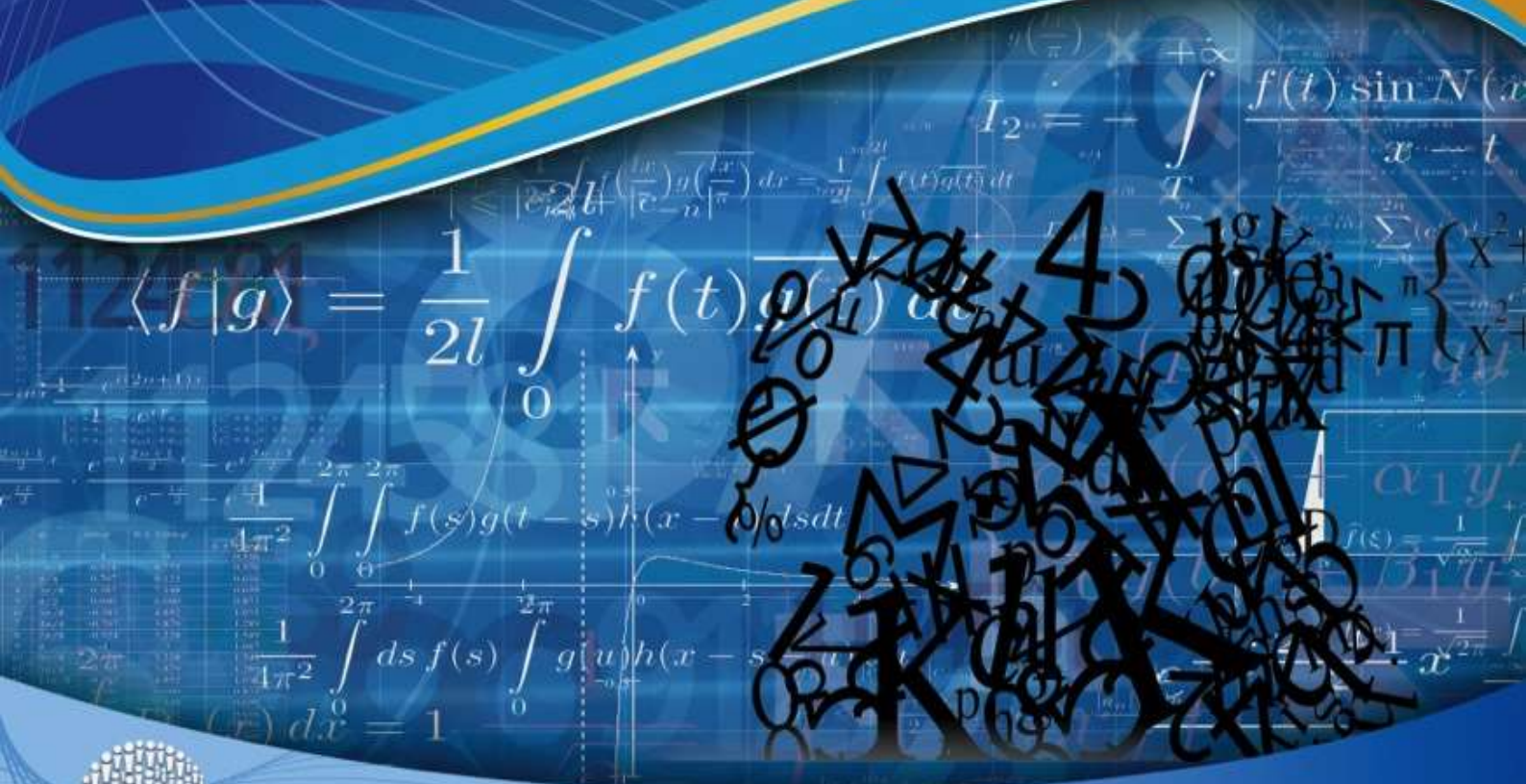




Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Contaduría y Administración
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia

Licenciatura en Informática

Matemáticas I (Algebra Lineal)



SUAYED

COLABORADORES

DIRECTOR DE LA FCA

Dr. Juan Alberto Adam Siade

SECRETARIO GENERAL

L.C. y E.F. Leonel Sebastián Chavarría

COORDINACIÓN GENERAL

Mtra. Gabriela Montero Montiel
Jefe de la División SUAyED-FCA-UNAM

COORDINACIÓN ACADÉMICA

Mtro. Francisco Hernández Mendoza
FCA-UNAM

COAUTORES

Juan Carlos Luna Sánchez
Alberto De La Rosa Elizalde

ACTUALIZACIÓN

Mtra. Guadalupe Adriana Sánchez Ramiro
Mtra. Adriana Rodríguez Domínguez

DISEÑO INSTRUCCIONAL

Lic. Chantal Ramírez Pérez
Mayra Lilia Velasco Chacón

CORRECCIÓN DE ESTILO

L.F. Francisco Vladimir Aceves Gaytán

DISEÑO DE PORTADAS

L.CG. Ricardo Alberto Báez Caballero
Mtra. Marlene Olga Ramírez Chavero
L.DP. Esther Alejandra Butrón Gutiérrez

OBJETIVO GENERAL

Al término del curso el alumno aplicará la teoría del álgebra lineal en el planteamiento y resolución de modelos matemáticos afines al área informática.

TEMARIO OFICIAL

(Horas 64)

	Horas
1. Sistemas de Ecuaciones Lineales	10
2. Espacios Vectoriales	8
3. Transformaciones Lineales	8
4. Producto interno	10
5. Matrices	8
6. Determinantes	8
7. Prácticas en laboratorio	12

INTRODUCCIÓN A LA ASIGNATURA



Las matemáticas constituyen una parte fundamental en la formación académica de los estudiantes y profesionales de las Ciencias Sociales y más aún para los que se encuentran en áreas en donde es necesario resolver problemas relacionados con la producción, la organización, la toma de decisiones, etc. El álgebra lineal es la rama de las matemáticas que estudia conceptos tales

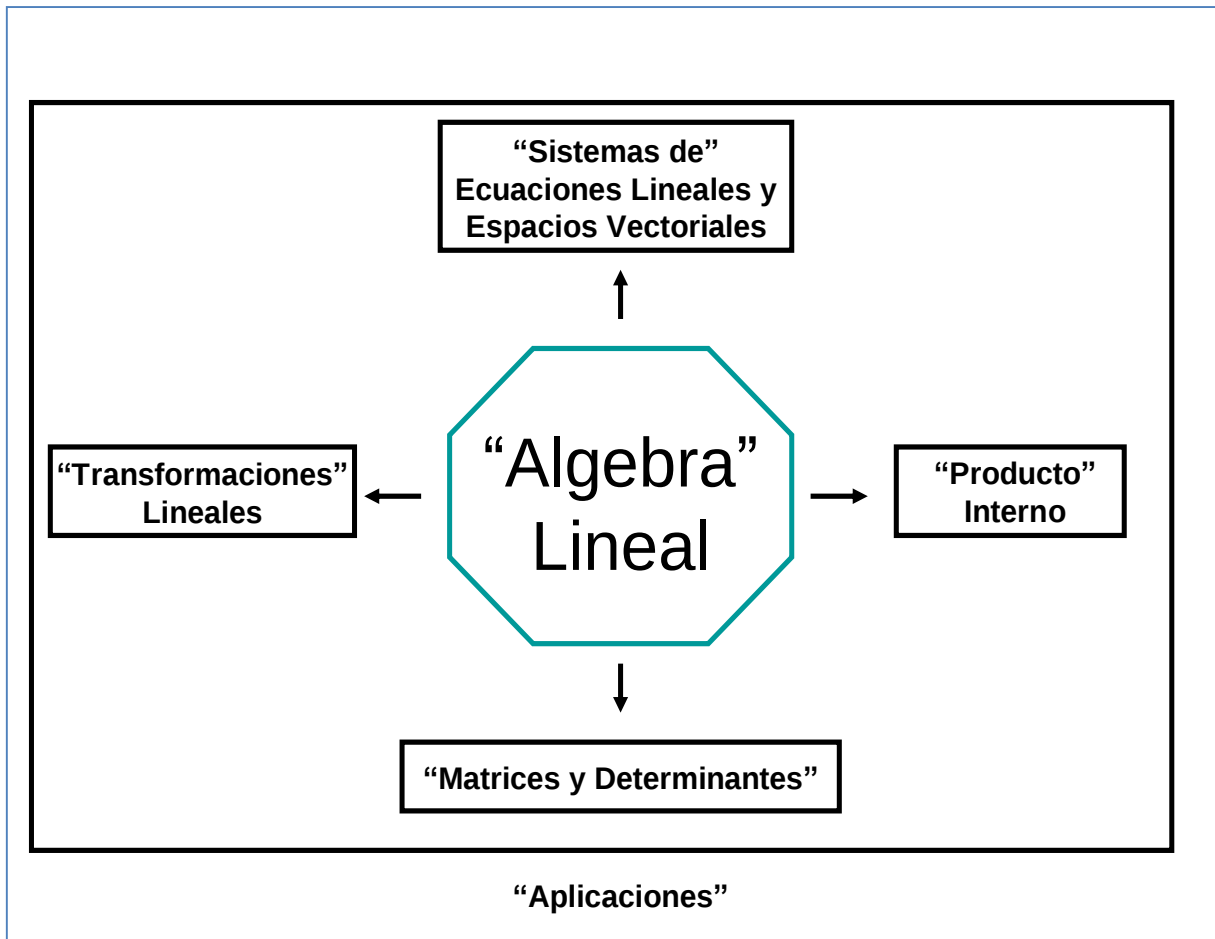
como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y en un enfoque más formal, espacios vectoriales, y sus transformaciones lineales. Es un área que tiene conexiones con muchas áreas dentro y fuera de las matemáticas como análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, etc. La historia del álgebra lineal se remonta a los años de 1843 cuando William Rowan Hamilton (de quien proviene el uso del término *vector*) creó los cuaterniones; y en 1844 fue cuando Hermann Grassmann publicó su libro *Die lineale Ausdehnungslehre* (La teoría lineal de extensión).

En la actualidad la herramienta fundamental de todo estudiante, académico y científico así como investigador es la computadora, producto final (hasta ahora) de las matemáticas junto al desarrollo informático.



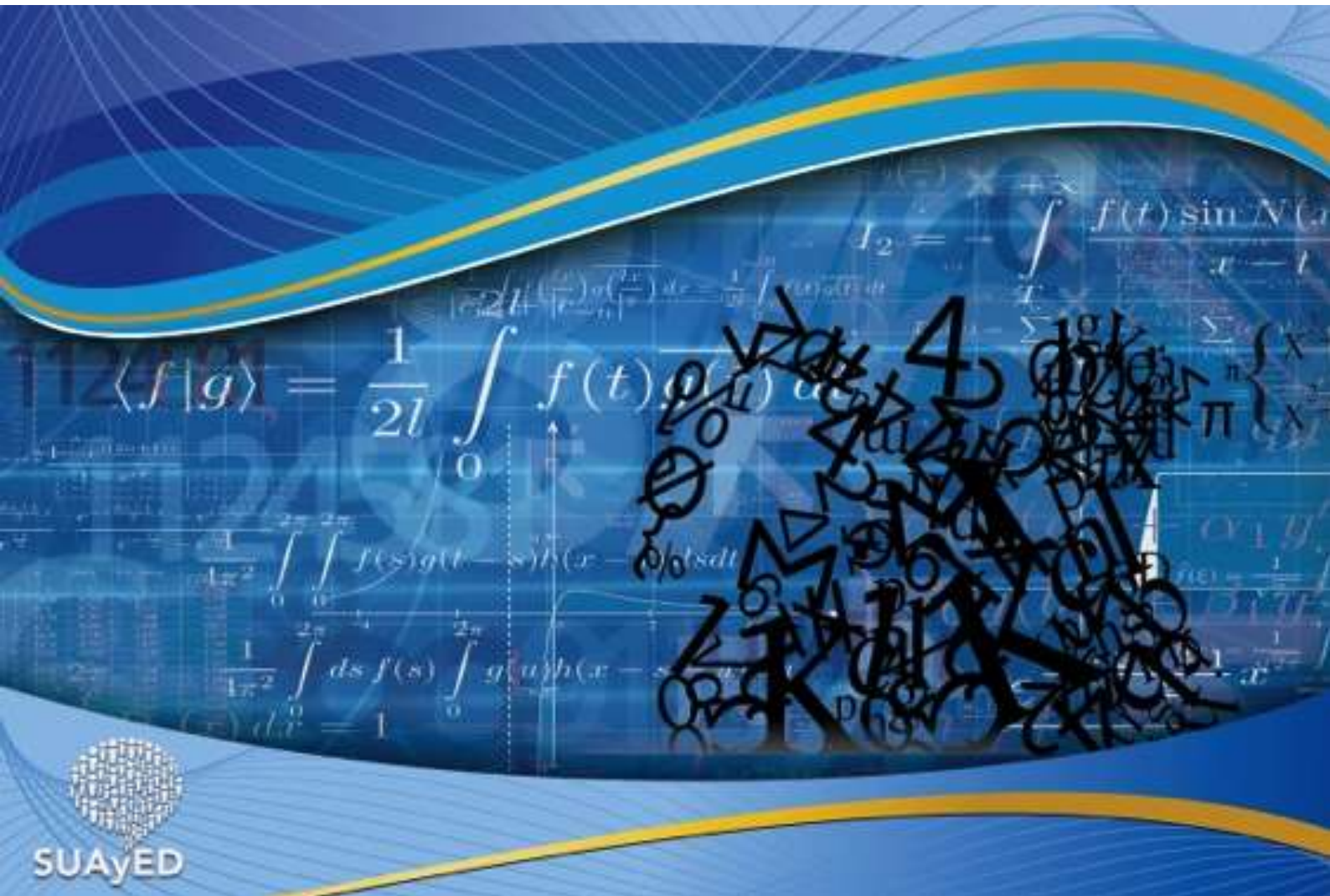


ESTRUCTURA CONCEPTUAL





Sistemas de ecuaciones lineales



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificara los diferentes elementos que intervienen en el planteamiento y solución de ecuaciones lineales

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

1. Sistemas de ecuaciones lineales

1.1 Concepto de ecuación Lineal

1.2 Ecuaciones lineales con 2 o más incógnitas

1.3 Sistemas de m Ecuaciones en n incógnitas

1.4 Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan

1.5 Sistemas homogéneos

INTRODUCCIÓN



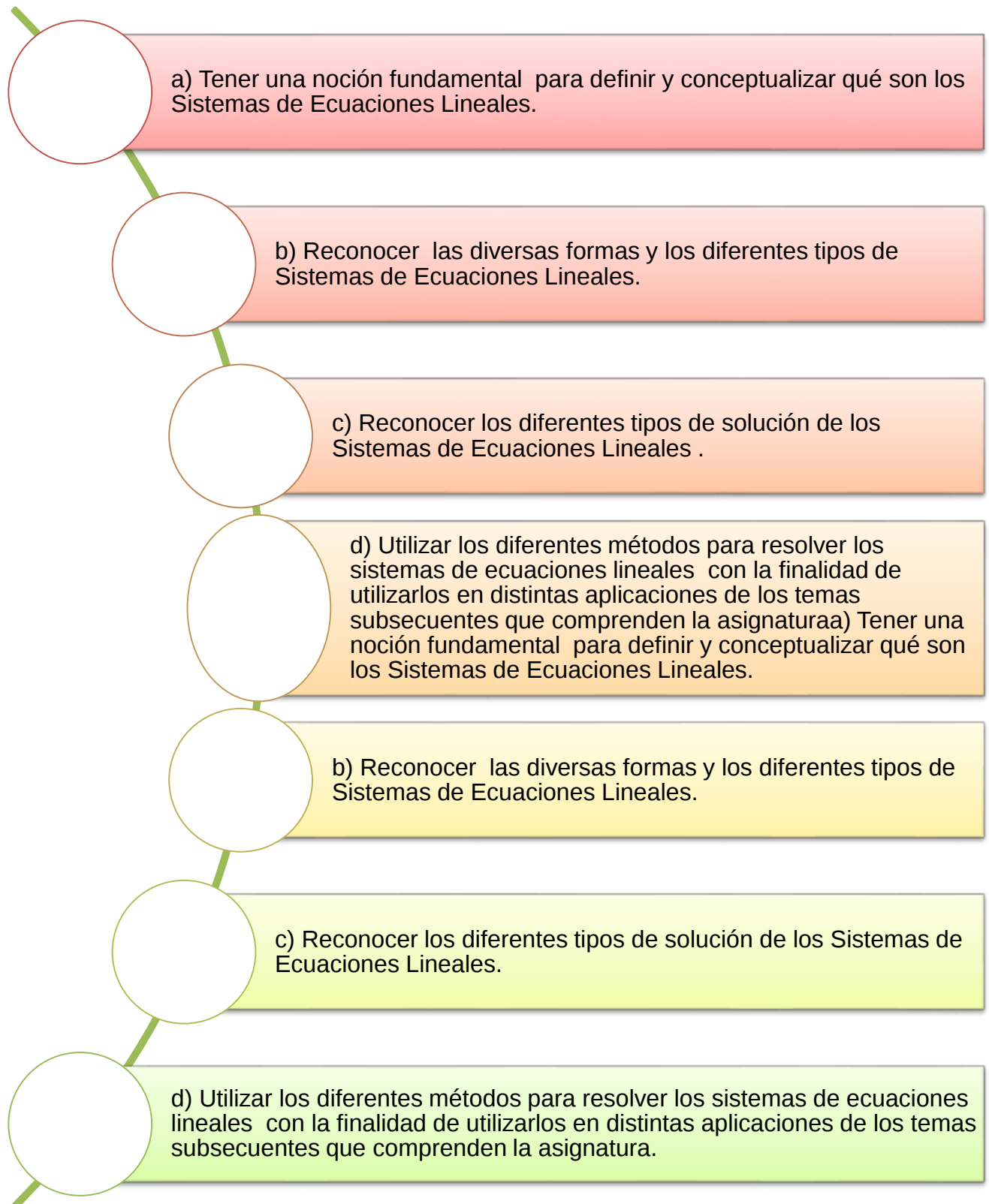
La importancia del álgebra lineal para las aplicaciones se ha elevado en proporción directa al aumento del poder de las computadoras, cada nueva generación de equipo y programas de cómputo dispara una demanda de capacidades aún mayores. Por lo tanto, la ciencia de las computadoras está sólidamente ligada al

álgebra lineal mediante el crecimiento explosivo de los procesamiento paralelos de datos y los cálculos a gran escala.

Aplicación en Programación lineal. En la actualidad muchas decisiones administrativas, importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. Por ejemplo, la industria de las aerolíneas emplea programas lineales para crear los itinerarios de las tripulaciones de vuelo, monitorear las ubicaciones de los aviones, o planear los diversos programas de servicios de apoyo como mantenimiento, y operaciones en terminal.

Por tanto el álgebra lineal es una herramienta muy importante que utilizan los profesionales egresados de la Licenciatura en Informática. En este caso, el punto de vista de esta unidad se concreta a que el estudiante en Informática debe saber lo siguiente:







1.1. Concepto de ecuación lineal

Una gran cantidad de problemas que se presentan en las ciencias naturales, en las ciencias sociales así como en ingeniería y en ciencias físicas, tienen que ver con ecuaciones que relacionan dos conjuntos de variables.



Una ecuación del tipo $ax = b$ que expresa la variable b (variable independiente) en términos de la variable a (variable dependiente), se denomina ecuación lineal. El término lineal expresa que la gráfica de la ecuación anterior es una línea recta.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}4x &= 2y \\ -3x_1 + 9 &= 12x_2 \\ 2x + 3y &= 5\end{aligned}$$





1.2. Ecuaciones lineales con 2 o más incógnitas

De manera análoga existen muchas situaciones en las cuales se requiere relacionar más de dos variables independientes con los cuales poder satisfacer infinidad de procesos y de esta manera obtener solución a diferentes actividades en algún área específica de una empresa.



En este caso la representación de ecuaciones con más de dos incógnitas es la siguiente:

Forma general de una ecuación en varias variables



$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$



Ejemplo:

$$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \dots \text{ó}$$

$$5z + 8w - 9k = 12$$

Donde:

$$x_1, x_2, x_3 \quad y \quad z, \quad w \quad k$$

Son las incógnitas de la ecuación, las cuales encontramos a través de métodos algebraicos que estudiaremos más adelante.

Se sugiere revisar la graficación de sistemas de 2x2.

1.3. Sistemas de m Ecuaciones en n incógnitas

A un sistema de m ecuaciones con n incógnitas lo podemos representar como:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = z_1 \dots (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = z_2 \dots (2)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = z_m \dots (m)$$

Dónde:



$1, 2, 3, \dots, n$ El número de variables

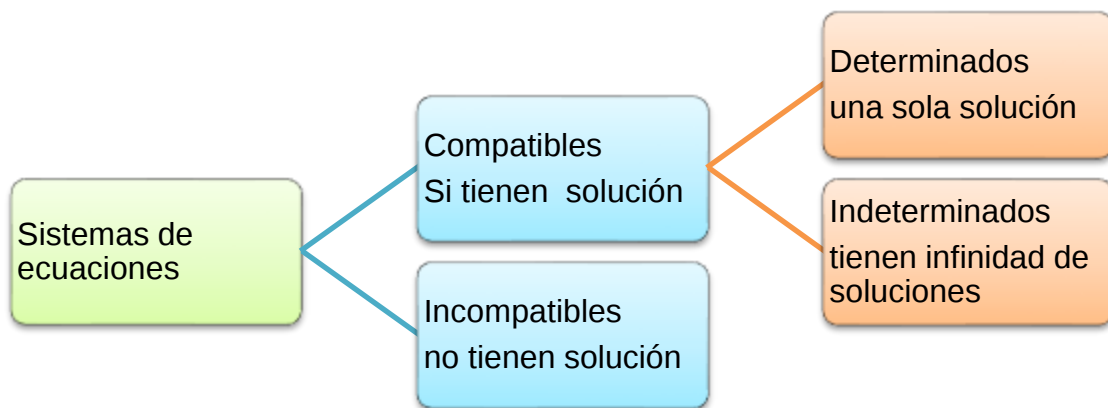
$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{m1}, a_{mn}$ Son los coeficientes de las variables.

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ Son los términos independientes de las ecuaciones

$x_1, x_2, \dots, x_n$ Son las variables de las ecuaciones

$1, 2, 3, \dots, n$ El número de variables y $a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots, a_{mn}$ Son los coeficientes de las variables

Tipos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales





1.4. Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan

La eliminación Gauss-Jordan de un sistema de m ecuaciones y n incógnitas es una metodología que permite calcular los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ para los cuales existe una solución del sistema de ecuaciones.



A un sistema de m ecuaciones con n incógnitas lo podemos representar como:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = z_1 \dots (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = z_2 \dots (2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = z_m \dots (m)$$

Donde $1, 2, 3, \dots, m$ son las ecuaciones y $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables de las ecuaciones.

El método Gauss-Jordan



El método de eliminación Gauss-Jordan consiste en representar primeramente el sistema de ecuaciones por medio de una matriz y obtener la matriz escalonada eliminando las incógnitas de una manera consecutiva, con el propósito de llegar a una matriz escalonada equivalente para obtener la solución de la ecuación, mediante la aplicación de tres operaciones principales.

Una matriz escalonada es de la forma. También conocida como matriz identidad

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerda las tres operaciones permitidas para este método

1.- Intercambio de renglones

2.- Multiplicar un renglón por cualquier número real, diferente de cero

3.- Multiplicar un renglón por un número real y luego sumar con otro.

Nota: no es válido multiplicar o sumar entre columnas.

Ejemplo 1:

Determine si el siguiente sistema es consistente:

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_a &= 8 \\ 2x_a - 3x_2 + 2x_a &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_a &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada:

Para obtener un pivote con x_1 en la primera ecuación, se intercambian las filas 1 y 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar el término 5 en la tercera ecuación, se multiplica la primera fila por $-5/2$ y se suma con la tercera:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -3/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + R_3}$$

Se acostumbra indicar con R : renglón, las operaciones realizadas pero no son obligatorias.

Tomando como pivote el renglón 2 multiplicar por $-1/2$ y sumar con la fila, para eliminar $-1/2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + R_3}$$

Tomando como pivote el renglón 2 multiplicar por 3 y sumar con el renglón 1 para eliminar -3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 & 25 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$



Multiplicar el renglón 1 por $\frac{1}{2}$ para obtener 1 en lugar de 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

La ecuación $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5/2$ ó $0 = 5/2$ desde luego, como esta ecuación nunca es verdadera, el sistema original es inconsistente.

Solución: Sistema inconsistente, no hay solución que satisfaga las tres ecuaciones

Ejemplo 2:

$$3x + 2y + z = 2$$

$$4x + 2y + 2z = 8$$

$$x - y + z = 4$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{2}{3}\right)R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$X = -4, \dots Y = 2, \dots Z = 10$$



1.5. Sistemas homogéneos

Sistemas de ecuaciones homogéneos se representan como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

En forma matricial se escribe como $A_x = 0$

Todo sistema homogéneo tiene la solución trivial

$$x_1 = x_2 = x_3 \dots = x_n = 0$$

Pero puede tener soluciones diferentes a la trivial,

$$x_1 = x_2 = x_3 \dots = x_n \neq 0$$

Por ello un sistema homogéneo siempre es homogéneo.

Ejemplo 3:

Obtener la solución del sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{cases} \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$$

RESUMEN



Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requieren calcular valores para diferentes incógnitas que conforman los “Sistemas de Ecuaciones Lineales” a fin de que satisfagan al sistema. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales son generados de acuerdo las condiciones en que se dan

variables experimentales de un problema o proceso en estudio. Para la obtención de estos valores existen diversas metodologías que permiten realizarlo y en esta variedad de metodologías es donde tiene su mayor importancia del “Álgebra Lineal”.

Además las empresas requieren hacer uso muy frecuente de estas metodologías; dado que está conformada por diversas áreas funcionales en donde se toman de manera constante decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial(\sin xyz)}{\partial x} + \frac{\partial(\sin xyz)}{\partial y} + \frac{\partial(\sin xyz)}{\partial z}$$

$$z \cos(xyz) + xz \cos(xyz) + xy \cos(xyz)$$

$$(yz + xz + xy) \cos(xyz)$$



BIBLIOGRAFÍA



SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard; Hill, David R. (2006)	1	1-9 y 62 90
Poole, David ; “Algebra Lineal , Una introducción moderna” (2004)	2	57-88

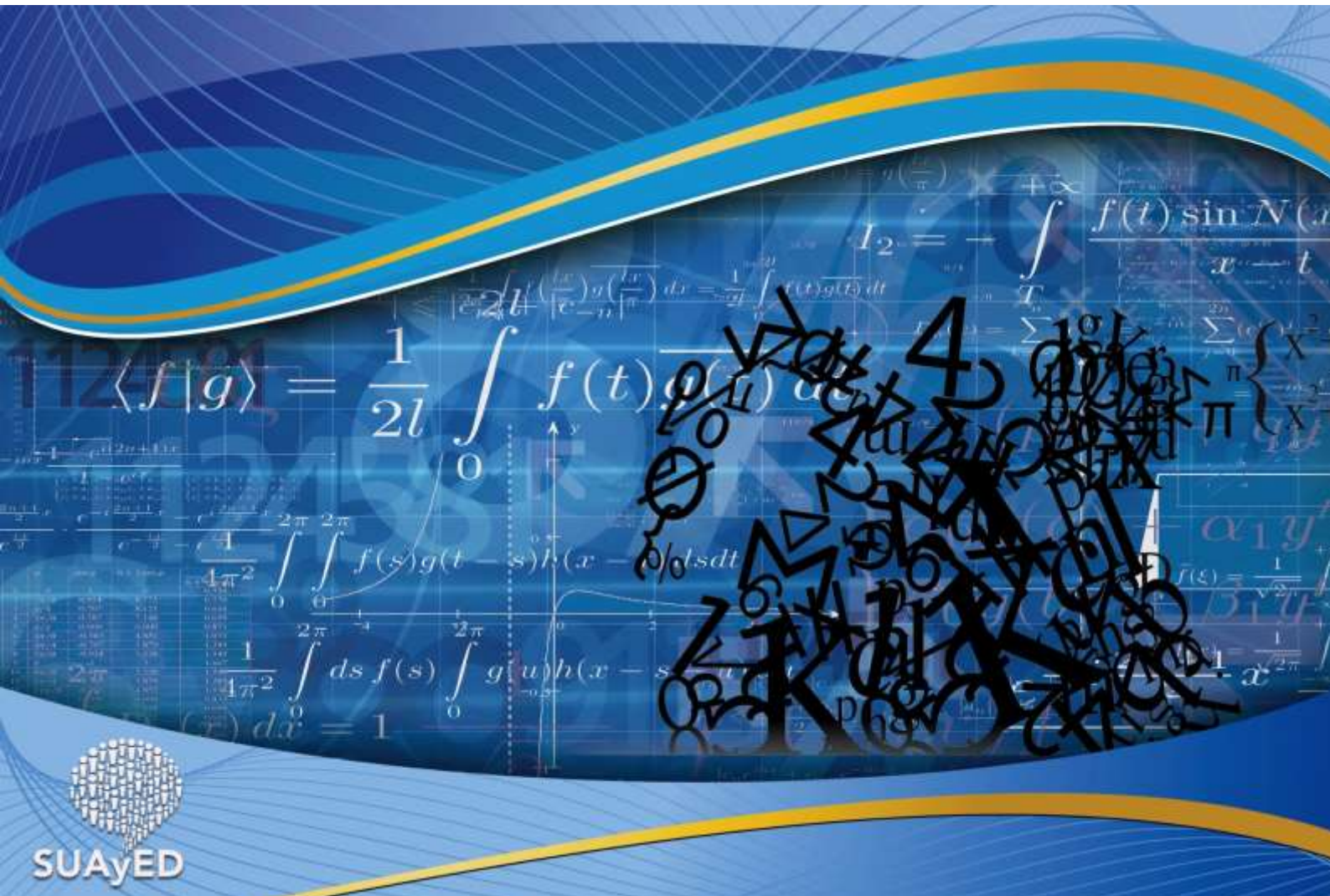
Kolman, Bernard; Hill, David R. “*Algebra Lineal*”, Pearson. Prentice Hall, Octava Edición, 648 pp.

Poole David, *Algebra Lineal: Una introducción Moderna*, Thomson, Primera Edición, 2004, 763pp.



Unidad 2

Espacios vectoriales



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificará los elementos y propiedades de los espacios vectoriales.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

2. Espacios vectoriales

- 2.1. Vectores en el plano
 - 2.2. El producto vectorial y las proyecciones en R^2
 - 2.3. Vectores en el espacio
 - 2.4. Subespacio vectorial
 - 2.5. Combinaciones lineales
 - 2.6. Independencia lineal
 - 2.7. Bases y dimensión
-

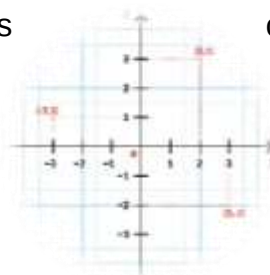
INTRODUCCIÓN



Los fundamentos matemáticos de la ingeniería de sistemas descansan sobre los espacios vectoriales y las funciones, en este capítulo se tratará la teoría de vectores en $\mathbb{R}^n$ y su relación con los espacios vectoriales. Por ejemplo los sistemas de control de una terminal aérea están basados en operaciones con vectores o matrices, existen muchas otras aplicaciones de los espacios vectoriales, en el mundo real. Para empezar el mundo en el que vivimos es un espacio vectorial, si queremos la posición de cualquier punto necesitamos coordenadas, o cambiar de base para obtener unas coordenadas más sencillas. Cuando te miras a un espejo estás haciendo una simetría que no es más que una aplicación lineal. Cuando proyectas algo también tienes una aplicación lineal. Luego también aplicas cambios de base para diagonalizar matrices cuando quieres resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, y ese sería un ejemplo aplicable a infinidad de sistemas, ya que las ecuaciones diferenciales aparecen en todas partes.

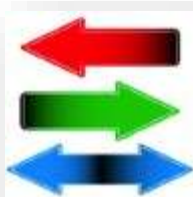


En esta unidad, se iniciará con las definiciones básicas de vectores, distancia entre dos puntos, para después desarrollar el marco general de los espacios vectoriales y conocerás y aplicará teorías de vectores y se adentrará a los espacios vectoriales, combinación lineal e independencia lineal



2.1 Vectores en el plano

En muchas aplicaciones tratamos con cantidades mensurables, tales como la presión, la masa, la temperatura y la rapidez, que pueden describirse por completo mediante su magnitud (un solo número), ejemplo 10 psi, 3Kg, 35°C etc.. Por otro lado existen otras cantidades mensurables, como la velocidad, la fuerza y la aceleración, para cuya descripción es necesario plantear no solo una magnitud sino también una dirección (ejemplo un auto recorre 10 Km en dirección este). Estas cantidades que deben indicar una dirección se denominan vectores. Los vectores se denotarán con una letra minúscula en negrita, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{t}$ etc.



En el contexto de los vectores, las constantes (es decir los números reales) son conocidas como escalares y se simbolizan con letras minúsculas cursivas a, b, c, k etc.



Para empezar nuestro estudio de espacios vectoriales necesitamos la definición de vector, el cual podemos definir como:

El segmento de recta dirigido de un punto U a otro punto V.

Sea uv el segmento o vector; se conoce a u como punto inicial y a v como punto terminal. Cualquier vector en el plano tiene las siguientes propiedades: magnitud, dirección y sentido.

Sea $a = (x, y)$ el cual representa una matriz de 2×1 de modo que :

$a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde x e y son números reales y se denominan componentes del vector.

3.- Los vectores en el plano tienen las siguientes características.

Sea $a = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ a y b son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Se define la suma de vectores como

$$a + b = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$



4.- Si $a = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa un vector y α es un escalar, entonces:

$$\alpha a = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

Multiplicación por escalar

Ejemplo

Si $a = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ representa un vector y 3 es un escalar, entonces

$$3a = \begin{bmatrix} 3(-5) \\ 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Magnitud

Ejemplo

Si $u = (2, -5)$, encuentra su magnitud y dirección.

Magnitud: $|u| = \sqrt{(2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

Dirección $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{2}\right) = -68.19^\circ = 291^\circ$ que corresponde al cuarto cuadrante.

Ejemplo

Encuentra la distancia entre los puntos $P = (3, 2)$ y $Q(-1, 5)$, o la longitud del segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$

$$|PQ| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

2.2 El producto vectorial y las proyecciones en R^2

Se define el producto vectorial entre a y b donde $a = (x_1, y_1)$ y $b = (x_2, y_2)$

Como:

$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$, donde $a \cdot b$ es un escalar.

Ejemplo:

Sean x y z dos vectores $x = (1,2)$ y $z = (3,4)$; entonces, su producto vectorial es:

$$x \cdot z = (1,2) \cdot (3,4) = 1(3) + 2(4) = 3 + 8 = 11$$

Proyección de vectores:

Se define una proyección en R^2 entre a y b , considerándolos como dos vectores diferentes de cero, entonces la proyección de a sobre b es un vector que se define como:

$$Proy_b a = \frac{a \cdot b}{|b|^2}$$

Donde se cumple que:

La $Proy_b a$ es paralela a b

La diferencia $a - Proj_b a$ es ortogonal a b

$$a = (b - Proj_b a) + Proj_b a$$

Nota: En ocasiones el término ortogonal y el término perpendicular son sinónimos

Ejemplo:

Calcular la $Proy_b a$ considerando los vectores $a = (1,2)$ y $b = (2,3)$

Calculamos $a \cdot b = (1,2)(2,3) = 1(2) + 2(3) = 2 + 6 = 8$

$$|b| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Al cuadrado, el término anterior es igual a 13.

$$Proy_b a = \frac{8}{\sqrt{13}^2} (2,3) = \left(\frac{16}{13}, \frac{24}{13}\right)$$

Ejemplo:

Calcular el vector $a - Proj_b a$ considerando los vectores $a = (1,1)$ y $b = (2,3)$

Calculamos $a \cdot b = (1,1)(2,3) = 1(2) + 1(3) = 2 + 3 = 5$

$$|b| = (2^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (4 + 9)^{\frac{1}{2}} = (13)^{\frac{1}{2}}$$

Al cuadrado, el término anterior es igual a 13.

$$Proj_b a = \frac{5}{13} (2,3) = \left(\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right);$$
$$a - Proj_b a = (1,1) - \left(\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right) = \left(\frac{3}{13}, -\frac{2}{13}\right)$$



2.3 Vectores en el espacio R^3

Los vectores en el espacio son todas las ternas ordenadas de números reales, es decir,

$$R^3 = (x, y, z) \text{ o } (x, y, z)$$

Así pues, un vector en el espacio es:

$$a = (a_1, a_2, a_3) \quad b = (b_1, b_2, b_3)$$

Y cumple con las siguientes propiedades:

1. $a + b$ es único y $a + b \in R^3$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $0 + a = a$, donde $0 = (0, 0, 0)$
4. $-a + a = 0$ donde $-a = (-a_1, -a_2, -a_3)$
5. $a + b = b + a$
6. αa es único y $\alpha a \in R^3$
7. $\alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b$
8. $(\alpha + \beta) a = \alpha a + \beta a$
9. $(\alpha \beta) a$
10. $a = a$

Donde la **magnitud** de cualquier vector será:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Y la distancia entre dos puntos a y b estará representada por:

$$|ab| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Angulo entre vectores

Como en R^2 , también podemos encontrar en el espacio el ángulo entre dos

vectores $a = (x_1, y_1, z_1)$ y $b = (x_2, y_2, z_2)$ de la siguiente manera:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} ; \theta = \cos^{-1} \left(\frac{a \cdot b}{|a| |b|} \right)$$



Vectores en tres dimensiones

Si $u = (4, 5, 1)$ y $u_2 = (2, 3, 0)$ Determine:

a) $u_1 + u_2$

b) $2u_1 - u_2$

El Ángulo que forman los Vectores $A = (3, 0, 1)$ y $B = (6, 0, 0)$ es igual a:

Solución:

$$u_1 + u_2 = (4, 5, 1) + (2, 3, 0) = ((4 + 2), (5 + 3), (1 + 0)) = (6, 8, 1)$$

$$2u_1 - u_2 = 2(4, 5, 1) - (2, 3, 0) = (8 \cdot 10 \cdot 2) - (2, 3, 0) = (6, 7, 2)$$

El ángulo que forman los vectores $a = (3, 0, 1)$ y $b = (6, 0, 0)$

$$a \cdot b = 18 + 0 + 0 = 18$$

$$|a|\sqrt{9 + 0 + 1} = \sqrt{10} = 3.1622$$

$$|b|\sqrt{36 + 0 + 0} = \sqrt{36} = 6$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{18}{(3.1622)(6)} = 18.43^\circ$$

2.4 Sub-espacio Vectorial

Iniciaremos definiendo qué es un espacio vectorial.



Un espacio vectorial es un **conjunto de vectores** $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ que cumplen con las siguientes propiedades:

Si x y w son dos vectores de un espacio vectorial V , entonces existen operaciones $x + w$ tal que:

a). $x + w = w + x$

b) $x + (w + t) = (x + w) + t$

c) Existe un único elemento 0 , tal que $x + 0 = 0 + x = x$

d) Para cada x existe un w , tal que. $x + w = w + x = 0$

e) Si k es cualquier número real, entonces. $k(x + w) = kx + kw$

f) Si k y d son dos números reales, entonces $(k + d)x = kx + dx$

g) Si k y d son dos números reales, entonces $k(dx) = (kd)x$

h) Existe un número 1 , tal que $1(x) = x$

Ejemplo:

Sean $x = (1, 2)$, $w = (1, 1)$, $t = (0, 1)$ y números reales $k = 2$ y $d = 3$

$$1. x + w = w + x$$

$$(1, 2) + (1, 1) = (1 + 1, 2 + 1) = (1 + 1, 1 + 2) = (1, 1) + (1, 2)$$

$$2. x + (w + t) = (x + w) + t$$

$$(1, 2) + \{(1, 1) + (0, 1)\} = (1, 2) + \{(1 + 0, 1 + 1)\} = \{1 + 1 + 0, 2 + 1 + 1\} = \{(1, 2) + (1, 1)\} + (0, 1) \\ = \{(1 + 1, 2 + 1)\} + (0, 1) = \{1 + 1 + 0, 2 + 1 + 1\}$$

$$3. x + 0 = 0 + x = x$$

$$(1, 2) + (0, 0) = (1 + 0, 2 + 0) = (1, 2)$$

$$4. x + w = w + x = 0$$

$$(1, 2) + (-1, -2) = (1 - 1, 2 - 2) = (-1 + 1, -2 + 2) = (0, 0)$$

$$5. k(x + w) = kx + kw$$

$$2\{(1, 2) + (1, 1)\} = 2\{(1 + 1, 2 + 1)\} = \{2(1) + 2(1), 2(2) + 2(1)\} = \{2(1), 2(2)\} + \{2(1), 2(1)\} \\ = 2(1, 2) + 2(1, 1)$$

$$6. (k + d)x = kx + dx$$

$$(2 + 3)(1, 2) = \{(2 + 3)(1), (2 + 3)(2)\} = \{2(1), 2(2)\} + \{3(1), 3(2)\} = 2(1, 2) + 3(1, 2)$$

$$7. k(dx) = (kd)x$$

$$2\{3(1, 2)\} = 2\{3(1), 3(2)\} = \{2(3)(1), 2(3)(2)\} = \{(2)(3)\}(1, 2) = \{(2)(3)(1), (2)(3)(2)\}$$

$$8. 1(x) = x$$

$$1x = 1(1, 2) = (1)(1), (1)(2) = (1, 2)$$

Un sub-espacio vectorial de V , si S es un subconjunto de V y en sí, es un espacio vectorial respecto a la adición y multiplicación definidas en V . Además, deberá cumplir las siguientes condiciones:

$$\forall U, V \in S: U + V \in S \quad \forall \alpha \in K, V \in S: \alpha V \in S$$

Ejemplo:

Determine los “Sub-espacios Vectoriales” dados los “Espacios Vectoriales” siguientes:

1. Sea V el Espacio Vectorial R^3 . Entonces, el conjunto W formado por los vectores cuya tercera componente es cero, es el siguiente sub-espacio:

Respuesta:

$$W = \{(a, b, 0) : a, b \in R\}$$

2. Sea V el conjunto de todos los polinomios $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ con coeficientes a_i , en un cuerpo K en R ; entonces, el conjunto W formado por los polinomios menor o igual que n está dado por el sub-espacio siguiente:

Respuesta:

$$W = \{\text{Polinomios } \leq n: \text{ para un } n \text{ fijo}\}$$



2.5 Combinaciones Lineales

Un vector es una combinación lineal de los vectores $V_1, V_2 \dots V_n$ y puede ser expresado de la forma:

$$w = a_1V_1 + a_2V_2 + \dots + a_nV_n$$

Donde $a_1, a_2 \dots a_n$ son escalares.

Ejemplo:

Se tienen dos vectores cualesquiera $(2, -1, 0)$ y $(3, 8, 8)$, y escalares 4 y 6, respectivamente.

Entonces, la combinación se representa por la suma de los vectores multiplicados por sus respectivos escalares.

$$4(2, -1, 0) + 6(3, 8, 8) = (8, -4, 0) + (18, 48, 48) = (26, 44, 48)$$

Sea V un espacio vectorial sobre k , y sea

$$G = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$$

Un conjunto de vectores de V . Se dice que G es un generador de V si para todo

vector $X \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, tales que

$$X = \alpha_1V_1 + \alpha_2V_2 + \dots + \alpha_mV_m$$

El espacio generado es el conjunto de combinaciones lineales de $V_1, V_2 \dots V_m$, es decir, $\{V_1, V_2, \dots, V_m\} = \{V: V = a_1V_1 + a_2V_2 + \dots + a_mV_m\}$

Ejemplo.

Sean $\{(1, 2), (3, 4), (6, 7)\}$ un conjunto de vectores y 2, 3 y 6 tres escalares, respectivamente.

Entonces, si existe una x tal que

$$x = 2(1,2) + 3(3,4) + 6(6,7)$$

Entonces es un generador de V

$$x = (2,4) + (9,12) + (36,42) = (2+9+36, 4+12+42) = (47,58)$$

2.6 Independencia Lineal

Un conjunto de vectores $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$, es linealmente independiente si existen escalares $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$, que una combinación lineal de dichos vectores con los anteriores escalares, respectivamente; si esta última operación da cero y los escalares son todos iguales a cero, entonces se trata de una combinación lineal, linealmente independiente.

1. Independencia Lineal: Sea $S = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ un conjunto de "Vectores", entonces:

S es linealmente independiente si la igualdad

$$a_1V_1 + a_2V_2 + \dots + a_nV_n = 0$$

Sólo se satisface con $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

2. Dependencia lineal: Sea $S = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ un conjunto de "Vectores", entonces:

S es linealmente dependiente si existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$, no todos iguales a cero, tales que:

$$a_1V_1 + a_2V_2 + \dots + a_nV_n = 0$$

Nota:

- a) Todo conjunto que contiene al vector 0 es linealmente dependiente.
- b) Si S es un conjunto linealmente independiente entonces cualquier subconjunto de S es linealmente independiente.

2.7 Bases y Dimensión

Un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial V si:



I) Genera a V

II) Es linealmente independiente

Si $B = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ es una base de V , entonces cualquier otra base de dicho espacio está formada por n vectores, es decir, dos bases cualesquiera de V tienen igual número de vectores.

DIMENSIÓN

Si $B = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ es una base de V , se dice que V es de dimensión n , es decir, es el número de elementos en una base de V .

Si V es un espacio vectorial de dimensión n , cualquier conjunto linealmente independiente formado por n Vectores de V es una base de dicho espacio.

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y S es un sub-espacio de V , entonces:

$$\dim S \leq n$$

Por lo que, si $\dim S = n$, entonces $S = V$.



Ejemplo:

Sean a y b dos vectores que generan a R^2 , $a = (1,2)$ y $b = (1,3)$, entonces consideremos a todos los vectores del espacio vectorial como $x=(x, y)$, y escalares a_1 y b_1

$$X = a_1 a + b_1 b = a_1(1,2) + b_1(1,3) = (a_1 + b_1, 2a_1 + 3b_1) = (x, y)$$

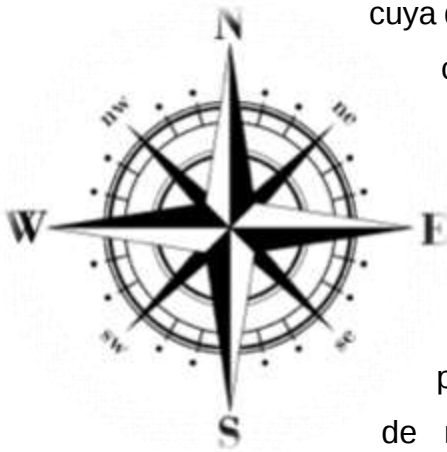
$$b_1 = y - 2x$$

$$a_1 = 3x - y$$

Como x e y pueden tomar cualquier valor, los vectores a y b generan R^2 y su dimensión es igual al número de vectores, y como son 2, su dimensión es dos.

RESUMEN

En forma cotidiana podemos definir al “Vector” como una cantidad que tiene: “Magnitud”, Dirección” y “Sentido”; y esto se debe a partir de conceptos físicos cuya descripción se refiere a algo más que un número. Los



conceptos físicos han encontrado una adecuada representación geométrica los cuales pueden ser caracterizados y manejados analíticamente mediante parejas o ternas ordenadas de números.

En muchas ramas de las “Matemáticas” se presentan frecuentemente conjuntos, con elementos de muy distinta naturaleza donde se emplea con frecuencia el concepto de “Combinación Lineal”. Estos conjuntos con las leyes de la adición y la multiplicación por un escalar definidas en forma usual, tienen en común un gran número de propiedades algebraicas la cual se conoce como “Espacio Vectorial”. De manera general, a los elementos de un “Espacio Vectorial” se les llama “Vectores” y en toda la unidad es el concepto básico y fundamental para poder desarrollarlo y aplicarlo.



BIBLIOGRAFÍA

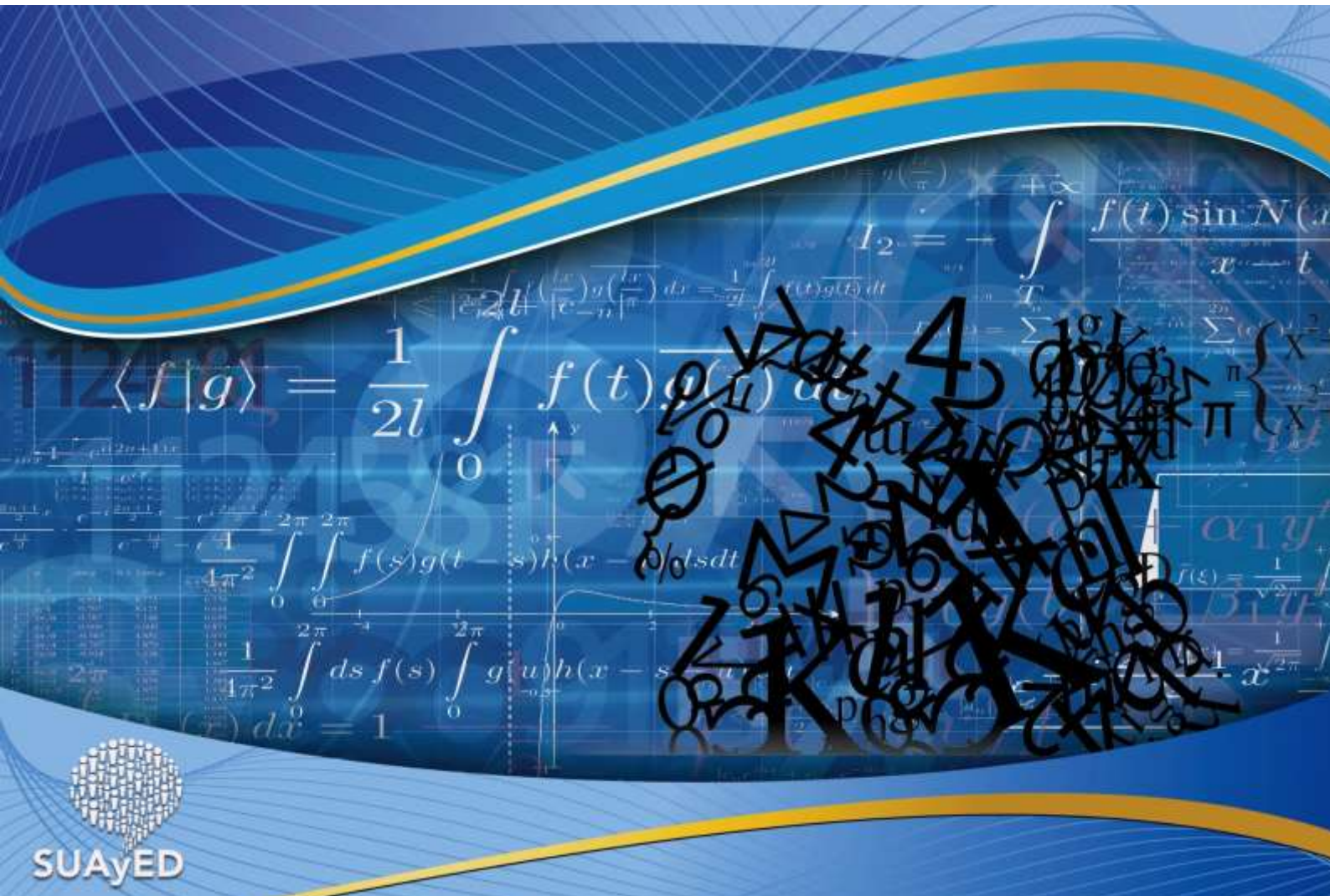


1. Kolman Bernard y David Pearson (2006). *Algebra Lineal* (8ª ed.). México: Prentice Hall, 648pp.
2. David Poole (2004). *Algebra Lineal: Una introducción moderna*. México: Thomson, Primera Edición, 2004, 763pp.



UNIDAD 3

TRANSFORMACIÓN LINEAL



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá los elementos, propiedades y la representación matricial de las transformaciones lineales.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

3. Transformación lineal

3.1 Definición y ejemplos

3.2 Propiedades: imagen y Kernel

3.3 Representación matricial de una transformación lineal

3.4 Isomorfismos



INTRODUCCIÓN

En la vida actual es muy importante resolver problemas utilizando las matemáticas.

Cuando se trabaja con espacios vectoriales surgen situaciones en las cuales es de utilidad usar las transformaciones lineales para la solución de problemas, una parte importante es la representación matricial de una transformación lineal. Kolman, (2006) pp. 272 y 521.

Aplicaciones de las Transformaciones Lineales.

Se aplican en sistemas de ecuaciones lineales, en matrices y en un sin número de problemas, gracias a las transformaciones lineales sabemos el dominio e imagen y teniendo esto saber si es un espacio vectorial. Poole, D (2007) pag.201.

3.1. Definición y ejemplos

A continuación se tiene una simbología utilizada que se utilizará en las transformaciones lineales:

- Una letra minúscula $a, b, \dots$ representa un “Vector”.
- Una letra mayúscula $A, B, \dots$ un “Espacio Vectorial” y también “Sub-espacios Vectoriales”.
- “Vectores” entre llaves $\{a, b, \dots\}$ una “Base Generadora”.
- Representa una “Transformación Lineal” con su dominio y contra dominio “ $T: V \rightarrow W$ ”.
- Representa la “Dimensión” de un “Espacio Vectorial” $\dim(V)$.

Transformación Lineal



Definimos una “Transformación Lineal” T de un espacio vectorial R sobre un espacio vectorial S a una función que asigna a cada vector $r \in R$ un único vector. Es decir, si R y S son espacios vectoriales una función $T: R \rightarrow S$ recibe el nombre de transformación tal que :

Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal T de R en S es una función que asigna a cada vector u en V un único vector $T(u)$ en S tal que :

a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ cualesquiera sean u y v en V .

b) $T(ku) = k T(u)$, para cada u en V y cada escalar K . (Kolman, (2006), p. 502)

Ejemplo

Definamos la función $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida bajo la regla $T(x, y, z) = (x, y)$ así se tiene que:

Se sustituye la x por el 8 y la y por el 5.

$$T(8, 5, 9) = (8, 5)$$

Ejemplo

Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y, z) = (z, 2z)$$

Se reemplazan los valores: Primero se sustituye la z por 2 y enseguida la z multiplicada por 2.

$T(x, y, z) = (z, 2z)$, entonces cualquier transformación sería:

$$(2, 1, 4) = (4, 8)$$

Una transformación es lineal si cumple:

$$i. T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$ii. T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1)$$



Propiedades de las transformaciones lineales:

Si $T: R \rightarrow S$ es una transformación lineal, entonces, $T(0) = 0$

Sea $T: R \rightarrow S$ una transformación lineal. Si $C = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ es una base de R , entonces el conjunto $G = \{Tr_1, Tr_2, \dots, Tr_n\}$ es un generador.

3.2 Propiedades: Imagen y Kernel

Propiedades de las transformaciones lineales: *imagen y núcleo*.

Consideremos en primer lugar a la transformación de R^3 en R^2 , definida por:

$$S(x, y, z) = (y, 3y)$$

La imagen de cualquier vector bajo esta transformación es una pareja ordenada cuya segunda coordenada es el triple de la primera.

Al conjunto de todos esos vectores se le conoce como “imagen” de la transformación S .

Una vez definida la imagen de una transformación, nos introduciremos a la definición de núcleo.

Se llama núcleo de una transformación al conjunto de vectores cuya imagen es el vector cero.

3.3 Representación matricial de una transformación lineal

La representación matricial de una transformación lineal nos indica la relación existente entre ambas para que una transformación lineal encuentre su representación matricial.

Consideremos la transformación $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y, z) = (x+2y, 3x-z)$$

Tratemos de encontrar una matriz A tal que el producto de ésta por cualquier vector del dominio nos proporcione la imagen de dicho vector bajo la transformación T , es decir, una matriz A que cumpla,

$$Av = T(v)$$



Como v es un vector de $\mathbb{R}^3$ y $T(v)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ la igualdad anterior sólo podrá lograrse mediante una matriz A de 2×3 . En consecuencia, la matriz A tendrá la forma Lay, (2004) p.75:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Y satisfacer la igualdad

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x - z \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = x + 2y \quad y \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 3x - z$$

Lo cual es válido para los valores

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 0$$

$$a_{21} = 3, a_{22} = 0, a_{23} = -1$$

Por lo que nuestra matriz A es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A esta matriz se le conoce como matriz asociada a la transformación T.

Una vez calculada nuestra matriz asociada, estudiemos las imágenes de los vectores de la base canónica, es decir,

$$R = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

Bajo la transformación T definida con anterioridad tenemos que:

$$T(1, 0, 0) = (1, 3)$$

$$T(0, 1, 0) = (2, 0)$$

$$T(0, 0, 1) = (0, -1)$$

Éstos elementos no son más que los vectores columna que integran la matriz asociada T , por lo cual, podemos concluir que, para obtener la matriz asociada a una transformación basta con calcular las imágenes de los vectores que integran la base canónica del dominio.

Para toda transformación lineal de R_n en R_m existe una matriz A de $m \times n$ que cumple $Tx = Ax$ para toda $x \in R_n$

Definición. Sea $T: R_n \rightarrow R_m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única A de $m \times n$ tal que $Tx = Ax$ para toda x .

Ejemplos de Aplicaciones de las Transformaciones Lineales

1. Una casa editora publica un libro en tres ediciones diferentes: cubierta dura, cubierta blanda y cubierta de lujo. Cada libro requiere cierta cantidad de papel y de material para la cubierta. Los requisitos están dados en gramos por la siguiente matriz:

	Cubierta dura	Cubierta blanda	Cubierta de lujo
Papel	300	500	800
Material para la cubierta	40	50	60

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

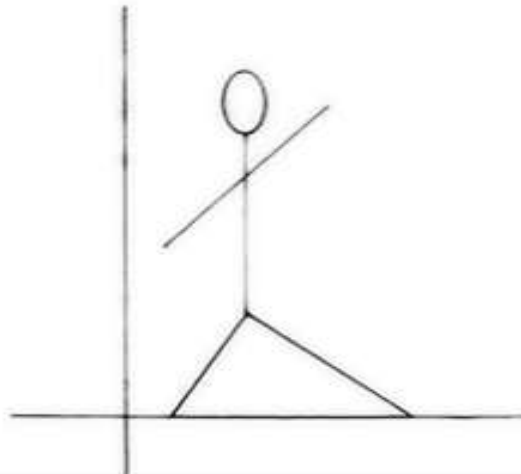
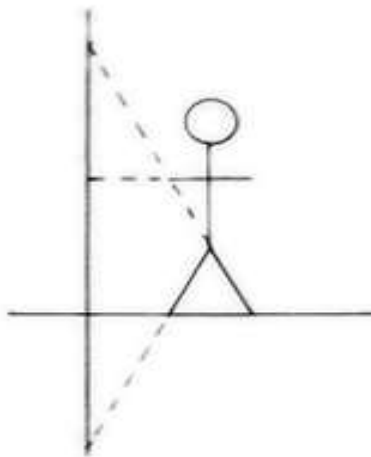
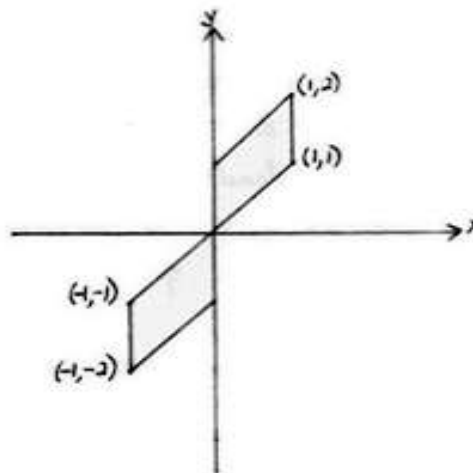
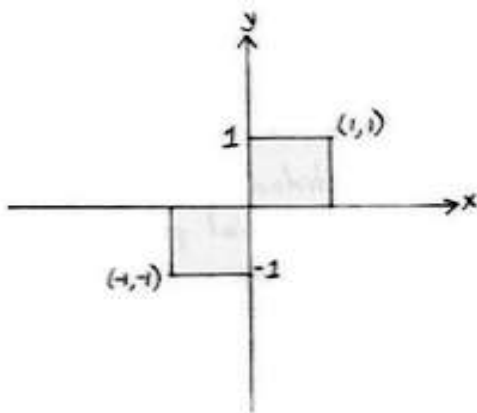
Deja que x represente el vector producción, donde x_1, x_2, x_3 representan el número de libros con cubierta dura, cubierta blanda y cubierta de lujo respectivamente, que se publican. La transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por $T(x) = Ax$ nos

da el vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, donde y_1 representa la cantidad total de papel requerido y y_2 la cantidad de material para la cubierta. Suponga que

$$x = \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad \text{entonces,} \quad T(x) = A_x = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810,000 \\ 87,000 \end{pmatrix}$$

Por lo que se requiere 810,000 gramos en papel y 87,000 gramos en material para la cubierta.

2. ¿Puede una transformación lineal cambiar un dibujo por otro? Observa como la transformación $T; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, x+y)$ cambia los siguientes dibujos:



3.4. Isomorfismo

Para introducirnos en el estudio de los isomorfismos debemos tener claras algunas definiciones que se presentan a continuación.

Definición.

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, se dice que T es uno a uno (notación 1 - 1) si ocurre: $Tv_1 = Tv_2 \rightarrow v_1 = v_2$

Es decir, si todo vector w en la imagen de T es de a lo sumo un vector en V .

Definición.

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Se dice que T es sobre, si para toda $w \in W$ existe al menos una $v \in V$ tal que $Tv = w$.

Es decir, T es sobre: Si y sólo si la imagen de $T = W$.

Para dejar aún más claros estos conceptos, tomemos en cuenta la siguiente definición.

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, supongamos que $\dim V = \dim W = n$, entonces:

1. si T es 1 - 1, entonces T es sobre
2. si T es sobre, entonces T es 1 - 1.



Se dice que la transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es un isomorfismo si T es 1 - 1 y es sobre dos espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W . (notación $V \cong W$).

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$$

Ejemplo: Sea $T: R^3 \rightarrow P_2$ definida por Supongamos que

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 = 0 + 0x + 0x^2$$

Entonces $a = b = c = 0$. Es decir, núcleo de $T = 0$ y T es 1 - 1.

RESUMEN



En diversas ramas de las Matemáticas, la Física y las distintas Ciencias Sociales; se utilizan con frecuencia modelos que emplean en su estructura funciones vectoriales de variable vectorial; es decir, funciones de la forma $w = f(v)$; donde w y v son “Vectores”. A tales funciones se denomina usualmente “Transformaciones”.

Por consiguiente esta unidad se refirió a una clase especial de “Transformaciones”; llamadas “Transformaciones Lineales”; las cuales son las más simples y también las de mayor aplicación.

En la práctica profesional, muchos problemas que involucran “Transformaciones” de tipo general suelen resolverse aproximando éstas a las “Transformaciones Lineales”.



BIBLIOGRAFÍA

**SUGERIDA**

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard; Hill, David R. (2006)	1	214-219; 224-247; 272-360; 294-317
	10	502-521
Poole, David; “Algebra Lineal , Una introducción moderna” (2004)	6	470-480; 481-495

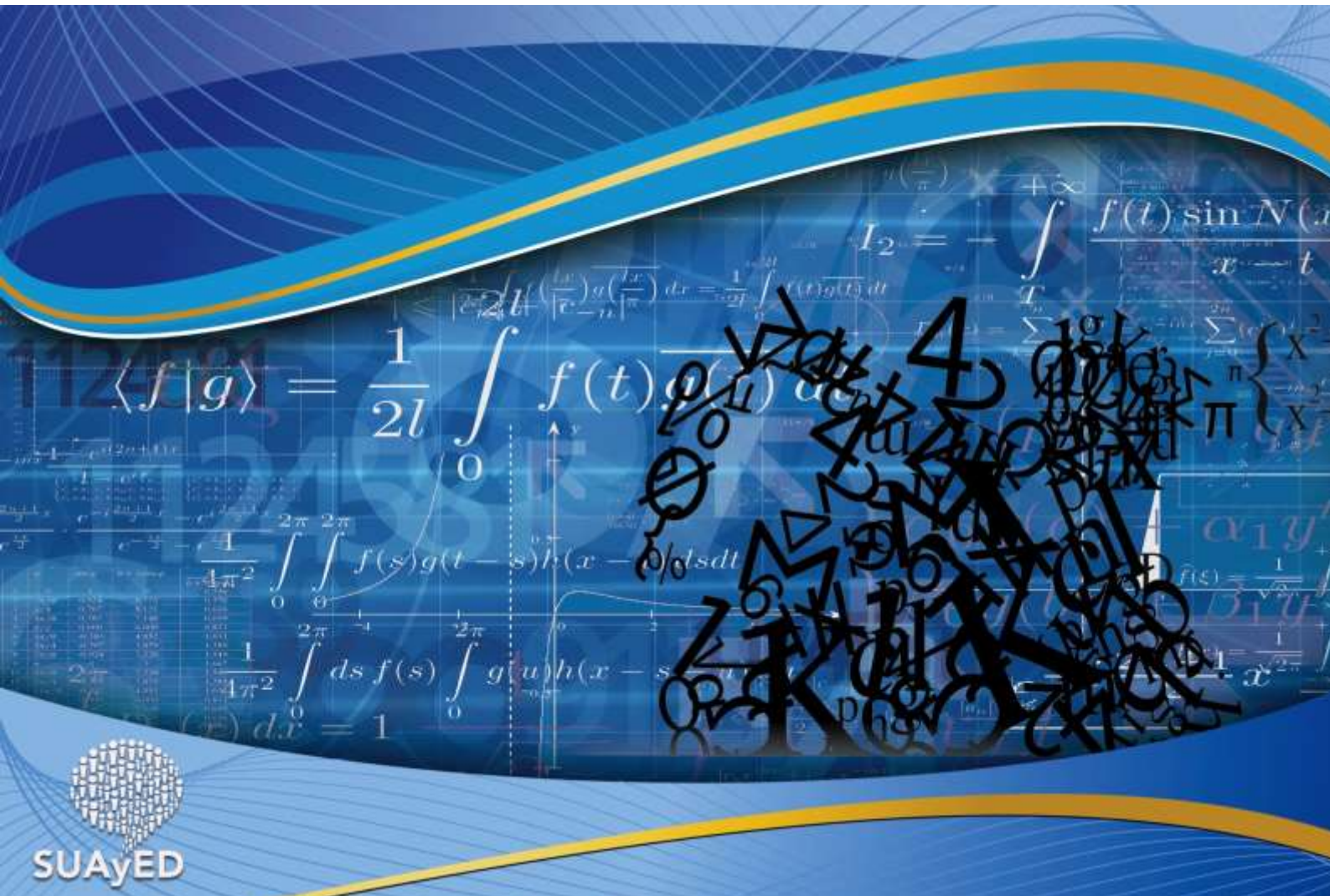
Kolman, Bernard; Hill, David R. “*Algebra Lineal*”, Pearson. Prentice Hall, Octava Edición, 648pp.

Poole David, *Algebra Lineal: Una introducción Moderna*, Thomson, Primera Edición, 2004, 763 pp.



Unidad 4

Producto interno



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá las diferentes aplicaciones del producto interno.

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

4. Producto interno

4.1 Ortogonalidad

4.2 Aplicaciones del producto interno

INTRODUCCIÓN

Hoy en día, la solución de problemas utilizando las matemáticas se realiza cada vez con más frecuencia. Por lo tanto, el uso de los conceptos de Producto Interno y Ortogonalidad para la solución de problemas, comprende una herramienta más eficiente para la solución de problemas reales.

4.1 Ortogonalidad

Empezamos por definir Ortogonalidad, la cual se refiere a vectores perpendiculares, y Ortonormalidad, que se refiere a vectores perpendiculares y que tengan norma o longitud igual a uno.

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

Es una metodología que utiliza gran parte de los conceptos vistos en los temas 1, 2 y 3 del Álgebra Lineal, que permite calcular una nueva base de vectores a partir de la cual es más fácil realizar cálculos sobre estos vectores.

Nos sirve para obtener un conjunto de vectores que sea una base S de un espacio vectorial V , tal que S sea Ortonormal, es decir Ortogonal y con una norma igual a uno. Sea V un Espacio Vectorial con Producto Interno y sea $G = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V . El conjunto $G_0 = \{w_1, \dots, w_n\}$

$$w_1 = v_1$$

$$w_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(v_i, w_k)}{(w_k, w_k)} w_k, \text{ para } i = 2, 3, \dots, n$$

Es un generador de V .

Observaciones

- Si G es una base de V , entonces G_0 es una base ortogonal de V .
- Para obtener una base Ortonormal a partir de una base Ortogonal

$$B = \{w_1, \dots, w_r\},$$

bastará con multiplicar cada uno de los vectores

$$(w_i, \text{ con } i = 1, n), \text{ e } B \text{ por el escalar } \frac{1}{\|w_i\|}$$



Una base Ortonormal es un conjunto de vectores que forman una base, éstos son ortogonales con una norma igual a uno.

Ejemplo:

Obtengamos una base Ortonormal del espacio V generado por:

$$v_1 = (1, 0, -1)$$

$$v_2 = (-2, 1, 1)$$

$$v_3 = (-1, 1, 0)$$

Primero obtendremos un generador ortogonal de dicho espacio, para ello hacemos:

$$w_1 = v_1 = (1, 0, -1)$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (-2, 1, 1) - \frac{-3}{2} (1, 0, -1) = (2, 1, 1)$$

$$\frac{-3}{2} (1, 0, -1) = (-2, 1, 1) - (-3/2, 0, 3/2) = (-2 + 3/2, 1 - 0, 1 - 3/2) = (-1/2, 0, -1/2) = 1/2(-1, 0, -1)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (-1, 1, 0) - \frac{-1}{2} (1, 0, -1) = (-1, 1, 0) + 1/2(1, 0, -1) =$$

$$(-1, 1, 0) + (1/2, 0, -1/2) = (-1 + 1/2, 1 + 0, 0 - 1/2) = (-1/2, 1, -1/2)$$

Por lo tanto:

$$G_0 = \left\{ (1, 0, -1), \left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right) \right\}$$

Es un generador "Ortogonal" de V y el conjunto

4.2 Aplicaciones del producto interno

Producto interno de dos vectores

Supóngase para R^3 el producto interno entre dos vectores

Es representado como $a \cdot b$ y está dado por:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Generalizando:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

El producto interno es llamado también producto punto o producto escalar. Se puede ver que el producto interno entre dos vectores siempre tendrá como resultado un escalar, es decir, un número.



El producto interno frecuentemente se efectúa entre un vector renglón y un vector columna.

Ejemplo:

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c \cdot d = 1(1) + 2(2) + 4(1) = 1 + 4 + 4 = 9$$

$$c = (1, 2, 4)$$

RESUMEN

Como se ha visto a lo largo del curso, los elementos fundamentales que constituyen un Espacio Vectorial son los siguientes:

a) Un conjunto de Vectores

b) Un conjunto de escalares

c) Dos operaciones que son la adición y la multiplicación por un escalar

Por consiguiente, la definición del Espacio Vectorial, así como sus distintos Teoremas que se refieren a distintas Propiedades Algebraicas que aluden de manera concisa al comportamiento de Vectores y Escalares con respecto a las operaciones de la Adición y la Multiplicación.



También deben considerarse los conceptos métricos que son: la Magnitud, la Distancia y el Ángulo, los cuales pueden ser medidos sin ningún problema. Además de las nociones de Independencia Lineal, la Base y la Dimensión.

Ahora, con respecto al tema principal de la Unidad 4, existen diversas formas de introducir en un Espacio Vectorial dichos conceptos mencionados en los párrafos anteriores. Una de ellas consiste en definirlos a partir de una operación conocida como Producto Interno

BIBLIOGRAFÍA

**SUGERIDA**

Autor	Capítulo	Páginas
Poole, David (2011)	1	16-29
Lay, David (2004)	5	375-383

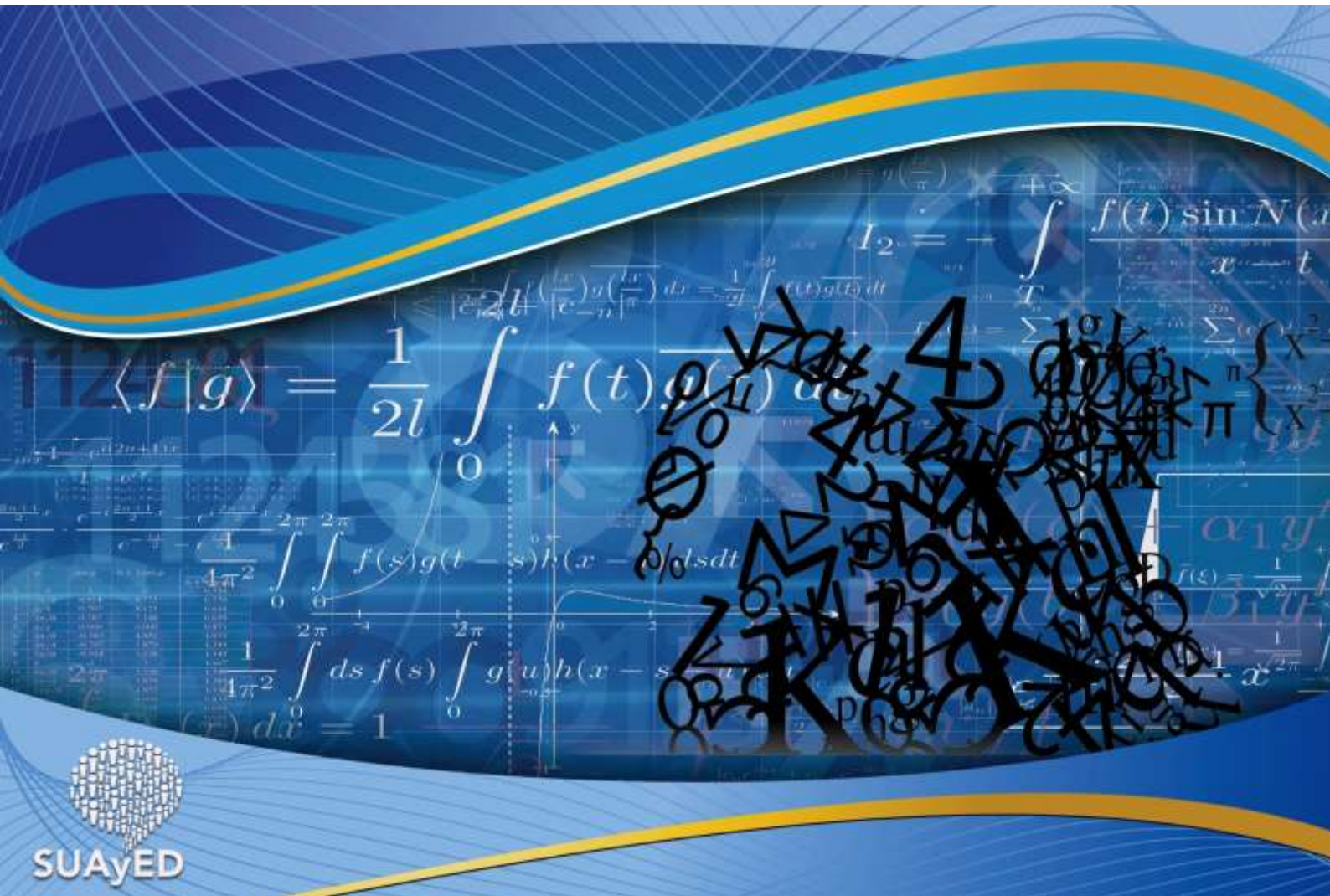
Poole David, *Algebra Lineal: Una introducción Moderna*, Thomson, Primera Edición, 2011, 763pp.

David C. Lay, *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.



Unidad 5

Matrices



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificara las propiedades de una matriz y realizara operaciones con matrices

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

5. Matrices

5.1 Operaciones con Matrices

5.2 Inversa y traspuesta de una matriz cuadrada

INTRODUCCIÓN

Las matrices, aunque parezcan al principio objetos extraños, son una herramienta muy importante para expresar y discutir problemas que surgen en la vida real. En los negocios a menudo es necesario calcular y combinar ciertos costos y cantidades de productos. Las tablas son una forma de representar estos datos. Sin embargo, agrupar los datos en un rectángulo nos muestra una representación más clara y fácil de los datos. Tal representación de los datos se denomina matriz.

Otras aplicaciones de las matrices directamente relacionadas con el área informática es en el uso del internet, por ejemplo los motores de búsqueda para localización y recuperación de información en internet, utilizan matrices para seguir el rastro de las ubicaciones en donde esta se encuentra, el tipo de información que se haya en cada ubicación, las palabras clave que aparecen en ellas, e incluso la manera en



que los sitios web se vinculan entre si con otros, utilizan matrices. En gran medida, la eficacia de Google, estriba en la manera en que utiliza las matrices para determinar cuáles sitios están referenciados en otros sitios. Esto es, en lugar de mantener de manera directa el rastro del contenido de la información de una página Web real o de un tema de búsqueda individual, la estructura de la matriz de Google determina las páginas Web que coinciden con el tema de búsqueda, y luego presenta una lista de tales paginas en un orden de importancia Kolman, (2006) pág. 13. La teoría de matrices es ampliamente

utilizada en la informática. Las bibliotecas gráficas como por ejemplo OpenGL se valen de transformaciones espaciales y de las matrices para representar gráficos 3D a 2D que luego se traducen a imagen en los monitores.

Las transformaciones en las que intervienen las matrices. Comenzaron éstas su aplicación en 1850 y se han aplicado a multitud de campos: álgebra, geometría, cálculo, informática, física, etc. Recientemente han alcanzado un desarrollo sorprendente en aplicaciones de animación: en definitiva, transformación de figuras en espacios de dos y tres dimensiones.

Teoría de gráficas

La teoría de gráficas es una área relativamente nueva de las matemáticas, que se utiliza ampliamente para formular modelos de muchos problemas informáticos, en los negocios, las ciencias sociales y las ciencias físicas, en estas gráficas se involucra el concepto de grafo, que es una red de nodos y líneas, los cuales son representados por una matriz de adyacencia. Lay, David. (2004) Pág. 158.



Son muchas las circunstancias, que se puedan describir usando matrices: suma de matrices, multiplicación escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices. También podemos aplicar estos cálculos dentro de esta área matemática del álgebra lineal en temas como sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales, transformaciones lineales, etc.

5.1 Operaciones con matrices

Una matriz es un conjunto de renglones o columnas ordenadas de $m \times n$, donde m es el número de renglones y n el número de columnas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Un arreglo horizontal es $[a_{11} \ a_{12} \dots \ a_{1n}]$ y un arreglo vertical es

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Dentro de las primeras operaciones tenemos las elementales, las cuales se llevan a cabo sobre los renglones o columnas de una matriz.

Las operaciones que se pueden ejecutar son las siguientes:





1. Suma y Resta

Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \dots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \underline{\underline{b_{21}}} & \underline{\underline{b_{22}}} & \dots & \underline{\underline{b_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

La suma estará representada por

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \dots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \underline{\underline{b_{21}}} & \underline{\underline{b_{22}}} & \dots & \underline{\underline{b_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \underline{\underline{a_{21} + b_{21}}} & \underline{\underline{a_{22} + b_{22}}} & \dots & \underline{\underline{a_{2n} + b_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Supóngase A y B, entonces la resta de matrices está representada por A-B.

Y la sustracción se lleva a cabo restando a cada uno de los elementos de la matriz A, cada uno de los elementos de la matriz B de su misma posición, de ambas matrices, y colocando el resultado en la matriz resultante y en la misma posición de los elementos restados.

Sean A y B las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \underline{\underline{a_{21}}} & \underline{\underline{a_{22}}} & \dots & \underline{\underline{a_{2n}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$



y

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

La resta 3 se realiza de la siguiente manera

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo la resta de las matrices A y B siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicación por escalar

La Multiplicación por un escalar. Supóngase que se tiene una matriz A y un escalar k constante, entonces, la multiplicación de una matriz por un escalar se representa con kA. La multiplicación se lleva a cabo multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el escalar y el resultado se pone en la misma posición de la matriz resultante.

Sean A una matriz y k un escalar, entonces el producto escalar de la matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y k el escalar

La multiplicación por un escalar se realiza de la siguiente manera:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ kam1 & kam2 & \dots & kamn \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo de la resta de las matrices A y B es el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el escalar 4.

$$4A = \begin{bmatrix} 4(1) & 4(1) & 4(1) \\ 4(3) & 4(1) & 4(2) \\ 4(1) & 4(1) & 4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 12 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$



3. Multiplicación de Matrices

Supóngase que se tienen dos matrices A y B. Para poder realizar la multiplicación de estas dos matrices primero se debe comprobar que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de renglones de la matriz B.

Suponiendo que se tiene una matriz A con n renglones y m columnas, entonces la matriz B deberá tener m renglones y el número de columnas puede variar digamos k, entonces la matriz resultante será una matriz con n renglones y k columnas Poole, David. (2004) Pag.137-139.

Sean A una matriz de nxm y B una matriz de mxk

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de A por B se realiza de la siguiente manera:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{bmatrix} = A$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}) + a_{12}(b_{21}) + \dots + a_{1m}(b_{m1}) & \dots & a_{11}(b_{1k}) + a_{12}(b_{2k}) + \dots + a_{1m}(b_{mk}) \\ a_{21}(b_{11}) + a_{22}(b_{21}) + \dots + a_{2m}(b_{m1}) & \dots & a_{21}(b_{1k}) + a_{22}(b_{2k}) + \dots + a_{2m}(b_{mk}) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(b_{11}) + a_{n2}(b_{21}) + \dots + a_{nm}(b_{m1}) & \dots & a_{n1}(b_{1k}) + a_{n2}(b_{2k}) + \dots + a_{nm}(b_{mk}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo de la multiplicación de las matrices A y B que se muestran a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



y

La multiplicación se realiza de la siguiente manera:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2) + 1(2) + 1(0) & 1(1) + 1(1) + 1(1) & 1(2) + 1(2) + 1(1) \\ 3(2) + 1(2) + 2(0) & 3(1) + 1(1) + 2(1) & 3(2) + 1(2) + 2(1) \\ 1(2) + 1(2) + 1(0) & 1(1) + 1(1) + 1(1) & 1(2) + 1(2) + 1(1) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1 \\ 6+2+0 & 3+1+2 & 6+2+2 \\ 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 10 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} M$$

4. Producto Cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar con un elemento perteneciente al conjunto A y un elemento del conjunto B .

A tiene m elementos

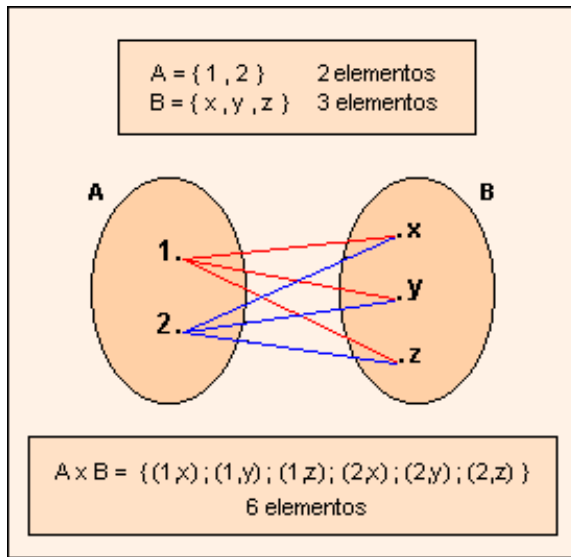
B tiene n elementos $\rightarrow$ *A x B tiene M x N elementos* $\triangleright$

Los elementos de $A \times B$ son pares ordenados. Cada par que se forma con un elemento del conjunto A y uno del conjunto B , en ese orden y recibe el nombre de par ordenado. Sus elementos se colocan entre paréntesis, separados por coma.

$$(x, y) \neq (y, x)$$



Ejemplo 1



Ejemplo 2

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{-1, 0, 1\}$ entonces $A \times B = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$.

A tiene 2 elementos, B tiene 3, y $A \times B$ tiene $2 \times 3 = 6$

Ejemplo 3

Para los conjuntos $A = \{2, 5, 9\}$ y $B = \{p, q\}$, el producto Cartesiano de estos dos conjuntos contendrá los siguientes elementos:

$$A \times B = \{(2, p), (2, q), (5, p), (5, q), (9, p), (9, q)\}$$

Es muy importante darse cuenta de que, en general, el producto Cartesiano no es conmutativo. Algunas veces lo es, pero otras no. En el ejemplo mostrado, el producto Cartesiano $B \times A$ de los dos conjuntos citados será:

$$B \times A = \{(p, 2), (p, 5), (p, 9), (q, 2), (q, 5), (q, 9)\}$$

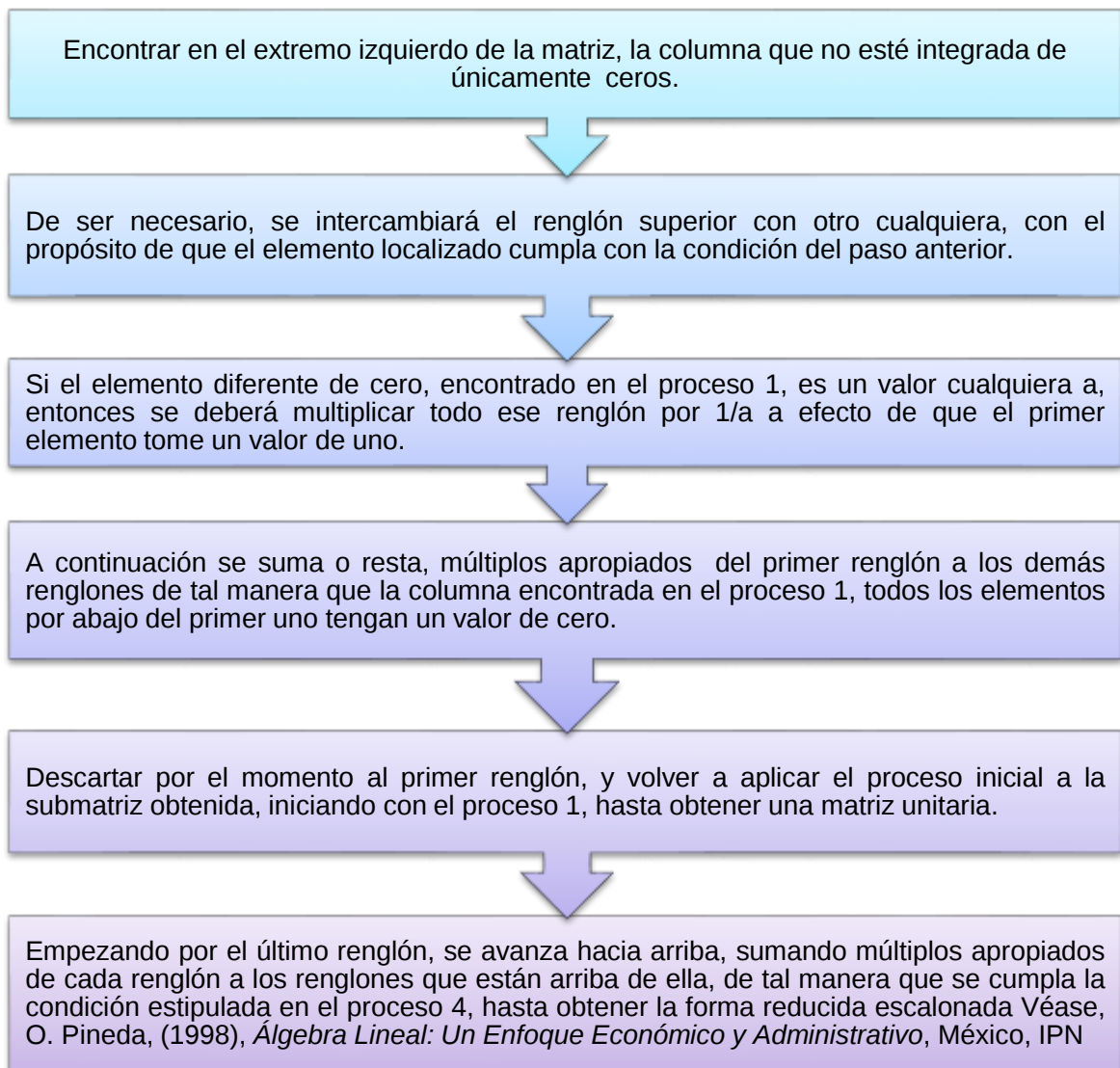
Esta definición de producto Cartesiano se puede extender fácilmente al producto Cartesiano de más de dos conjuntos, tales como los productos Cartesianos $A \times B \times C$ y $R \times I \times Q$

5.2 Inversa y traspuesta de una matriz cuadrada

La matriz inversa es de suma importancia en el Álgebra Lineal y su aplicación en el área administrativa.

El cálculo de la inversa se hará utilizando el método de Gauss-Jordan.

Este método requiere de los siguientes procesos para su obtención:



Ejemplo de la obtención de la inversa de una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inicio del cálculo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón uno columna uno es 1, se cumple con esa parte.

El siguiente paso sería hacer cero el tres del segundo renglón y el uno del 3er renglón, ambos de la primera columna.

Para hacer cero el tres, multiplicamos por -2 el primer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al segundo renglón de la misma matriz.

Para hacer cero el uno, multiplicamos por -1 el primer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al tercer renglón de la misma matriz.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Quedando así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} A$$

Como el valor del renglón dos y columna dos es -1 y debe ser 1 se multiplica por -1.

Quedando como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Como el valor del renglón dos y columna dos es uno, enseguida hay que hacer el uno del renglón uno y columna dos y -1 del renglón tres y columna dos.

El siguiente paso sería hacer cero el uno del primer renglón de la columna dos, para ello al renglón uno se le resta el renglón dos de la matriz anterior.

Para hacer cero el -1 del renglón tres y columna dos, sumamos renglón uno y el tres de la matriz anterior.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón tres columna tres es dos, hay que hacerlo primero uno, para ello multiplicamos ese renglón por 1 ó 2.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Quedando así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Como el valor del renglón tres de la columna tres es uno, se cumple con esa parte.

El siguiente paso sería hacer cero el uno negativo del renglón uno y columna tres y el dos del renglón dos y columna tres de la matriz derecha anterior.

Para hacer cero el -1, al renglón uno le restamos el renglón tres de la matriz anterior.

Para hacer cero el dos, multiplicamos por -2 el tercer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al primer renglón de la misma matriz.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Dónde:

$$4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 & .5 \\ 1 & 0 & -1 \\ .5 & -.5 & .5 \end{bmatrix} U$$

Donde la matriz inversa es:

$$\begin{bmatrix} -1.5 & .5 & .5 \\ 1 & 0 & -1 \\ .5 & -.5 & .5 \end{bmatrix}$$

Matriz Transpuesta

La matriz transpuesta está dada por una matriz en la cual se intercambian los renglones por columnas, dando como resultado la matriz transpuesta.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Su transpuesta es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Obtención de la matriz transpuesta de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Sea la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La transpuesta es:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

RESUMEN

En este tema se trataron los conceptos fundamentales y las operaciones más importantes de aplicación directa, como son: suma de matrices, multiplicación escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices, producto cartesiano

BIBLIOGRAFÍA

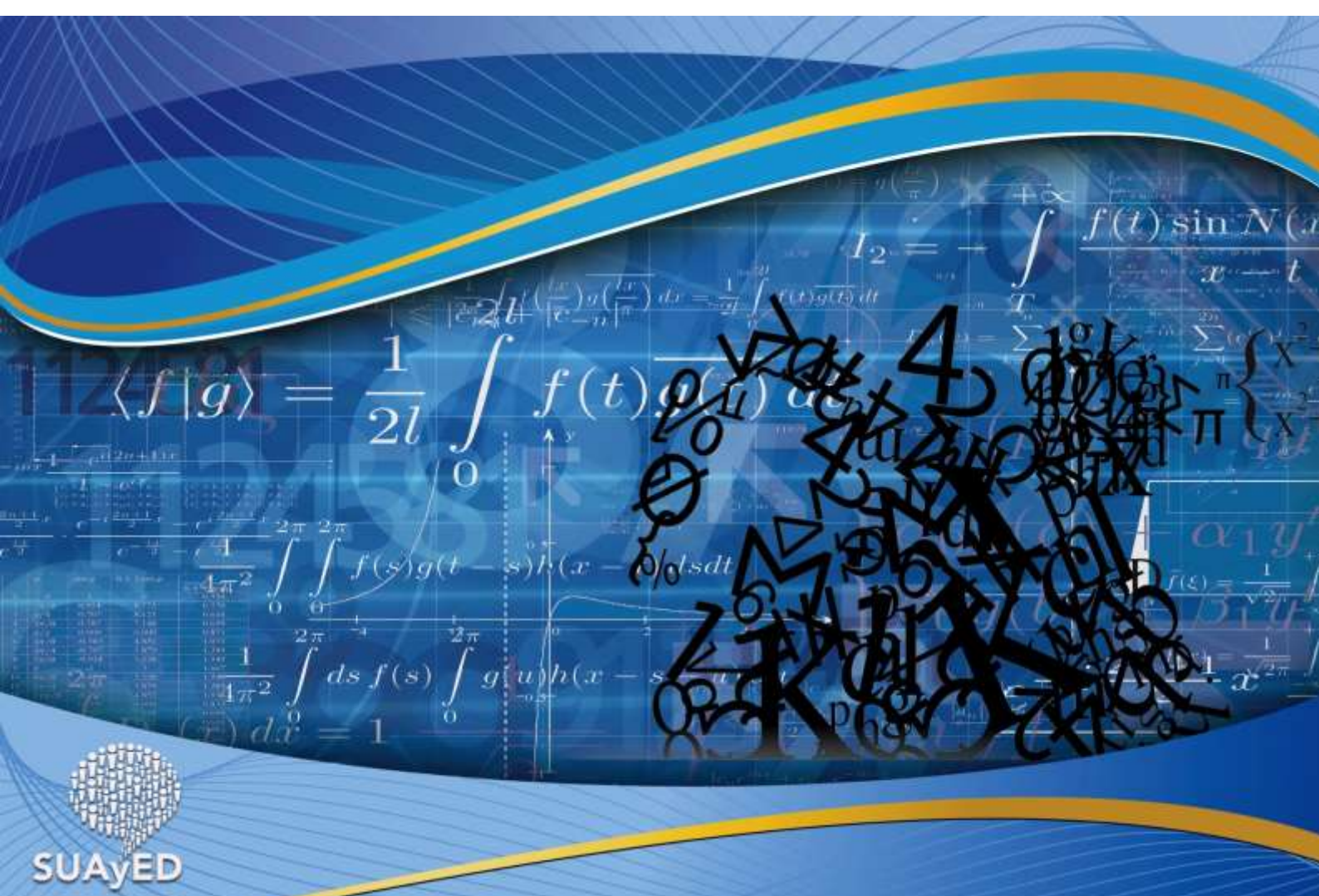
**SUGERIDA**

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard (2006)	1	12-46
Poole, David (2011)	3	131-178
Lay, David (2004)	2	105-134

Kolman Bernard David, Pearson, Algebra Lineal, Prentice Hall, 8ª edición, 2006, 648pp.

POOLE David, *Algebra lineal; una introducción moderna*, México, Cengage Learning, 3ª edición, 2011, 768 pp.

David C. Lay, *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno conocerá las propiedades y aplicaciones de las determinantes

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

6. Determinantes

6.1 Definiciones y propiedades

6.2 Regla de Kramer

6.3 Eigenvalores, eigenvectores

INTRODUCCIÓN



La idea del Determinante proviene de mucho tiempo más atrás que la del concepto de Matriz. El Determinante fue descubierto por Kramer durante sus trabajos orientados a la resolución de problemas que se formulaban a través de los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

La Teoría de los Determinantes fue expuesta por primera vez en el año de 1750, es decir cien años antes de Sylvester y Cayley empezaran a hablar de las Matrices.

Hoy en día, el concepto del Determinante tiende a ser referido como la consecuencia de la Teoría de Matrices y, por consecuencia, es considerado como el Proceso de Axiomatización de las Matrices.

En esta unidad veremos lo que se refiere a la definición del Determinante, así como las propiedades que lo caracterizan e identifican como tal; posteriormente, veremos cómo se define y aplica la Regla de Kramer, y finalmente, cómo se definen y obtienen los Eigenvalores y los Eigenvectores, a fin de poder vincularlos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática.

Hoy en día la tecnología avanza rápidamente, por este motivo se requieren modelos más complejos para la solución de problemas, utilizando las matemáticas y en particular los Determinantes.



6.1 Definiciones y propiedades

Un determinante es un número que se asigna de cierto modo a una formación cuadrada de números. Esta idea fue considerada en 1683 por el matemático Japonés Seki Takakasu y de manera independiente, en 1693 por el matemático Alemán Gottfried Leibniz, unos 160 años antes de que se desarrollara una teoría de matrices por separado.

En la actualidad se han definido dos métodos importantes para obtener el determinante de un arreglo de números o matriz.

- a) Regla de Sarrus
- b) Método de cofactores

a) Regla de Sarrus

Sea A una matriz cuadrada, la determinante de una matriz cuadrada es un valor constante que se calcula con todos los elementos de la matriz.

Determinante de una matriz de 2×2

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ entonces el determinante de A es:

$$|A| = ad - cb$$





El cálculo se realiza haciendo una multiplicación cruzada de los elementos “a” y “d” menos los elementos “c” y “b”.

Ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} |A| = (-2)(3) - 5(1) = -6 - 5 = -11$$

Determinante de una matriz de 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sea la matriz entonces el determinante de A es:

- 1.-Escribir los dos primeros renglones o filas abajo de la matriz.
- 2.- Localizar los elementos de las tres diagonales primarias y las tres diagonales secundarias
- 3.- Multiplicar los elementos de la diagonal primaria (roja) y de cada diagonal secundaria (verde).
- 4.- El determinante resultante es igual a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos los productos de las tres diagonales secundarias o restar la suma de los productos de las diagonales secundarias.



$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}}_{\text{rojo}} + \underbrace{a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}}_{\text{rojo}} + \underbrace{a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}}_{\text{rojo}} - \underbrace{a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}}_{\text{verde}} - \underbrace{a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}}_{\text{verde}} - \underbrace{a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}}_{\text{verde}}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \cdot 1 \cdot 5) + (1 \cdot 0 \cdot 3) + (2 \cdot 2 \cdot -1) - [(1 \cdot 2 \cdot 5) + (1 \cdot 0 \cdot -1) + (2 \cdot 1 \cdot 3)]$$

$$= (5 + 0 - 4) - (10 + 0 + 6) = 1 - 16 = -15$$

$$|A| = -15$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades de los determinantes nos auxilian en la manipulación de una matriz de números para encontrar el valor de su determinante, directamente o diagonalizando la matriz, este método es muy conveniente para determinantes muy grandes de más de 5x5.



En todos los casos sea A una matriz cuadrada

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

I) Si todos los elementos de un renglón o columna de la matriz A son ceros, entonces $|A|=0$.

II) Cuando dos renglones o columnas de la matriz A son idénticos, entonces $|A|=0$.



III) Cuando la matriz A es triangular superior o inferior entonces $|A|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

IV) Si A es una matriz identidad, entonces su determinante es igual a uno.

v) Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos renglones o columnas,

$$\text{entonces } |A| = -|B|$$

VI) Si la matriz B se obtiene de la matriz A al multiplicar por un renglón o columna por un escalar " k " entonces:

$$|B| = k|A|$$

VII) El determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de su determinante, o sea

$$|B| = |A||B|..$$

VIII) Si A es una matriz $n \times n$, entonces $\det A^T = \det A$.

$$\text{IX) } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj } A$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

X) Si A es invertible entonces

Ver la siguiente dirección electrónica

<http://www.vadenumeros.es/segundo/propiedades-de-los-determinantes.htm>

**Ejemplo:****Matriz nula**

$$\text{Det}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El determinante de una matriz nula es cero.

Matriz unidad o identidad

$$\text{Det}(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

El determinante de la matriz unidad es uno.

Matriz diagonal

El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

la diagonal principal

Matriz triangular

El determinante de la matriz triangular es igual al producto de los elementos de

$$\text{Det}(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

la diagonal principal.

Desarrollo de un determinante

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea o columna cualquiera por sus adjuntos respectivos. Simbólicamente, el determinante calculado por columnas: Lay, David. (2004) p.187-190

$$\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Y, si no lo queremos hacer por columnas, dicho determinante calculado por filas:

$$\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Ejemplo: Obtén el determinante de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Utilizando el renglón 1

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

Se recomienda que hagas el cálculo con el método de Sarrus para comprobar el resultado.

MATRIZ ADJUNTA

La matriz adjunta obtenida por determinantes se aplica para obtener la matriz inversa de una matriz A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj} A^t$$

Los menores complementarios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Son

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 & \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 & \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 \\ \alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6 & \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 & \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6 \\ \alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 & \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 & \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \end{array}$$

Matriz adjunta

Para una matriz cuadrada de orden n , $A = (a_{ij})$, se llama adjunto del elemento a_{ij} , y lo representamos por A_{ij} , al producto $(-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$, es decir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de una matriz

$$Adj(A)$$

cuadrada A se llama matriz adjunta de A y se denota por

Ejemplo

Los adjuntos de la matriz A del ejemplo anterior son:

$$A_{11} = -3$$

$$A_{12} = 6$$

$$A_{13} = -3$$

$$A_{21} = 6$$

$$A_{22} = -12$$

$$A_{23} = 6$$

$$A_{31} = -3$$

$$A_{32} = 6$$

$$A_{33} = -3$$

La matriz adjunta de A es

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

6.2 Regla de Kramer

La Regla de Kramer es un proceso que nos permite calcular la solución de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas. $AX=B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

La Regla de Kramer consiste en encontrar las soluciones para cada una de las variables:

- Las Determinantes se calculan con la regla de Sarrus, vista en el punto 5.1

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Primero calculamos la Determinante del sistema.

Regla de Cramer

La regla de Cramer da una solución para sistemas compatibles determinados en términos de determinantes y adjuntos dada por: Lay, David. (2004) p.201; Kolman, (2006) p. 205

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Donde A_j es la matriz resultante de remplazar la j -ésima columna de A por el vector columna b . Para un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

La regla de Cramer da la siguiente

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Nota: Cuando en la determinante original $\det(A)$ el resultado es 0, el sistema indica múltiples o sin coincidencia.

- Las Determinantes se calculan con la regla de Sarrus, vista en el punto 5,1

Ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones por Cramer

Veremos a continuación algunos ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Cramer. Comenzaremos con los de 2 incógnitas para pasar enseguida a los de 3 incógnitas. Lay, David (2004); p. 202



Sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

En el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que vamos a resolver, procedemos primero a marcar en rojo la columna de los términos independientes para no perderla de vista en ningún momento:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Obviamente la matriz de coeficientes es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos x e y usando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 6 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1$$

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - y + 2z = 10 \\ 3x + y - z = 25 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes

Y usando la Regla de Cramer obtenemos los valores de las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 2 \\ 25 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 8 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 4 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 3$$



6.3 Eigenvalores, eigenvectores

Eigenvalores

Los eigenvalores son valores que se restan a la diagonal de una matriz para que su valor sea igual a cero.

Si tenemos una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces, su determinante será:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Para obtener los eigenvalores $k_1, k_2, \dots, k_n$ hacemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

Donde $k_1, k_2, \dots, k_n$ son los eigenvalores.

Ejemplo:

Calcular los eigenvalores de la siguiente matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} = 0$$

Y la determinante nos da

$$=(1-k)(2-k)-1=0$$

$$=1-2k+k^2-1=-2k+k^2=k(k-2)=0$$

De aquí obtenemos dos eigenvalores: cero y dos

Eigenvectores

Un eigenvector es un vector asociado a una matriz, el cual se obtiene con la ayuda de los eigenvalores. Es decir que para su cálculo, primero hay que considerar los eigenvalores de la matriz.. Poole,(2004) David, pp..247-249

Para la obtención de los eigenvectores se tienen que encontrar los valores para el siguiente vector:

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

De tal manera que se dé la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Donde $a_1, a_2 \dots a_n$ son valores constantes cualesquiera.

Ejemplo:

Calcular los eigenvectores de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primero obtenemos los eigenvalores

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} = 0$$

Y la determinante nos da.

$$=(1-k)(2-k)-1=0$$

$$=1-2k+k^2-1=-2k+k^2=k(k-2)=0$$

De aquí obtenemos dos eigenvalores: cero y dos.

Para obtener los eigenvectores.

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para $k=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 + 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Esto implica que $a_1 + a_2 = a_1$ implica que $a_2 = a_1 - a_1 = 0$, o sea, $a_2 = 0$

- Sustituyendo en $a_1 + 2a_2 = a_2$ nos da que $a_1 + 2(0) = 0$ y, por lo tanto, $a_1 = 0$
- Y tenemos un vector $(0,0)$ o solución trivial.



Tenemos que para $k=2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

- Esto implica que $-a_1 + a_2 = a_1$, implica que $a_2 = a_1 + a_1 = 2 a_1$ o sea $a_2 = 2 a_1$
- Sustituyendo en $a_1 = a_2$
- Para que ambas se cumplan $a_2 = 2 a_1$ y $a_1 = a_2$ la solución debe ser la trivial
- Por lo tanto, la única solución que tiene es la trivial: el eigenvector $(0,0)$.

RESUMEN



De acuerdo a la pregunta que se te formuló al principio de ésta unidad; se presupone que tu respuesta con respecto a que sabes de los “Determinantes”; seguramente habrás contestado que si has tenido contacto con ellos; específicamente con los de segundo y tercer orden.

La idea del “Determinante” proviene de mucho tiempo más atrás que la del concepto de “Matriz”. El “Determinante” fue descubierto por Cramer durante sus trabajos orientados a la resolución de problemas que se formulaban a través de los “Sistemas de Ecuaciones Lineales”. La “Teoría de los Determinantes” fue expuesta por primera vez en el año de 1750; es decir cien años antes de que Sylvester y Cayley empezaran a hablar de las “Matrices”.

Hoy en día en concepto del “Determinante” tiende a ser referido como la consecuencia de la “Teoría de Matrices” y por consecuencia es considerado como el “Proceso de Axiomatización de las “Matrices”.

En esta unidad vimos lo que se refiere a la definición del “Determinante”; así como sus propiedades que lo caracterizan e identifican como tal; también abordamos cómo se define y aplica la “Regla de Kramer” y finalmente como se definen y obtienen los “Eigenvectores” a fin de poder vincularlos en el campo profesional de la “Licenciatura en Informática”.



BIBLIOGRAFÍA

**SUGERIDA**

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard (2006)	3	182-189
Poole, David (2011)	4	256-267

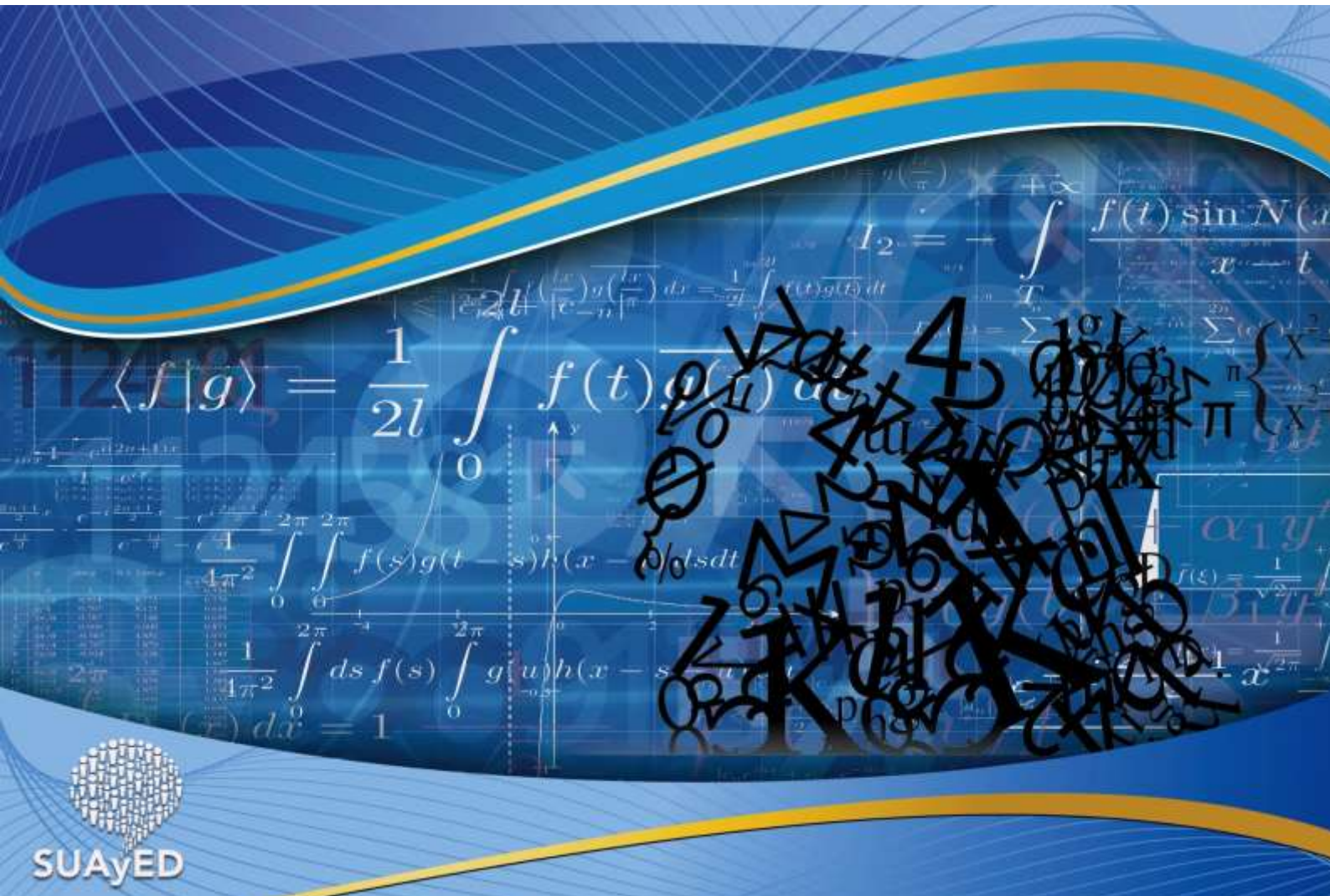
Kolman Bernard David, Pearson, Algebra Lineal, Prentice Hall, 8ª edición 2006, 648pp.

David Poole, Algebra Lineal: Una introducción moderna, Thomson, Primera Edicion, 2011, 763pp.



Unidad 7

Prácticas en laboratorio



OBJETIVO PARTICULAR

El alumno resolverá problemas de algebra lineal utilizando software

TEMARIO DETALLADO

(12 horas)

7. Practicas en laboratorio

7.1 Caso práctico Sistema de Ecuaciones Lineales

7.2 Caso práctico Sistema de Vectores

7.3 Caso práctico Sistema de Transformaciones Lineales

7.4 Caso práctico Sistema de Producto interno

7.5 Caso práctico Sistema de Matrices

7.6 Caso práctico Sistema de Determinantes

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de este tema se muestran todos los conocimientos adquiridos durante el semestre y algunos otros de otras materias que, en su conjunto, hacen que seas capaz de resolver problemas, combinándolos con el uso de la computadora.

De acuerdo a la pregunta que se te formuló al principio de ésta unidad; se presupone que tu respuesta con respecto a que sabes de software; seguramente habrás contestado que si has tenido contacto con ellos; específicamente con el Excel.

La idea del Software Para La Resolución De Problemas Matemáticos Diversos proviene del Siglo XX en donde el hombre se preocupó por entender y comprender el desarrollo tecnológico con que este iba evolucionando de una forma acelerada hasta nuestros días.

La Resolución de Problemas Matemáticos Por Medio Del Uso De Software se ha hecho más presente hoy en día (2009) ante el constante cambio que el hombre ha tenido en su relación con el medio en el cual se desenvuelve dentro de este Planeta llamado Tierra en donde su desarrollo comprende muchas áreas que el mismo ha descrito y definido con el fin de tener un mejor bienestar y seguir sobreviviendo.

En esta unidad veremos lo que se refiere a las Aplicaciones a través de software (Excel) de los diversos Temas vistos a los largo de las Unidades anteriores; a fin de poder dar solución de una manera más rápida a todo tipo de Problemas Diversos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática y su relación con las áreas Contables-Administrativas.

7.1 Caso Práctico: Sistema de Ecuaciones Lineales

Supóngase que el importe de una compra de cuatro refrescos chicos y cinco refrescos grandes es por \$94.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y uno refresco grande y el importe de esta compra es por \$26.00. ¿Cuál es el precio del refresco chico y grande?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1

Escribamos en un renglón y celdas diferentes los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		4	5	94	
3					

Paso 2

7.1 Caso práctico Sistema de Ecuación Lineal

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	26	
5					

**Paso 3**

Transformamos el primer renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la segunda compra.

	A	B	C
5			
6			
7		=B4*B2	
8			

	A	B	C	D
5				
6			=B4*C2	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=B4*D2	
7					

Resultando:

	A	B	C	D	E
5					
6		8	10	188	
7					

Paso 4

Transformamos el segundo renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la primera compra.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

	A	B	C	D	E
7					
8				=B2*D4	
9					



Resultando

	A	B	C	D	E
7					
8		8	4	104	
9					

Paso 5

De los dos renglones resultantes de los pasos 3 y 4, al renglón obtenido en el paso 3 se le resta el renglón obtenido en el paso 4. Aquí da como resultado en la celda correspondiente a los refrescos chicos el valor de cero y en las otras celdas no necesariamente un valor igual a cero.

	A	B	C
9			
10		=B6-B8	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=C6-C8	
11				

	A	B	C	D	E
9					
10				=D6-D8	
11					

Resultando:

	A	B	C	D	E
9					
10		-	6	84	
11					

Paso 6

Del resultado obtenido en la diferencia del importe de las compras (obtenido en el paso 5), este se divide entre valor obtenido correspondiente a los refrescos grandes, este cociente representa el precio del refresco grande.

	A	B	C
11			
12		=D10/C10	
13			

Resultando:

	A	B	C
11			
12		14	
13			

Paso 7

Para obtener el precio del refresco chico se multiplicara la celda que contiene el precio del refresco grande (celda paso 6) por el número de refrescos comprados en la primera compra (celda del paso 1), el producto anterior se le resta al importe de la primera compra (celda paso 1) y la resultante de esta diferencia se divide entre el número de refrescos chicos comprados en la primera compra (celda paso 1).

	A	B	C
13			
14		=B12*C2	
15			

Resultando:

	A	B	C
13			
14		70	
15			

A la compra total se le resta el valor anterior

	A	B	C
15			
16		=D2-B14	
17			

Lo dividimos entre el número de refrescos chicos comprados la primera vez

Resultando:

	A	B	C
17			
18		6	
19			

Finalmente los valores obtenidos en los pasos seis y siete son el resultado buscado en el ejemplo mostrado

7.2 Caso práctico de Vectores

Supóngase que el importe del ingreso de tres diferentes productos es de \$4, 000, \$5, 000 y \$3, 000 respectivamente y el importe del costo variable es de \$1,000, \$2,000 y \$ 1,000 ¿calcular la utilidad por artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que los importes de los ingresos, costos y utilidad representan un vector cada uno de ellos.

Paso 1

Pon en un renglón y celdas diferentes los valores del importe de cada uno de los ingresos de cada de los productos.

	A	B	C	D	E
1					
2		4,000	5,000	3,000	
3					



Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores del importe de cada uno de los costo de cada uno de los productos.

	A	B	C	D	E
3					
4		1,000	2,000	1,000	
5					

Paso 3

Realiza la resta de los ingresos y costos obteniendo de esta manera la utilidad de cada uno de los productos (se resta la celda del renglón del paso uno menos la del renglón del paso 2 y así sucesivamente).

	A	B	C
5			
6		=B2-B4	
7			

	A	B	C	D
5				
6			=C2-C4	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=D2-D4	
7					

Resultado

	A	B	C	D	E
5					
6		3,000	3,000	2,000	
7					

El vector anterior es la respuesta solicitada que nos muestra las utilidades de cada producto.

7.3 Caso práctico de Transformación Lineal

Supóngase que una empresa tiene su centro de distribución de uno de sus artículos en el estado de México y para distribuirlo a toda la república tiene cuatro bodegas distribuidas para la mejor eficiencia, la empresa divide en cuatro zonas diferentes zona sureste, suroeste, noreste y noroeste, si el porcentaje de acuerdo a la demanda de cada zona es la siguiente 11%, 26%, 35% y 28% respectivamente. ¿Cuál es la cantidad que se deberá enviar a cada zona si la planta produce 100,000 unidades mensuales de dicho artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que los porcentajes de cada una de las zonas forman una matriz.

Paso 1

Primero escribe en un renglón y una celda la cantidad de unidades que produce la empresa en un mes, en este caso 100,000 unidades.

	A	B	C
1			
2		100,000	
3			

Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona sureste y sur-oeste respectivamente.

	A	B	C	D
3				
4		0.11	0.26	
5				



Paso 3

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona noreste y noroeste respectivamente.

	A	B	C	D
5				
6		0.35	0.28	
7				

Paso 4

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona sureste y sur-oeste respectivamente son multiplicados por la celda del paso número uno.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

En conjunto tenemos

	A	B	C	D
7				
8		11,000	26,000	
9				

Paso 5

Colocamos en otro renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona noreste y noroeste, respectivamente, multiplicados por la celda del paso número uno.

	A	B	C
9			
10		=B2*B6	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=B2*C6	
11				

En conjunto tenemos

	A	B	C	D
9				
10		35,000	28,000	
11				

Los renglones resultantes de los pasos cuatro y cinco forman la matriz resultante de la transformación lineal

	A	B	C	D
8		11,000	26,000	
9				
10		35,000	28,000	
11				

La matriz anterior es la respuesta solicitada que nos muestra las cantidades demandadas por zona.

7.4 Caso práctico de Producto Interno

Supóngase que una empresa requiere para la fabricación de uno de sus artículos tres diferentes metales (cobre, plata, oro), si las cantidades requeridas son las siguientes: 2.4 kg, 1.8 kg y 0.20 kg respectivamente y el precio por kg de cada uno de los metales es de \$18.00, \$160.00, \$9.80. ¿Calcular la utilidad por artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que las cantidades requeridas de fabricación y de precios de materiales representan un vector cada uno de ellos.

**Paso 1**

Primero escribe en un renglón y celdas diferentes las cantidades en kg de los diferentes metales se requieren para la fabricación de dicho artículo.

	A	B	C	D	E
1					
2		2.4	1.8	0.2	
3					

Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores del precio por kg de cada uno de los metales.

	A	B	C	D	E
3					
4		18	160	9,800	
5					

Paso 3

Realiza la multiplicación de cada cantidad de metal por su precio y se coloca en un nuevo renglón (se multiplica cada celda del renglón del paso uno por la celda del renglón del paso 2 y así sucesivamente).

	A	B	C
5			
6		=B2*B4	
7			

	A	B	C	D
5				
6			=C2*C4	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				1960	
7					



Lo anterior nos da el siguiente vector:

	A	B	C	D	E
5					
6		43.2	288	1960	
7					

Paso 4

Cada una de las celdas del renglón del paso tres se le suma, dando como resultado el costo total del mencionado artículo.

	A	B	C
7			
8		=B6+C6+D6	
9			

Por lo tanto el resultado es:

	A	B	C
7			
8		2,291.20	
9			

El valor del paso cuatro es la respuesta solicitada que nos muestra el costo total del artículo en cuestión.



7.5 Caso práctico de Matrices

Supóngase que una empresa desea saber el requerimiento mínimo de dos procesos deferentes que son indispensables para la fabricación de dos artículos diferentes. Considerando que el artículo número uno requiere de un minuto en cada proceso y el artículo dos de uno y dos minutos respectivamente, si se requieren fabricar 1,000 unidades del artículo uno y 2,100 del dos. ¿Cuáles son los requerimientos en minutos para cada proceso?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel.

Paso 1

Anota en un renglón y celdas diferentes los valores del número de minutos requeridos por cada artículo en el proceso uno.

	A	B	C	D
1				
2		1	1	
3				

Paso 2

Escribe en un renglón y celdas diferentes los valores del número de minutos requeridos por cada artículo en el proceso dos.

	A	B	C	D
3				
4		1	2	
5				

Paso 3

Después, en un renglón y celdas diferentes los valores del número de unidades a fabricar por cada artículo.



	A	B	C	D
5				
6		1,000	2,100	
7				

Paso 4

Multiplicamos los valores del renglón del paso tres por el renglón del paso uno (celda por celda respectivamente se multiplican y después ambos resultados se suman siendo esta suma el resultado del número de minutos requeridos en el proceso uno).

	A	B	C
7			
8			
9		=B2*B6	
10			

	A	B	C
7			
8			
9		1,000	
10			

	A	B	C	D
7				
8				
9			=C2*C6	
10				

	B	C	D
7			
8			
9	2,100		
10			

Resultando:

	A	B	C	D
7				
8				
9		1,000	2,100	
10				



La suma es:

	A	B	C
10			
11			
12		=B9+C9	
13			

Su cálculo es:

	A	B	C
10			
11			
12		3,100	
13			

Paso 5

Multiplicamos los valores del renglón del paso tres por el renglón del paso dos (celda por celda respectivamente se multiplican y después ambos resultados se suman siendo esta suma el resultado del número de minutos requeridos en el proceso dos).

	D	E	F
5			
6		=B4*B6	
7			

	E	F
4		
5		
6	1,000	
7		

	F	G	H
4			
5			
6		=C4*C6	
7			

	F	G	H
4			
5			
6		4,200	
7			

Sumando los resultados anteriores; se tiene:

	D	E	F
10			
11			
12		=E6+F6	
13			

La suma nos da:

	D	E	F
10			
11			
12		5,200	
13			

Los valores obtenidos en los pasos cuatro y cinco son el resultado buscado en la presente práctica.

7.6 Caso práctico de Determinantes

Supóngase que el importe de una compra de cinco refrescos chicos y cuatro refrescos grandes es por \$90.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y uno refresco grande y el importe de esta compra es por \$25.00. ¿Cuales el precio del refresco chico y grande?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel.

Paso 1

Primero colocamos en un renglón y celdas los diferentes valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		5	4	90	
3					

Paso 2

A continuación escribe en un segundo renglón los valores de la segunda compra de la misma manera que el primer renglón, es decir los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de la segunda compra.

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	25	
5					

Paso 3

Calculamos la determinante del sistema como sigue, multiplicamos la primera celda del renglón del paso uno por la segunda celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la segunda celda del paso uno por la primera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del sistema.

	A	B	C
5			
6		$=B2*C4-C2*B4$	
7			

	A	B	C
5			
6		-3	
7			

Paso 4

Calculamos la determinante del refresco chico como sigue, multiplicamos la tercera celda del renglón del paso uno por la segunda celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la segunda celda del paso uno por la tercera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del refresco chico.

	A	B	C
7			
8		$=D2*C4-C2*D4$	
9			



	A	B	C
7			
8		-10	
9			

Paso 5

Calculamos la determinante del refresco grande como sigue, multiplicamos la primera celda del renglón del paso uno por la tercera celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la tercera celda del paso uno por la primera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del refresco grande.

	A	B	C
9			
10		=B2*D4-D2*B4	
11			

	A	B	C
9			
10		-55	
11			
12			

Paso 6

Se divide la determinante del paso cuatro entre la determinante del paso tres dando como resultado el precio del refresco chico.

	A	B	C	D	E
11					
12					
13		Refresco chico=		=B8/B6	
14					

	A	B	C	D	E
11					
12					
13		Refresco chico=		3.33333333	
14					

**Paso 7**

Se divide la determinante del paso cinco entre la determinante del paso tres dando como resultado el precio del refresco grande.

	A	B	C	D	E
14					
15					
16		Refresco grande=		=B10/B6	
17					

	A	B	C	D	E
14					
15					
16		Refresco grande=		18.3333333	
17					

Los valores obtenidos en los pasos seis y siete son el resultado buscado en la presente práctica

RESUMEN

En esta unidad vimos lo que se refiere a las Aplicaciones a través de software (Excel) de los diversos Temas vistos a lo largo de las Unidades anteriores; a fin de poder dar solución de una manera más rápida a todo tipo de Problemas Diversos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática y su relación con las áreas Contables-Administrativas.

Excel también te ofrece las funciones de MMULT, para multiplicación de matrices;

MINVERSE para obtener la inversa de una matriz.





BIBLIOGRAFÍA



SUGERIDA

Autor	Capítulo	Páginas
Rendón, Araceli; Rodríguez, Jesús	7	153-167

RENDÓN, Araceli; Rodríguez, Jesús; “Introducción al Álgebra lineal y de Matrices. Aplicaciones con Excel”; Universidad Autónoma Metropolitana Xochimilco, México (1998).

Bibliografía básica

1. DE OTEYZA Elena, *Conocimientos fundamentales de matemáticas, Álgebra*, México, Pearson Educación, 2006, 408 pp.
2. GROSSNAN, Stanley Y., *Álgebra lineal*, México, McGraw Hill, 6ª edición, 2008, 762 pp.
3. KOLMAN, Bernard, *Álgebra lineal*, México: Pearson, 8ª edición, 2006, 648 pp.
4. LARSON Ron, *Fundamentos de álgebra lineal*, México, Cengage Learning, 6ª edición, 2010, 565 pp.
5. PUERTA S. Fernando, *Álgebra lineal*, Barcelona, Universidad Politécnica de Barcelona, 2005, 446 pp.
6. ROJO G. Jesús, *Álgebra lineal*, Madrid: McGraw-Hill Interamericana, 2ª edición, 2007, 596 pp.
7. LAY David C., *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.
8. RENDÓN, Araceli; Rodríguez, Jesús; "Introducción al Álgebra lineal y de Matrices. Aplicaciones con Excel"; Universidad Autónoma Metropolitana Xochimilco, México (1998).

Bibliografía complementaria

1. BERNAL C. Gloria, *Álgebra lineal*, Medellín: Escuela Colombiana de Ingeniería, 2006, 412 pp.
2. LÓPEZ G. José Luis, *Álgebra lineal*, Universidad Pública de Navarra, 2007, 175 pp.
3. POOLE David, *Álgebra lineal; una introducción moderna*, México, Cengage Learning, 3ª edición, 2011, 768 pp.



Facultad de Contaduría y Administración
Sistema Universidad Abierta y Educación a Distancia