economistas neoclásicos adoptaron el supuesto de que la gente actuará racionalmente en este juego. En un sentido, por tanto, la economía neoclásica no es sino una rama de la Teoría de Juegos. Los economistas que no se dan cuenta de ello son como el monsieur Jourdain de *Le Bourgeois Gentilhomme,* de Molière, que se sorprendió de saber que había estado hablando en prosa durante toda la vida sin saberlo. Sin embargo, aunque los economistas pueden haber sido desde siempre especialistas camuflados en Teoría de Juegos, no podían progresar por el hecho de no tener acceso a los instrumentos proporcionados por von Neumann y Morgenstern. En consecuencia sólo podían analizar juegos particularmente simples. Esto explica por qué el monopolio y la competencia perfecta se entienden bien, mientras a todas las demás variedades de competencia imperfecta que se dan entre estos dos extremos sólo ahora se les está empezando a dar el tratamiento detallado que merecen.

La razón por la que el monopolio es simple desde el punto de vista de la Teoría de Juegos es que puede ser tratado como un juego con un único jugador. La razón porque la competencia perfecta es simple es que el número de jugadores es de hecho infinito, de manera que cada agente individual no puede tener un efecto sobre agregados de mercado si él o ella actúan individualmente.

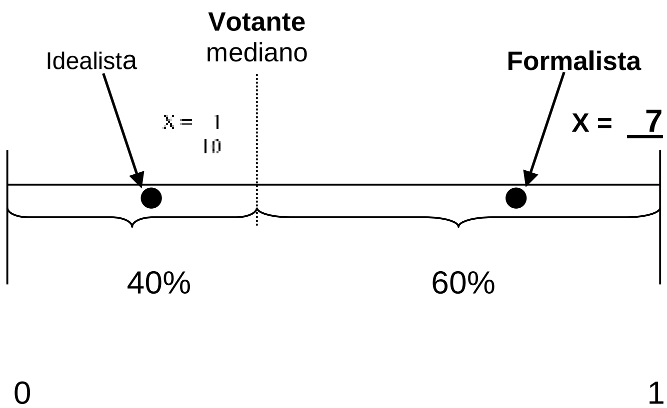
En la **ciencia política**

La Teoría de Juegos no ha tenido el mismo impacto en la ciencia política que en economía. Tal vez esto se deba a que la gente se conduce menos racionalmente cuando lo que está en juego son ideas que cuando lo que está en juego es su dinero. Sin embargo, se ha convertido en un instrumento importante para clarificar la lógica subyacente de un cierto número de problemas más paradigmáticos. Un ejemplo de Teoría de Juegos en la Ciencia Política es el siguiente:

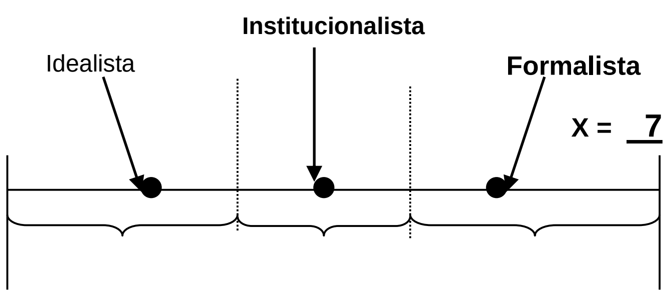
La **elección de programa**: Hay dos partidos, los Formalistas y los Idealistas. Ninguno de los dos se preocupa en absoluto por cuestiones de principio. Sólo se preocupan por el poder y, por tanto, eligen el programa con el único objetivo de maximizar el voto en las próximas elecciones. Los votantes, por otra parte, sólo se preocupan por cuestiones de principio y, por ende carecen por completo de fidelidad a los partidos. Para simplificar, las opiniones que un votante puede tener se identifican con los números reales en el intervalo (0. 1), en otras palabras, el conjunto de valores de x que satisfacen 0 menor igual a x menor igual a 1. Podemos imaginarnos que este intervalo representa el espectro político de izquierda a derecha. Así, alguien con la opinión x = 0, se cree que la sociedad debería estar organizada como un hormiguero, mientras que alguien en la opinión x = 1 cree que debería estar organizada como una piscina llena de tiburones.

Cada partido centra su programa en algún punto del espectro político y no puede cambiar su posición posteriormente. Los votantes votan por el partido que se encuentra más cerca de su posición. Dado que se supone que los votantes se encuentran distribuidos uniformemente sobre el espectro político, es decir, que una fracción *l* de la población sostiene opiniones que se encuentran en cualquier intervalo de longitud *l*, es fácil ver cuántos votos conseguirá cada partido una vez que han elegido programa. El secreto está en buscar el votante mediano entre aquellos cuyas opiniones se encuentran entre los programas de ambos partidos. El votante mediano se encuentra a medio partido entre las posiciones políticas de los dos partidos. Luego los que se encuentran a la derecha del mediano votante votarán por un partido, y los que se encuentran a la izquierda lo harán por el otro.

La siguiente Figura muestra la explicación del ejemplo anterior.



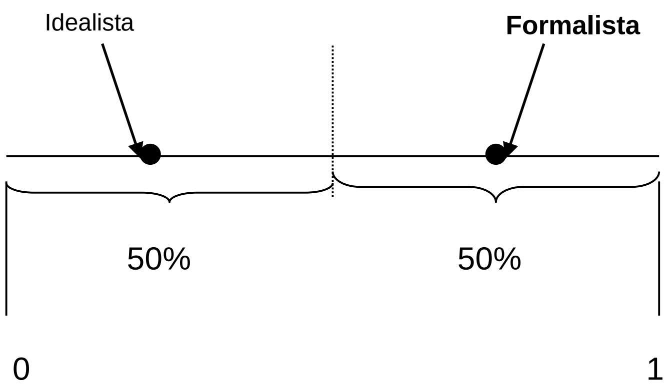
(a)



37.5% 25% 37.5%

0 1

(b)



(c)

Supongamos que los partidos bajan al ruedo político uno a uno. Los Idealistas escogen en primer lugar, y luego lo hacen los Formalistas. ¿Dónde debería colocarse cada uno? Problemas como éste, puede ser resueltos por inducción hacia atrás. Para cada programa posible x, los Idealistas se preguntan qué ocurriría si se colocaran en x. Si x es menor que ½, los Formalistas responderían colocándose inmediatamente a la derecha de x. Entonces los Idealistas recogerían una fracción x de los votantes y los Formalistas recogerían 1-x. Por tanto, los Idealistas ganarían menos de la mitad del voto. Lo mismo ocurre si los Idealistas se sitúan en x menor que ½, excepto que ahora los Formalistas responderán colocándose inmediatamente a su izquierda. Por tanto, lo mejor para los Idealistas es colocarse en el centro del espectro político. Los Formalistas también se colocarán en x = ½, y el voto se dividirá mitad y mitad.

Este modelo puede tener sentido en la escena política americana. Ciertamente es difícil para muchos mexicanos encontrar diferencias significativas entre Demócratas y

Republicanos. El modelo, sin embargo, tiene poco parecido con la escena política mexicana. ¿Deberían los americanos deducir, por tanto, que los partidos políticos mexicanos de verdad se toman en serio los principios que hacen suyos? Una conclusión así sería prematura porque es dudoso, que la situación mexicana pueda ser razonablemente analizada con un modelo de dos partidos. Para explorar esta cuestión veamos cómo cambiarían las cosas si tuviéramos que tomar en consideración un tercer partido.

En este modelo el partido Institucionistas escoge programa después de los Idealistas y Formalistas. Esto cambia mucho las cosas. Los Idealistas y los Formalistas ciertamente no se colocarán ahora en el centro del espectro político. Si lo hicieran los Institucionistas se podrían colocar inmediatamente a su derecha o a su izquierda. Entonces recogerían la mitad del voto dejando que los primeros partidos se dividan la otra mitad. Un razonamiento por inducción hacia atrás, algunas sutilezas surgen debido al hecho que disponemos de un número infinito de opiniones políticas, lo cual hace ver que los Idealistas y los Formalistas se colocarán en $x = \frac{1}{4}$ y $x = \frac{3}{4}$, dejando que los Institucionalistas adopten la posición centrista $x = \frac{1}{2}$. Los primeros partidos recibirán entonces 3/8 de los votos cada uno, y los Institucionalistas sólo recogerán ¼.

Pero ¿Por qué querrían los Institucionalistas entrar en la arena política está condenados al papel de Cenicienta, con los primeros partidos en el papel de Hermanas Feas? Modifiquemos, por tanto, el modelo de manera que los instuticionistas consideren que vale la pena formar un partido sólo si pueden prever que recibirán más del 26% de los votos. En este caso los Idealistas se moverán un poco hacia el centro, aunque no lo bastante como para que los Institucionalistas puedan entrar flanqueándolos por la izquierda. Por tanto, sólo se moverán desde $x = 0,25$ a $x = 0,26$. Análogamente, los Formalistas se moverán desde $x = 0.75$ a $x = 0.74$. El resultado será una elección con dos partidos. En esta elección los Idealistas y los Formalistas se dividen el voto a partes iguales y los Institucionalistas se quedan fuera.

Un comentarista político ignorante de la amenaza supone que la entrada de los Institucionalistas podría fácilmente malinterpretar las razones por las que los Idealistas y los Formalistas han elegido sus programas. El comentarista podría incluso llegar a pensar que cada partido ni siquiera intenta hacerse con el centro por cuestiones de principio. Pero es sólo tras un análisis estratégico que la conducta de los dos partidos puede ser evaluada correctamente. Obsérvese, en particular, que su conducta ha sido determinada por algo que de hecho no llegó a ocurrir. Como Sherlock Holmes explicaba, a menudo lo importante es que el perro no ladró aquella noche.

En biología, en filosofía y en otras disciplinas más se echa mano de la Teoría de juegos.

Conocimiento común de las reglas

Como en muchos resultados de la teoría de juegos, no es inmediatamente evidente que esta conclusión dependa de que el valor de n deba ser conocimiento común. Sin embargo, si el valor n no es de conocimiento común existe equilibrio de Nash.

La noción de equilibrio es fundamental para la Teoría de Juegos. Pero por qué anticipamos que los jugadores usarán estrategias de equilibrio.

Hay dos tipos de respuestas, en primer lugar del tipo educativo, estos suponen que los jugadores tengan al equilibrio como el resultado de razonar cuidadosamente. No se acepte ante frases que empiezan, “si yo pienso que él piensa que yo pienso”, por lo contrario, los jugadores proseguirían con razonamiento así hasta el final, por difícil que fuera.

Sin embargo, la respuesta educativa no es la única posible. También hay respuestas evolutivas. Según éstas, el equilibrio se consigue, no porque los jugadores piensan todo de antemano, sino como consecuencia de que los jugadores miopes ajustan su conducta por tanteo cuando juegan y se repiten durante largos periodos de tiempo.

Racionabilidad. Es la forma que se comporta alguien bayesiano-racional cuando ha de tomar una decisión en situaciones donde el resultado de la decisión a tomar depende de sucesos inciertos para quien ha de tomarla. Ella actúa como si dispusiera de una medida de probabilidad subjetiva a los sucesos de los que no está segura.

En un juego finito de dos jugadores, ningún jugador sabe con seguridad qué estrategia pura, incluso si el oponente mezcla, el resultado final será que se juega alguna estrategia pura, la cual terminará por utilizar el oponente. Un jugador bayesiano-racional, por tanto, asigna una probabilidad subjetiva a cada una de las alternativas posibles. Entonces el jugador escoge una estrategia que maximiza su pago esperado con respecto a estas probabilidades subjetivas. Por tanto, se comporta como si estuviera escogiendo una respuesta óptima a una de las estrategias mixtas del oponente, si la estrategia mixta para la que se elige una respuesta óptima.

La Teoría de Juegos da por supuesto que las creencias de un jugador sobre lo que un oponente hará, depende de lo que el jugador sabe acerca del oponente. Sin embargo, no está ni mucho menos claro lo que debemos suponer acerca de lo que los jugadores saben de su oponente. La idea de r*acionabilidad* se construye sobre la hipótesis de que por lo menos debería ser conocimiento común que ambos jugadores son bayesianos-racionales.

Equilibrio Correlacionado: Aumann sugiere que deberíamos asumir que es “conocimiento común” que los jugadores comparten el mismo universo del discurso. Sugiere, además que los estados de este universo Ω se deben suponer completos. La descripción de un estado, por tanto, debe especificar cada detalle del “mundo posible” que representa. Esto incluye no sólo cómo se comportan los jugadores, sino también cuáles son sus estados mentales. Ya que los jugadores son bayesianos-racionales, sus estados mentales se pueden resumir en dos cosas:

Lo que saben y lo que creen

Bayesianismo: No requiere habilidades mentales excepcionales por parte de los jugadores. Estos revisan mecánicamente sus probabilidades subjetivas a medida que disponen de nueva información, y entonces deciden qué hacer por el método igualmente mecánico de maximizar su pago esperado dadas las creencias actuales.

Los bayesianos ingenuos piensan que no es necesario preguntarse de dónde salen las probabilidades a priori de los jugadores, o cómo saben estos cuáles son sus particiones de posibilidades, en particular, creen que la racionalidad bayesiana dota a quienes la hacen suya con la capacidad de coger del aire sus creencias subjetivas. Esta actitud lleva a bayesianos que son muy ingenuos a argumentar que la teoría de juegos es una pérdida de tiempo. Es indudablemente cierto que si no necesitáramos preocuparnos de por qué la gente cree en lo que cree, entonces las consideraciones sobre equilibrios se harían irrelevantes.

Durante las dos décadas que siguieron a la segunda guerra mundial, uno de los progresos más interesantes de la teoría económica fue la teoría de los juegos y el comportamiento económico, publicada en un libro de este título bajo la autoridad conjunta de John von Neumann y Oskar Morgenstern. Actualmente, el consenso parece ser que la teoría de los juegos es más relevante al estudio de problemas comerciales específicos que a la teoría económica general, porque representa un enfoque único al análisis de las decisiones comerciales en condiciones de intereses competitivos y conflictivos.

El principal objetivo de la teoría de los juegos es determinar los papeles de conducta racional en situaciones de “juego” en las que los resultados son condicionales a las acciones de jugadores interdependientes. Un juego es cualquier situación en la cual compiten dos o más jugadores. El ajedrez y el póker son buenos ejemplos, pero también lo son el duopolio y el oligopolio en los negocios. La extensión con que un jugador alcanza sus objetivos en un juego depende del azar, de sus recursos físicos y mentales y de los de sus rivales, de las reglas del juego y de los cursos de acciones que siguen los jugadores individuales, es decir, sus estrategias. Una estrategia es una especificación de la acción que ha de emprender un jugador en cada contingencia posible del juego.

Se supone que, en un juego, todos los jugadores son racionales, inteligentes y están bien informados. En particular, se supone que cada jugador conoce todo el conjunto de estrategias existentes, no solo para él, sino también para sus rivales, y que cada jugador conoce los resultados de todas las combinaciones posibles de las estrategias.

Igualmente, en una gran variedad de juegos, el resultado es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades debe ser establecida para que pueda ser posible una solución para el juego. A este respecto, debe observarse que las decisiones de los jugadores interdependientes no se toman en un vacío y que los pagos resultantes de estas decisiones dependen de las acciones emprendidas por todos los jugadores. Esta interdependencia implica que puede ser inapropiado suponer que los pagos están siendo generados por un proceso probabilista invariante que no es afectado por el curso de acción que uno escoja. En otras palabras, la acción que emprende un jugador puede dictar los actos de otros jugadores o influir en la probabilidad de que se comporten en una forma particular. Esta potencialidad de posibles efectos en los resultados es la que distingue la toma de decisiones en conflictos y la toma de decisiones en un medio incierto.

La clase más sencilla de modelo de juego rigurosamente adversario, en el que los resultados posibles son calificados en orden opuesto por los jugadores. Entre esta clase, él más común es el juego de suma constante, en el que la suma de las ganancias de los jugadores es igual, cualesquiera que sea su distribución entre ellos. Un caso especial, y el único que consideraremos, de juegos de suma constante se llama juego de suma cero de dos personas.

Juegos de suma cero de dos personas

Dos compañías de autobuses, A y B, explotan la misma ruta entre dos ciudades y están enzarzadas en una lucha por una mayor parte del mercado. Puesto que la parte total del mercado es un 100% fijo, cada punto porcentual ganado por uno debe ser perdido por el otro. Se dice que tal situación es un juego de suma cero de dos personas por las razones obvias de que el juego es jugado por dos jugadores diametralmente opuestos y que la suma de las ganancias y pérdidas es siempre cero.

Si se supone que la compañía A y la compañía B están considerando las tres mismas estrategias para ganar una mayor parte relativa del mercado como sigue:

1. a_1 o b_1: Sirve refrescos durante el viaje.
2. a_2 o b_2: Introduce autobuses con aire acondicionado.
3. a_3 o b_3: Anuncia diariamente en estaciones de televisión en las dos ciudades.

Por comodidad, se supone que antes de comenzar el juego ambas compañías no están haciendo ningún esfuerzo especial y comparte por igual el mercado 50 % cada una. Además, si se supone también que cada compañía no puede emplear más de una de estas actitudes o estrategias al mismo tiempo y que las tres estrategias tienen idénticos costos.

Por estos supuestos, hay un total de 3 x 3 = 9 combinaciones posibles de movimientos, y cada una es capaz de afectar a la parte del mercado en una forma específica. Por ejemplo, si A y B sirven refrescos durante el viaje, se dice que A perdería 10% de la parte del mercado a favor de B, lo que puede indicar que los refrescos de B son más para los gustos de los clientes, igualmente, si A anunció y B, por ejemplo, sirve refrescos, se supone que A ganaría 20% del mercado en perjuicio de B; evidentemente, la publicidad en televisión parece ser más eficaz que servir refrescos.

Ahora, por cada una de las 9 combinaciones puede determinar ganancias o pérdidas del mercado para A como se indica en la siguiente matriz de pagos.

	b_1	b_2	b_3
a_1	-10	-11	-1
a_2	9	-8	-6
a_3	20	-10	-13

Estrategias maximin y minimax

El enfoque conservador a la elección de la mejor estrategia es suponer lo peor y actuar de conformidad con ello. Así según este enfoque y con referencia en la matriz de pagos. Si A decide sobre la estrategia a1, supondría que B escogería la estrategia b2, reduciendo con ello el pago a1 para A a un valor mínimo o de seguridad de –11. Análogamente, los valores de seguridad para a2 y a3 son –8 y –3, respectivamente.

Obsérvese que los valores de seguridad para los distintos movimientos que puede hacer A son los mínimos de filas. Dados estos valores mínimos, hará bien en emplear aquella estrategia que da el máximo de estos valores de seguridad mínimos. En el ejemplo A debe adoptar a2 y aspira a un pago de –8 a B. Esta regla de decisión, que conduce a la elección del mayor de los valores mínimos en que resulta cada estrategia, se llama estrategia maximin.

La compañía B, según esta actitud conservadora, supondría que por cada una de sus acciones, la respuesta de A será tal que la ganancia de A en parte del mercado es la máxima posible. Por ejemplo, si B emplea la estrategia b1, supondría que A adoptará la estrategia a3, la cual dará la peor pérdida posible para B. Análogamente, los peores pagos para b2 y b3 son –8 y –1, los máximos valores en las columnas 2 y 3, respectivamente. Así, vemos que el máximo en cada columna es el peor pago por un movimiento correspondiente hecho por B. El mejor de estos peores pagos es claramente el valor mínimo de estas cifras más altas. Esta cifra –8 en la columna 2, correspondiente a la estrategia b2 y el movimiento contrario a2. Por tanto, la emisión óptima, llamada estrategia minimax de B, es b2.

Se puede observar según la regla maximin de A y la regla minimax de B el pago es –8. Esta cantidad se llama valor del juego. Si es positiva, se dice que el juego es a favor de A. Si es negativo, favorece a B; y si es cero, se dice que el juego es equitativo. La solución de nuestro problema da un pago de –8, que indica que el juego favorece a B porque B gana 8% del mercado a expensas de A.

Punto de silla de montar

Se ha alcanzado ahora un punto en el que si A adopta estrategia maximin a2 su pago es exactamente igual al que B espera que obtenga A sí B emplea la estrategia minimax b2. Un lector puede poner en duda el acierto de tales reglas de decisión. Por ejemplo, ¿por qué A no se esfuerza por ganar 20% de la parte del mercado empleando a3, en vez de perder 8% a favor de B empleando a2? La respuesta es que, si A lo hiciera así, B podría tomar b2 por lo que A podría perder 10 a 13 por 100 del mercado a favor de B, en vez de perder solo 8 por 100. Similarmente, puede argumentarse que B debe adoptar b2 por lo que A podría perder 10 ó 13 por 100 del mercado a favor de B, a expensas de A. Sin embargo, este pago solo es posible si A hace el movimiento de a3.

En otro caso, la ganancia de B sería menor que 8. Argumentos similares usados en la “cautela” dictan que a2 y b2 son las mejores estrategias para A en B respectivamente, por que esta combinación ofrece a A y B una medida de seguridad. Esto es así porque el criterio de decisión maximin de A da a A la “máxima” parte del mercado que puede impedir a B que reduzca más, y que la regla minimax de B ofrece a B la “mínima” parte del mercado que puede impedirse a A que aumente más.

En otras palabras las estrategias maximin y minimax conducen a los dos jugadores del juego a situaciones en las que ningún jugador tiene razón o incentivo alguno para cambiar su posición. A no desea cambiar porque cuando B juega b2, él se encuentra mejor jugando a2 que a1 o a3. B no desea cambiar porque cuando A juega a2 se encuentra mejor jugando b2 que b1 o b3. Evidentemente, se ha alcanzado una situación de equilibrio.

El pago en tal punto de equilibrio es la solución minimax y se conoce como punto de silla de montar de la matriz de pagos en el sentido de que es el mínimo de sus datos de columna. Considerémosla solución del par de decisiones en nuestro ejemplo a2 y b2. Cuando A adopte a2 el pago se reduce de 9 a –8 y luego aumenta de –8 a -6. Cuando B escoge b2, su pago disminuye de –11 a –8 y luego aumenta de –8 a –10. El número –8 en medio forma un valle cuando es visto desde la segunda fila forma una cordillera cuando es visto desde la segunda columna. La solución minimax semeja exactamente una silla de montar: de ahí el nombre de “punto en silla de montar”, que es a la vez un mínimo, como un valle máximo, como una cordillera.

Es posible que pueda haber más de un punto en silla de montar en la matriz de pagos de un juego. Si es así, los pagos correspondientes a los puntos en silla de montar es empleado para determinar movimientos óptimos para los dos jugadores se puede considerar el siguiente juego, por ejemplo:

Estrategia de B

	b_1	b_2	B_3	Mínimo de fila
a_1	2	-3	7	-3
a_2	5	5	6	5º
a_3	1	4	-4	-4
Máximo de columna	5º	5º	7	

Aquí se tienen dos puntos en silla de montar; uno corresponde a a2 y b1, y el otro corresponde a a2 y b2. Según el criterio minimax, el jugador A haría el movimiento a2.

Al hacerlo, no importa si el jugador B emplea la estrategia b1 o b2, por que en cada caso B debe pagar a A una cantidad de, por ejemplo, 5 útiles.

También, puesto que el valor del juego en este ejemplo es positivo, se dice que el juego favorece A.

Se dice que un juego de suma cero de dos personas es rigurosamente determinado si existe un punto en silla de montar, porque ese punto en es una solución aceptada al juego de encontrar la mejor estrategia para cada uno de los dos jugadores.

Estrategia dominante

Se dice que un jugador posee una estrategia dominante si una estrategia particular es preferida a cualquier otra estrategia a disposición de él. Es posible que cada uno de los dos jugadores tenga estrategia dominante.

Estrategia mixta

Es una combinación de dos estrategias escogidas al azar, una cada vez, según determinadas probabilidades, en contraste con una estrategia pura que no contiene tales elementos de azar.

Teoría de juegos y el teorema del punto fijo

El teorema del punto fijo fue establecido en 1910 por el matemático Jan Brower, y establece que toda función continua y acotada que solo toma valores finitos, admite al menos un punto fijo.

Tipos de juegos

Los juegos se clasifican en muchas categorías que determinan qué métodos particulares se pueden aplicar para resolverlos (y, de hecho también cómo se define “resolución” en una categoría particular). En general, se pueden considerar cuatro clases de juegos:

- Juegos en forma extensiva (árbol)
- Juegos en forma estratégica (normal)
- Juegos en forma gráfica
- Juegos en forma coalicional

Las tres primeras clases de juegos se analizan en la teoría de juegos no cooperativos y la cuarta corresponde a los juegos cooperativos.

Juegos en forma de árbol

Tenemos dos jugadores 1 y 2, que participan en el siguiente juego. En primer lugar, el jugador 1 decide ir a la izquierda (I) o a la derecha (D). Entonces, el jugador 2 decide ir a la derecha o a la izquierda. Los pagos que corresponden al primer (segundo) jugador son la primera (segunda) componente del vector que tiene asignada cada situación.

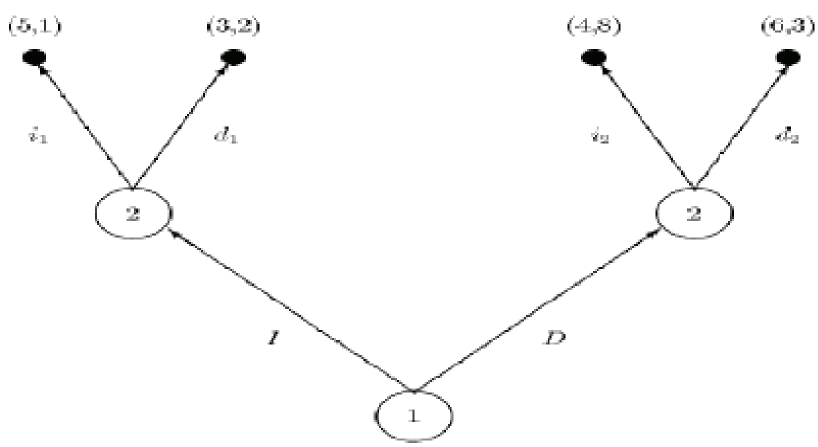


Figura 1: un juego en forma extensiva.

Analicemos cómo deben jugar 1 y 2. El jugador 2, teniendo en cuenta los pagos que recibiría al terminar el juego, debe elegir la siguiente estrategia: si el jugador 1 elige I, ir a la derecha eligiendo d1; y si 1 elige D; elegir i2: Esta estrategia se denotara d1i2: El jugador 1 conoce el árbol y los pagos, luego puede anticipar la conducta del jugador 2 y debe elegir D.

El par de estrategias (D; d1i2) da lugar a un escenario en el que el jugador 1 recibe 4 y el jugador 2 recibe 8.

¿Puede alguno de los jugadores mejorar sus pagos?

Aplicación administrativa de la teoría de juegos

La teoría de juegos se emplea cada vez más en economía y administración, porque ayuda a entender y pronosticar la realidad. Sus aplicaciones en la administración se concentran en tres áreas: la estrategia, la estructura y el comportamiento organizacional. Se usa en el plano académico para plantear las hipótesis y probar su coherencia interna. Pero la literatura casi no reporta casos de su uso por los administradores. Los gerentes tratan los juegos más como una barrera que como una herramienta útil. Esto ocurre porque para los administradores prácticos resulta difícil plantear un modelo a partir de una situación real. En cambio, se trata de subsanar esta carencia y proponer los principios de la creación de los modelos de juegos. Los principios están basados en la teoría y al mismo tiempo son intuitivos y comprensibles para las personas que no tienen preparación matemática.

Para los teóricos de juegos es motivo de satisfacción que la teoría de juegos se utilice cada vez más en economía y administración, así como en ciencia política y sociología. Es un conjunto de modelos matemáticos formales de "juegos" que se examinan deductivamente. Su propósito es ayudar a entender y pronosticar la realidad, que es el objetivo de cualquier teoría.

Las aplicaciones de los juegos en la administración se concentran en tres áreas: la estrategia, la estructura y el comportamiento organizacional. Esto tiene su explicación. Las tres áreas son complejas y desafían las teorías simples y generales. La teoría de juegos ha surgido como la herramienta predilecta para estudiar los temas complejos que implican la interacción de los agentes. Se identifican las siguientes áreas del análisis estratégico donde se aplica la teoría:

Inversión en capital físico

Es un tema complejo de interacción, porque la inversión en capital físico, cuando no es recuperable, juega un papel estratégico ya que crea el compromiso observable para los demás participantes

Inversión intangible

Se trata de analizar la competencia tecnológica, la lógica de procesos de investigación y desarrollo, los acuerdos de cooperación en investigación. Es una serie de decisiones secuenciales, que se optimizan conjuntamente. Es un tema que sin los juegos no se puede entender.

Control estratégico de información

Las empresas actúan de manera estratégica para afectar las creencias de rivales sobre condiciones del mercado. La empresa puede construir su reputación como un competidor duro a través de tácticas agresivas. El manejo de información se presta para modelado como un juego.

Fusión horizontal

Esta situación se modela como un juego en dos actores.

Competencia en redes y estandarización de productos

En muchas industrias los consumidores valoran productos en un nivel más alto cuando éstos usan componentes estandarizados. La teoría de juegos permite entender la competencia en los sectores tipo redes, el papel de los fabricantes de tecnología única, los incentivos para desarrollar los componentes compatibles.

Contratación

Cualquier contrato es un arma estratégica. ¿Qué características del contrato dan a la empresa ventajas estratégicas? Gracias a los juegos empezamos a entender cómo deben estar diseñados los contratos para proporcionar ventajas estratégicas.

Temas como el comercio internacional, el mercadeo, la regulación, la compensación, representan un campo fértil de aplicaciones. Se necesita tiempo para evaluar el efecto empírico de estas curiosidades teóricas. Sin embargo, no hay duda de que los juegos nos ofrecen una lente eficaz a través de la cual se puede examinar la estrategia.

En el análisis de la estructura organizacional se utilizan la teoría de juegos no cooperativos, el modelo de negociación de Nash y los juegos cooperativos.

La corriente que utiliza los juegos cooperativos analiza las decisiones de estructura desde la óptica de la interacción de una sola vez (one shot) o repetitiva. La industria de la construcción se caracteriza por una conducta oportunista y la ausencia de la integración vertical. Los autores utilizan un modelo de juegos para explicar este fenómeno y ayudar a resolverlo.

La Teoría de Juegos tiene un eslabón clave con la economía neoclásica que es la racionalidad. La economía neoclásica se basa en el supuesto de que los seres humanos son absolutamente racionales en sus decisiones económicas. Específicamente la hipótesis es que cada persona, de acuerdo con las circunstancias que esté enfrentando, tratará de maximizar sus beneficios, se llamen estos: utilidades, ingresos o simplemente beneficios subjetivos. Esta hipótesis tiene un doble propósito en el estudio de la asignación de recursos. En primer lugar, reduce el rango de posibilidades. En segundo lugar, suministra criterios para la evaluación de la eficiencia de un sistema económico. Si el sistema está orientado, por ejemplo, a la reducción de los beneficios que perciben algunas personas con el solo propósito de mejorar los beneficios de otras, entonces algo debe estar mal en el sistema. Un ejemplo es la contaminación o la explotación excesiva de la pesca.

En la economía neoclásica, la racionalidad consiste en maximizar nuestros beneficios y la solución podría pensarse que consiste en resolver un problema matemático donde lo que tendríamos que hacer es maximizar los beneficios bajo unas circunstancias dadas.

Pero esto estaría suponiendo que la estructura de los mercados es fija, que la competencia es perfecta y hay muchos participantes, que la gente es una especie de mecanismo simple de estímulo-respuesta, que los vendedores y los compradores asumen que los productos y los precios son fijos y bajo este supuesto optimizan la producción y el consumo. La economía convencional tiene su lugar cuando estamos refiriéndonos a la operación en mercados maduros y muy bien establecidos, pero deja de lado la creatividad de las personas para encontrar nuevas maneras para interactuar entre sí.

La Teoría de Juegos se estableció con la intención de confrontar las limitaciones de la teoría económica neoclásica y aportar una teoría de comportamiento económico y estratégico cuando la gente interactúa directamente, en lugar de hacerlo a través del mercado. En la Teoría de Juegos, la palabra juegos no es más que una metáfora para referirse a interacciones más complejas de la sociedad humana. La Teoría de Juegos sirve para jugar póker o bridge, pero también para enfrentar interacciones complejas como la competencia en los mercados, la competencia armamentística y la polución ambiental. La Teoría de Juegos enfoca éstas interacciones complejas usando la metáfora de un juego: en estas interacciones complejas, como en los juegos, la decisión individual es esencialmente estratégica y el resultado de la interacción depende de las estrategias escogidas por cada uno de los participantes. En la Teoría de Juegos los resultados dependen no solamente de nuestras propias estrategias y de las condiciones del mercado, sino también y directamente de las estrategias escogidas por los otros participantes.

Aplicaciones

La aplicación de la Teoría de Juegos a la estrategia de mercadeo le puede llevar a descubrir sus mejores opciones disponibles. Considere, como ejemplo, decisiones como éstas que los Gerentes de Mercadeo enfrentan usualmente:

- Su empresa está en un mercado que cada día se estrecha más debido a la recesión de la economía y por la entrada de nuevos competidores. A medida que las ventas declinan, su principal competidor reduce precios y aumenta su producción. ¿Cuál debe ser su respuesta? ¿Lanzarse a una guerra de precios o mantenerse firme y perder ventas y participación de mercado? A situaciones como ésta se han enfrentado las aerolíneas, las revistas y las computadoras personales, entre otros.

- Producir una nueva generación de sus productos le representará inversiones cuantiosas en investigación y desarrollo. ¿Debe usted embarcarse en esto? Sus competidores se enfrentan a la misma situación. Si todos se lanzaran al mercado, ¿valdrá la pena participar en esta competencia donde si usted sale de primero el mercado podrá estar en corto tiempo tan saturado que su producto pionero le dará pérdidas? ¿O será mejor esperar por oportunidades de mercadeo en mercados más rentables?
- Usted tiene un nuevo producto muy promisorio. ¿Debe usted lanzarse de primero al mercado? ¿Cosechará ganancias siendo pionero o le estará abriendo el camino a competidores cautos que se beneficiarán de sus errores?

Todas estas situaciones son opciones de juegos donde sus resultados dependerán no solamente de lo que usted haga sino también de lo que hagan sus competidores.

En la práctica, la esencia de la Teoría de Juegos consiste en un análisis profundo de la estructura de cada juego. Para hacer esto, simplifiquemos. Limita tus estrategias y las de tus competidores a las dos o tres más importantes. Por ejemplo, en un juego de guerra de precios las jugadas pueden ser bajar o mantenerse. Esto significa que el juego tiene unos pocos resultados posibles. Para dos estrategias y dos jugadores solamente hay cuatro (2x2) resultados que puede producir el juego. Calcula cuál es el mejor resultado para usted y cuáles pueden ser los peores. Haga lo mismo con el de sus competidores.

Esta lista le ayudará a verificar dónde está usted en el escenario de juego:

- ¿Tienes una estrategia dominante? (es decir, una que sea buena para ti, no importa lo que hagan los demás). Si es así, úsala.
- ¿Hay otra clase de estrategia dominante? (esto es, una que será fatal para ti, no importa lo que hagan tus competidores). Si es así, elimínala y re-analiza el juego.
- ¿Estás en medio de una estrategia de equilibrio? (o sea un resultado donde la acción de cada jugador es la mejor respuesta para las de los demás). Si es así, lo más probable es que la mayoría de los jugadores optarán por ella.

La primera norma para una estrategia acertada es tener una visión muy clara del escenario del juego. Si usted hace un juicio equivocado de la estructura del juego, estará expuesto a juzgar erróneamente la conducta de sus oponentes.

La Teoría de Juegos tiene dos grandes ramas: la teoría de juegos cooperativos y los no-cooperativos. La Teoría de Juegos no-cooperativos se refiere a qué tan inteligentemente un individuo interactúa con otros para lograr sus propósitos. Hay otras ramas de la teoría económica estrechamente ligadas a la Teoría de Juegos:

- La teoría de la decisión (la de un solo jugador)
- La del equilibrio general (hay un gran número de consumidores y productores)
- La de diseño de mecanismos (donde las reglas del juego están dadas).

En síntesis, en la Teoría de Juegos nada es fijo. La economía es dinámica y revolucionaria. Los jugadores crean nuevos mercados y asumen múltiples papeles. Son innovadores. Nadie adopta los precios y los productos porque sí. Si esto le suena como a libre mercado o a un escenario de mercado rápidamente cambiante, ésta es la razón por la cual la Teoría de Juegos es tan atrayente en la nueva economía de la era de la información.

Aplicaciones financieras de la teoría de juegos

Hasta la década de los años setenta, la teoría de juegos no tuvo prácticamente ninguna influencia en el análisis formal de cuestiones financieras, entonces dominado por el paradigma de mercados de capital perfectos y eficientes, el cual, a los problemas de información e interacción estratégica, asignaba un papel secundario.

La ventaja de la teoría de juegos para analizar problemas financieros radica en considerar, explícitamente, situaciones en las que hay un conjunto de agentes que deben tomar decisiones y el bienestar de cada agente depende no sólo de lo que haga él mismo, sino también de lo que hagan los demás. Asimismo, también se modela la información que posee cada agente y la que puede obtener de las acciones que realicen los otros. Este tipo de modelación es especialmente apropiada para estudiar, por ejemplo, algunas de las razones por las que podemos alejarnos del paradigma clásico de Modigliani y Miller, según el cual la estructura financiera de las empresas es irrelevante.

La relación de una empresa con sus clientes puede ocasionar que su estructura financiera sea relevante, ya que puede influir en la percepción que los clientes tengan sobre ella. En efecto, si su deuda alcanza niveles a tal grado que generan una probabilidad significativa de bancarrota, dicha probabilidad afectará negativamente la relación con sus clientes.

Consideremos el caso de una empresa cuya estructura financiera es pública (por ejemplo, una empresa que cotiza en bolsa) y que produce bienes duraderos que requieren mantenimiento posterior a su venta. Esto ocurrirá en el caso de una empresa que vende equipo especializado a otras empresas. Los compradores sufrirán pérdidas si la empresa desaparece, por lo que serán reacios a establecer relaciones con ella si se encuentra altamente endeudada.

En el caso de una empresa que no produzca bienes duraderos, ni su desaparición signifique la pérdida de un servicio para sus clientes, éstos pueden desconfiar de ella si está altamente endeudada. La racionalidad de esta desconfianza descansa en el hecho de que una empresa con una alta probabilidad de desaparecer no estará suficientemente interesada en conservar una buena reputación. Y existen situaciones en donde el interés de una empresa en conservar una buena reputación es crucial para garantizar la calidad de un producto.

Consideremos, siguiendo el caso de una empresa que produce un bien cuya calidad no puede ser juzgada antes de ser consumido. La demanda de esta empresa depende en gran medida de su reputación y ésta obedece, a su vez, a las experiencias previas de los consumidores. Entonces, un incentivo a producir bienes de alta calidad viene dado por el hecho de que la demanda futura se sujetará de manera importante a la experiencia de los consumidores actuales. Una empresa con una alta probabilidad de quiebra cercana valorará menos su reputación y tendrá una mayor propensión a producir bienes de mala calidad.

En el más sencillo de sus modelos existe una empresa que provee de un bien a un solo cliente, quien desconoce si la tecnología de la empresa le permite reducir o no la calidad del bien. Consideremos el caso de una empresa que sí puede hacerlo y analicemos su comportamiento en una relación de largo plazo con su cliente. Para conocer si efectivamente existe una reducción en la calidad del bien, la empresa compara la reducción de costos obtenidos con la pérdida de beneficios futuros, debido a la pérdida de su reputación. La existencia de un alto nivel de deuda y, por consiguiente, de una alta probabilidad de desaparición en el futuro, altera la comparación anterior. Los beneficios derivados de una reducción de costos se obtienen de inmediato y, por tanto, no son influidos por la posibilidad de desaparición en el futuro.

En contraste, la pérdida de una buena reputación probablemente no les afecte porque, a pesar de ello, la empresa dejará de existir; en consecuencia, los incentivos para producir un bien de alta calidad son menores para una empresa altamente endeudada, por lo que será más difícil convencer a clientes potenciales de iniciar tratos con ella.

Existen estudios que documentan empíricamente la racionalidad de esta desconfianza, se trata de estudios de las líneas aéreas y de la industria del transporte por ferrocarril en los EEUU, de acuerdo con ellos la calidad del servicio declina cuando una empresa está en dificultades financieras

Estructura financiera, información asimétrica y mercado de capitales

Existe una regularidad empírica bien documentada; consiste en que la emisión de acciones por parte de una compañía es interpretada negativamente por los mercados financieros de este fenómeno, basado en el hecho de que existe información asimétrica entre la empresa y los mercados financieros. Ante esta asimetría de información los mercados financieros tratarán de hacer inferencias sobre la empresa a partir de *La teoría de juegos como una herramienta para el análisis de problemas financieros* su política financiera. Si esta política privilegia el uso de emisión de acciones sobre la contratación de deuda, los mercados financieros interpretarán que la información privada de la empresa es negativa.

RESUMEN

En esta unidad hemos estudiado los modelos de investigación de operaciones. Tal y como señalábamos en la unidad anterior, la Investigación de operaciones es un enfoque que se allega de las matemáticas para plantear modelos que permitan tomar decisiones.

Los modelos de Investigación de operaciones son principalmente:

- Programación lineal
- Programación entera
- Modelos de redes
- PERT/CPM
- Teoría de filas
- Teoría de juegos

Recordemos qué estudiamos de cada una de ellas:

La programación lineal es una herramienta matemática que permite asignar una cantidad fija de recursos a la satisfacción de varias demandas de tal forma que mientras se optimiza un objetivo se satisfacen otras condiciones definidas.

El método simplex es el procedimiento general para resolver problemas de programación lineal y en realidad es un algoritmo o sea, un proceso en el que se repite una y otra vez hasta que se obtiene el resultado que se desea, como consecuencia, un algoritmo reemplaza un problema difícil por una serie de problemas más sencillos.

La maximización de flujos es un problema típico de la Investigación de Operaciones, específicamente de los modelos de redes, los cuales tiene muchas aplicaciones, por ejemplo el flujo vial en una ciudad, una red de aguas negras, una red informática, etc. Si nosotros sobrecargamos una calle, una tubería o un canal que obviamente tiene un límite de capacidad, nos enfrentaremos a un problema, posiblemente un flujo más lento o una tubería con demasiada presión, ahí es donde el Modelo de Redes es un método o secuencia el cual nos ayuda a tomar una decisión acertada que podría ser mejorar o dar mayor aprovechamiento a los flujos o vías que tengan más capacidad, creando nuevas vías o eliminando algunas antiguas. También nos ayuda a maximizar este flujo de manera eficiente de forma tal que se aprovechen al máximo los recursos.

Generalmente se denominan técnicas PERT al conjunto de modelos abstractos para la programación y análisis de proyectos de ingeniería. Estas técnicas nos ayudan a programar un proyecto con el costo mínimo y la duración más adecuada. Están especialmente difundidas el PERT y el CPM.

La teoría de juegos es una herramienta que ayuda a analizar problemas de optimización interactiva. La teoría de juegos tiene muchas aplicaciones en las ciencias sociales. La mayoría de las situaciones estudiadas por la teoría de juegos implican conflictos de intereses, estrategias y trampas. De particular interés son las situaciones en las que se puede obtener un resultado mejor cuando los agentes cooperan entre sí, que cuando los agentes intentan maximizar sólo su utilidad.

De todos los conceptos tratados con las técnicas básicas de la investigación de operaciones, la teoría de colas o de líneas de espera aparece como la de mayor aplicación potencial y sin embargo es quizás la más difícil de aplicar. Toda clase de negocios, gobierno, industria, escuelas, y hospitales, grandes y pequeños, tienen problemas de colas. Muchos de ellos se pueden beneficiar de un análisis de investigación de operaciones para determinar las condiciones de operación de costo mínimo (máximo rendimiento). Desafortunadamente las suposiciones requeridas para utilizar matemáticas relativamente sencillas, con frecuencia convierten el modelo en una representación muy poco ajustada a la realidad; muchas de estas dificultades se pueden superar combinando una buena comprensión de la teoría de colas con la imaginación.

Con esta unidad concluye esta asignatura relativa al razonamiento lógico matemático, esperando te sea de absoluta utilidad para tu formación académica y tu ejercicio profesional.

BIBLIOGRAFÍA

SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Arya (2009)	10.	406-446
Prawda (2004)	2.	57-243
	3.	245-329
	4.	329-434
	5.	437-501
	6.	503-540
Wayne (2005)	3.	49-126
	4.	127-225

Arya, J.C. y R.W. Lardner. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. (5ª ed.) México: Prentice-Hall.

Prawda, Juan. (2004). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* I. México: Limusa.

Wayne, Winston. (2005). *Investigación de operaciones, aplicaciones y algoritmos*. México: Thompson.

Facultad de Contaduría y Administración
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia