ANEXO B

SISTEMAS NUMÉRICOS

Sistema Decimal

El sistema decimal emplea diez diferentes dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9). Por esto se dice que la “base” del sistema decimal es diez. Para representar números mayores a 9, se combinan dos o más dígitos base, y cada uno de éstos tendrá un valor según la posición que ocupe. El sistema decimal se representa en forma posicional por medio de la ecuación (2.1), con n = 10 y donde d puede representar cualquier dígito entre 0 y 9.

Ejemplo

Representar el número $(425)_{10}$ en forma posicional.

Solución

Utilizando la ecuación (2.1) con 3 dígitos enteros (p = 3) y 0 dígitos fraccionarios (q = 0).

$$
\begin{aligned}
425 &= \sum_{i=0}^{3-1} d_i 10^i + \sum_{j=1}^{0} d_j 10^{-(i)} \\
&= [d_0 10^0 + d_1 10^1 + d_2 10^2] \\
&= [5x10^0 + 2x10^1 + 4x10^2] \\
&= [5x1 + 2x10 + 4x100] = [5 + 20 + 400] = 425
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Representar el número $(3637.25)_{10}$ en forma posicional

Solución

Utilizando la ecuación (2.1) con 4 dígitos enteros (p = 4) y 2 dígitos fraccionarios (q = 2).

$$
\begin{aligned}
3637.25 &= \sum_{i=0}^{4-1} d_i 10^i + \sum_{j=1}^{2} d_j 10^{-(i)} \\
&= [d_0 10^0 + d_1 10^1 + d_2 10^2 + d_3 10^3] + [d_{-1} 10^{-1} + d_{-2} 10^{-2}] \\
&= [7x10^0 + 3x10^1 + 6x10^2 + 3x10^3] + [2x10^{-1} + 5x10^{-2}] \\
&= [7x1 + 3x10 + 6x100 + 3x1000] + [2/10 + 5/100] \\
&= [7 + 30 + 600 + 3000] + [0.2 + 0.05] = 3637.25
\end{aligned}
$$

Conversión de decimal a binario

El método utilizado para convertir un número decimal a binario es el método de divisiones sucesivas. Este método consiste en los pasos siguientes:

1. Dividir el número decimal entre 2
2. El residuo (uno o cero) es el dígito menos significativo, el cual se almacena en un arreglo unidimensional.
3. Dividir entre 2 el cociente de la división anterior, pero ahora el residuo se coloca en la siguiente posición de más significación.
4. Repetir el paso anterior y el residuo se coloca en la siguiente posición de más significativo (valor posicional).
5. Repetir el paso anterior hasta obtener un cociente de cero.
6. Los números en el arreglo unidimensional se muestran de abajo hacia arriba.

Ejemplo

Convertir a binario el número (173)10 a base 2

Solución

Finalmente el número $(173)_{10}$ = $(10101101)_{2}$.

Ejemplo Convertir a binario el número $(3129)_{10}$ a base 2

Solución

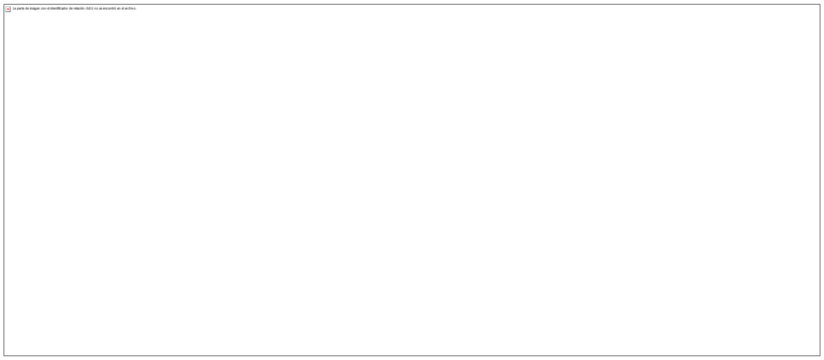
Por lo tanto (3129)10 = (110000111001)2

Conversión de decimal a octal

Para realizar la conversión de base 10 a base 8 se tienen dos métodos.

Primer método

Este método consiste en convertir el número decimal a número binario y luego de binario a base octal. La conversión de base 10 a base 2 se realiza por el método de divisiones sucesivas y luego el resultado lo convertimos a base 8, es decir:



Ejemplo Convertir el número $(153)_{10}$ a base $()_8$

Solución

Para este ejemplo, convertimos el número $(153)_{10}$ a base 2 utilizando el método de divisiones sucesivas y posteriormente realizamos la conversión de base 2 a base 8 utilizando la tabla 2.1.

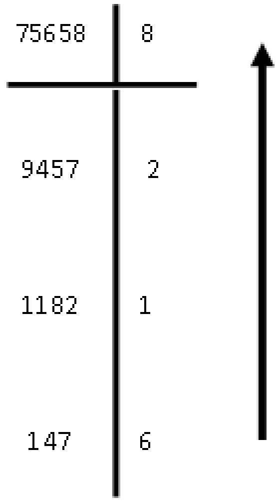
$(153)_{10}$ ---------- $(010 \quad 011 \quad 001)_2$ --------------$(2\ 3\ 1)_8$

Segundo método: Método de las divisiones sucesivas

Este método consiste en dividir el número decimal entre 8 hasta que el cociente sea igual a cero.

Ejemplo Convertir el número $(75658)_{10}$ a base $()_8$

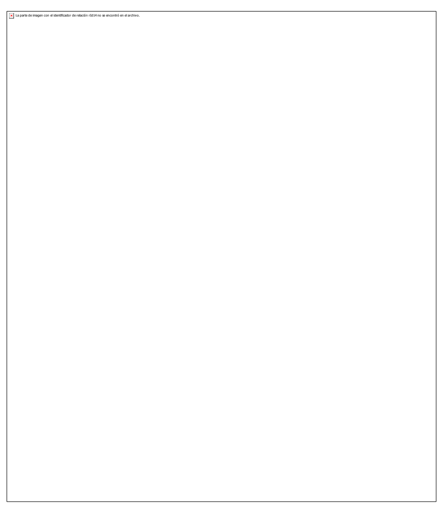
Solución



por lo tanto $(75658)_{10} = (223612)_{8}$

Ejemplo   Convertir el número (6348)10 a base ()8

Solución

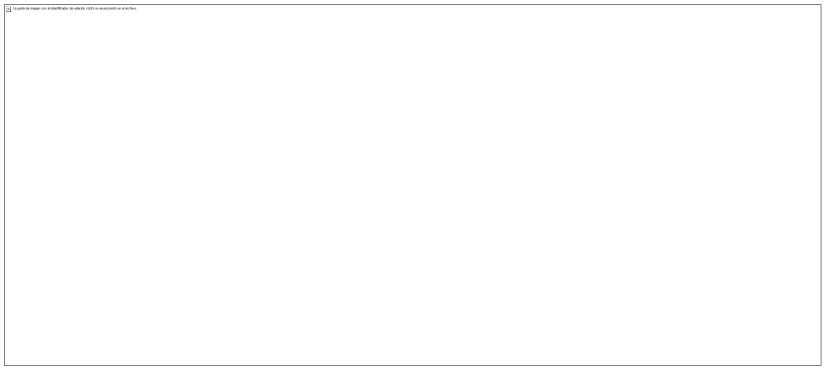


Finalmente obtenemos la conversión deseada $(6348)_{10} = (14314)_{8}$.

Conversión de base decimal a base hexadecimal

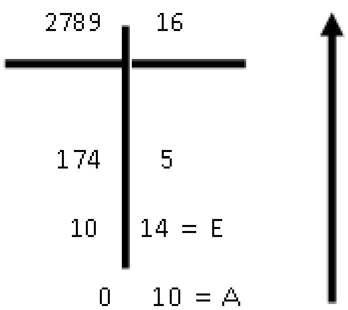
Para realizar la conversión de base 10 a base 16 se tienen los mismos métodos que el inciso anterior.

El primer método consiste en convertir el número en base 10 a base 2 y luego de base 2 a base 16, es decir:



Ejemplo   Convertir el número $(2789)_{10}$ a base $()_{16}$

Solución



Por lo tanto $(2789)_{10} = (AE5)_{16}$.

El *segundo método* es el método de las divisiones que se utilizó en la conversión decimal a binario, pero dividiendo entre 16.

Ejemplo   Convertir el número $(10379)_{10}$ a base $(\ )_{16}$

Solución

Por lo tanto (10379)10 = (288B) 16

Ejemplo Convertir el número (39664)10 a base ( )16

Solución

Por lo tanto (39664)10 = (9AF0)16

Sistema binario

El sistema binario emplea sólo dos dígitos base (0 y 1) para representar un número, su base es 2. Para representar números mayores a 1, se combinan dos o más dígitos base, y cada uno de éstos tendrá un valor según la posición que ocupe. El sistema binario se representa en forma posicional por medio de la ecuación (2.1), con n = 2 y d puede representar solo los números 0 y 1.

Ejemplo

Representar el número $(1010)_2$ en forma posicional

Solución

El $(1010)_2$ tiene 4 dígitos enteros (p = 4) y 0 dígitos fraccionarios (q = 0) y a partir de la ecuación (2.1) la forma posicional de dicho número es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
(1010)_2 &= \sum_{i=0}^{4-1} d_i 2^i + \sum_{j=1}^{0} d_{-j} 2^{-(i)} \\
&= d_0 2^0 + d_1 2^1 + d_2 2^2 + d_3 2^3 + d_4 2^4 \\
&= 0x2^0 + 1x2^1 + 0x2^2 + 1x2^3 \\
&= 0x1 + 1x2 + 0x4 + 1x8 = 0 + 2 + 0 + 8 = 10
\end{aligned}
$$

el cual es equivalente en el sistema decimal a $(10)_{10}$.

Ejemplo

Representar el número $(10111.101)_2$ en forma posicional.

Solución

Utilizando la ecuación (2.1) la forma posicional de dicho número con 5 dígitos enteros (p = 5) y 3 dígitos decimales (q=3) es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
(10111.101)_2 &= \sum_{i=0}^{5-1} d_i 2^i + \sum_{j=1}^{3} d_{-j} 2^{-(i)} \\
&= d_0 2^0 + d_1 2^1 + d_2 2^2 + d_3 2^3 + d_4 2^4 + d_{-1} 2^{-1} + d_{-2} 2^{-2} + d_{-3} 2^{-3} \\
&= 1x2^0 + 1x2^1 + 1x2^2 + 0x2^3 + 1x2^4 + 1x2^{-1} + 0x2^{-2} + 1x2^{-3} \\
&= 1x1 + 1x2 + 1x4 + 0x8 + 1x16 + 1/2 + 0/4 + 1/8 \\
&= 1 + 2 + 4 + 0 + 16 + 0.5 + 0 + 0.125
\end{aligned}
$$

El cual es equivalente en el sistema decimal a el número $(23.625)_{10}$.

Conversión de binario a decimal

Para convertir un número binario (base 2) a decimal (base 10) se utiliza la ecuación general (2.1).

Ejemplo Convertir el número $(11011)_2$ a decimal

Solución

$$11011 = 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 1x2^1 + 1x2^0$$

= 16 + 8+ 0 +2+ 1 = 27

Por lo tanto el número $(11011)_2 = (27)_{10}$.

Solución

Se forman los bloques de 4 bits cada uno a partir del punto decimal

11 1010 1011

En el tercer bloque faltan 2 bits, se completan con ceros

0011 1010 1011

Se sustituye cada uno de los bloques por su equivalente en base 16 utilizando la tabla 2.1

$$\underbrace{0011}_{3}\quad\underbrace{1010}_{A}\quad\underbrace{1011}_{B}$$

Por lo tanto el número $(1110101011)_2 = (3AB)_{16}$.

Sistema octal

El sistema octal emplea 8 dígitos base (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7) para representar un número, su base es 8 lo cual es potencia de 2 por lo que la conversión a la base binaria es directa. Para representar números mayores a 7, se combinan dos o más dígitos base, y cada uno de éstos tendrá un valor según la posición que ocupe. El sistema octal también se puede representar en forma posicional por medio de la ecuación (2.1), con n = 8 y d puede representar los dígitos del 0 al 7.

Ejemplo

Representar el número $(7410)_8$ en forma posicional

Solución

Utilizando la ecuación (2.1) la forma posicional de dicho número es la siguiente:

$$(7410)_8 = \sum_{i=0}^{4-1} d_i 8^i + \sum_{j=1}^{0} d_{-j} 8^{-(i)}$$
$$= d_0 8^0 + d_1 8^1 + d_2 8^2 + d_3 8^3$$
$$= 0x8^0 + 1x8^1 + 4x8^2 + 7x8^3$$
$$= 0x1 + 1x8 + 4x64 + 7x512 = 0 + 8 + 256 + 3584 = 3848$$

que equivale al número decimal (3848)10 y

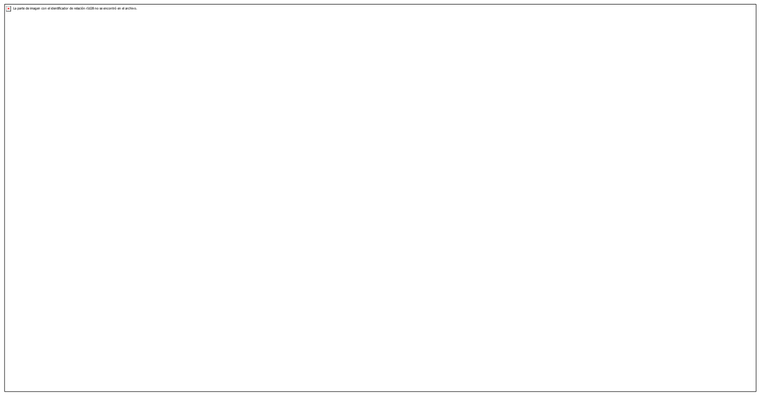
al número binario = (111 100 001 000)2 = (7 4 1 0)8

Ejemplo

Represente el número octal 4725.451 en forma posicional

Solución

Utilizando la ecuación (2.1) con p = 4 dígitos enteros y q = 3 dígitos fraccionarios, la forma posicional de dicho número es la siguiente:



que equivale al número decimal (2518.283293125)10.

Conversión de octal a decimal

Para convertir un número octal a base 10 se puede realizar utilizando la ecuación 2.1

Ejemplo Convertir el número $(254)_8$ a base 10

Solución

$$(254)_8 = 2x8^2 + 5x8^1 + 4x8^0 = 128 + 40 + 4$$

por lo tanto $(254)_8 = (172)_{10}$

Conversión de octal a binario

Debido a que la base 8 y la base 2 están relacionadas ($8 = 2^3$), la conversión al sistema binario es directa. El procedimiento es reemplazar cada dígito octal por sus tres dígitos binarios equivalentes utilizando la tabla 2.1.

Ejemplo

Convertir el número $(567)_8$ a binario (base 2)

Solución

A partir de la tabla 2.1 vemos que el número $(567)_8$ está compuesto por

$(5)_8 = (101)_2$ $(6)_8 = (110)_2$ $(7)_8 = (111)_2$

que al realizar la conversión tenemos lo siguiente:

$$(567)_8 = (101\ 110\ 111)_2$$

Conversión de octal a hexadecimal

La conversión de octal a hexadecimal consiste en

- Pasar cada uno de los dígitos que forman el número a base 2.
- Formar bloques de 4 bits cada uno, tanto a la derecha como a la izquierda del punto decimal.
- Sustituir cada uno de los bloques por su equivalente en base 16 utilizando la tabla 2.1.

Ejemplo

Convertir el número $(557)_8$ a hexadecimal (base 16)

Solución

A partir de la tabla 2.1 vemos que el número $(557)_8$ está compuesto por

$(5)_8 = (101)_2$ $(5)_8 = (101)_2$ $(7)_8 = (111)_2$

A continuación se divide el número en bloques de 4 bits cada uno

1 0110 1111

Sustituyendo cada uno de los bloques por su equivalente en base 16 utilizando la tabla 2.1.

$$\underbrace{0001}_{1}\quad\underbrace{0110}_{6}\quad\underbrace{1111}_{F}$$

$(557)_8 = (16F)_{16}$

Conversión de hexadecimal a decimal

Para convertir un número de base hexadecimal a base 10 podemos utilizar la ecuación 2.1

Ejemplo

Convertir a el número (A2E4)16 a base 10

Solución

finalmente tenemos que el número (A2E4)16 = (41700)10

Conversión de hexadecimal a binario

La conversión de hexadecimal a binario es directa, debido a que ambas bases están relacionadas ($16 = 2^4$). El procedimiento es reemplazar cada dígito hexadecimal por sus cuatro dígitos binarios equivalentes con el apoyo de la tabla 2.1

Ejemplo

Convertir el número $(48A)_{16}$ a base $()_2$

Solución

A partir de la tabla 2.1 tenemos lo siguiente

$(4)_{16} = (0100)_2$ $(8)_{16} = (1000)_2$ $(A)_{16} = (1010)_2$

finalmente obtenemos la conversión deseada

$$(48A)_{16} = (010010001010)_2$$

Conversión de hexadecimal a octal

La conversión de hexadecimal a octal consiste de los pasos siguientes:

- Cada dígito en hexadecimal se sustituye por sus equivalentes 4 bits binarios, utilizando la tabla siguiente.
- Se divide el número en bloques de 3 dígitos hacia la derecha como a la izquierda a partir del punto decimal.
- Se sustituye cada uno de los bloques por su equivalente en base 8 utilizando la siguiente tabla de equivalencias.

Decimal	Binario	Octal	Hexadecimal
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A

11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Tabla de Equivalencias entre diferentes sistemas de numeración

Ejemplo

Convertir el número $(48A)_{16}$ a base $()_{8}$

Solución

A partir de la tabla 2.1 tenemos lo siguiente

$(4)_{16} = (0100)_{2}$ $(8)_{16} = (1000)_{2}$ $(A)_{16} = (1010)_{2}$

Se divide el número en bloques de 3 dígitos a partir del punto decimal

010 010 001 010

Se sustituye cada uno de los bloques formados por su equivalente en base 8 utilizando la tabla 2.1

$$\underbrace{010}_{2}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{010}_{2}$$

Finalmente, el resultado de la conversión es

$(48A)_{16} = (2212)_{8}$

Algoritmo para la conversión de números decimales a otra base (2,8 y 16)

La conversión de números decimales a otra base (por ejemplo, base 2, 8 ó 16) se puede realizar por el método de multiplicaciones sucesivas por la base. Esto método consiste en los pasos siguientes:

1. Multiplicar el número decimal por la base a la que de desea convertir.
2. Dividir el resultado en su parte fraccionaria (f_i) y en su parte entera (d_{-i}).
3. Multiplicar la parte f_i por la base a convertir.
   La parte fraccionaria del resultado es f_2 y la parte entera es d_{-2}.
4. Repetir el proceso hasta que f_m es cero o hasta que se considere que la conversión es lo suficientemente exacta.

Esto se podrá entender con una serie de ejemplos que a continuación se presentan.

Ejemplo

Convertir el número $(0.4375)_{10}$ a binario

Solución

0.4375 x 2 = 0.8750	= 0.0875 + 0	d-1 = 0
0.8750 x 2 = 1.7500	= 0.7500 + 1	d-2 = 1
0.7500 x 2 = 1.5000	= 0.5000 + 1	d-3 = 1
0.5000 x 2 = 1.0000	= 0.0000 + 1	d-4 = 1

finalmente el número (0.4375)10 = (0.0111)2

Ejemplo Convertir el número (0.6328125)10 a base 8

Solución

0.6328125 x 8 = 5.0625 = 0.0625 + 5 d-1 = 5

$0.0625 \times 8 = 0.5000 = 0.5000 + 0$ $d_{-2} = 0$

$0.5000 \times 8 = 4.0000 = 0.0000 + 4$ $d_{-3} = 4$

finalmente el número (06328125)10 = (504)8

Ejemplo Convertir el número (0.6328125)10 a base 16

Solución

$0.6328125 \times 16 = 10.1250 = 0.1250 + 10$ $d_{-1} = 10 = A$ (en base 16)

$0.1250 \times 16 = 2.0000 = 0.0000 + 2$ $d_{-2} = 2$

finalmente $(06328125)_{10} = (A2)_{16}$

Algoritmo para la conversión de fracciones de cualquier base (2,8 y 16) a base decimal

La conversión de fracciones de una base b a decimal se puede realizar por el método de división. Este método se puede describir como sigue:

1. Dividir el dígito menos significativo por la base b. El cociente es M_1.
2. Sumar el cociente M_1 con el dígito que sigue en significación y dividir por la base. El cociente es M_2.
3. Continuar el proceso hasta que se suma el dígito fraccional más significativo y se divide por la base. El último cociente es M_n.

Esto se podrá entender con una serie de ejemplos que a continuación se presentan.

Ejemplo

Convertir a decimal el número $(0.10101)_2$

Solución

El dígito menos significativo es 1

$M1 = 1/2 = 0.5$

$M2 = (0.5 + 0)/2 = 0.25$

$M3 = (0.25 + 1)/2 = 0.625$

$M4 = (0.625 + 0)/2 = 0.3125$

$M5 = (0.3125 + 1)/2 = 0.65625$

finalmente $(0.10101)_2 = (0.65625)_{10}$

Ejemplo Convertir a decimal el número $(0.F6B)_{16}$

Solución

El dígito menos significativo es 1

$M1 = 11/16 = 0.6875$

$M2 = (0.6875 + 2)/16 = 0.16796875$

$M3 = (0.16796875 + 6)/16 = 0.3855$

$M4 = (0.3855 + 15)/16 = 0.96159$

Finalmente $(0.F62b)_{16} = (0.96159)_{10}$.

Sistema de base "n"

El sistema de base *n* más ampliamente usado para el diseño y construcción de pequeños sistemas digitales hasta una computadora digital (con 2^n procesadores) es el sistema binario es por su facilidad de trabajar únicamente entre dos estados

("0" y "1"), pero para la programación de dichos sistemas digitales o computadoras digitales se utilizan los sistemas binario, octal, decimal y hexadecimal. Pero existen otros sistemas de base n, donde n puede ser un número entero positivo mayor que 1, y que cumplen con las mismas características de los sistemas de base 2, 8, 10 y 16 como son: presentarse como un sistema de numeración posicional y cumplir con las reglas de la aritmética decimal.

El principal inconveniente de estos sistemas de base n (por ejemplo n = 5 ó 7) es que no tienen una aplicación práctica para el diseño de circuitos digitales ni mucho menos para computadora digital.

Como se mencionó anteriormente existen otros sistemas de base n = 3, 5, 6, etc., que se pueden representar en un sistema posicional, además de que permiten realizar las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división. En esta sección vamos a presentar el caso del sistema de base n = 5, pero se puede extender a cualquier otra base.

El sistema de base 5 emplea cinco diferentes dígitos (0, 1, 2, 3 y 4). Para representar números mayores a 5, se combinan dos o más dígitos base y cada uno de éstos tendrá un valor según la posición que ocupe. El sistema de base 5 se representa en forma posicional por medio de la ecuación (2.1), con n = 5 y donde d puede representar cualquier dígito entre 0 y 4.

Ejemplo

Representar el número $(14432)_5$ en forma posicional.

Solución

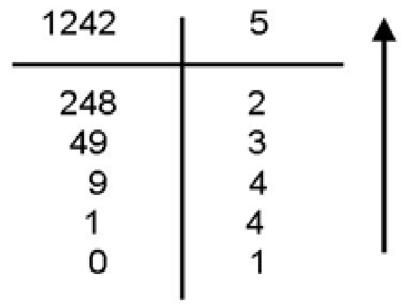
Utilizando la ecuación (2.1) con 5 dígitos enteros (p = 5) y 0 dígitos fraccionarios (q = 0).

$$
\begin{aligned}
(14432)_5 &= \sum_{i=0}^{5-1} d_i 5^i + \sum_{j=1}^{0} d_j 5^{-(i)} \\
&= [d_0 5^0 + d_1 5^1 + d_2 5^2 + d_3 5^3 + d_4 5^4] \\
&= [2x5^0 + 3x5^1 + 4x5^2 + 4x5^3 + 1x5^4] \\
&= [2 + 15 + 100 + 500 + 625] = (1242)_{10}
\end{aligned}
$$

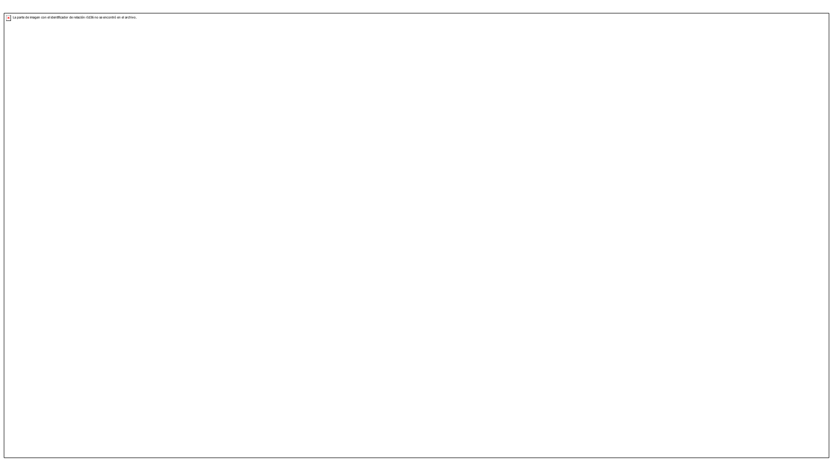
La conversión de base 10 a base 5 también se puede realizar utilizando el algoritmo de divisiones sucesivas como se muestra a continuación con un ejemplo.

Ejemplo Convertir a binario el número $(1242)_{10}$ a base 5

Solución



Además, con este sistema de base 5, también se pueden realizar las operaciones aritméticas básicas como se muestra a continuación:



Multiplicación en base 5

Comprobación

$$
\begin{array}{r}
1\ \ 1 \\
\hline
(4\ \ 3)_5 \\
\times \quad (2)_5 \\
\hline
(1\ \ 4\ \ 1)_5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
(2\,3)_{10} \\
\times\ (\ 2\ )_{10} \\
\hline
(\,4\ 6\,)_{10}
\end{array}
$$

División en base 5

En la división en base 5 los únicos cinco dígitos posibles tanto en el cociente como en el residuo son 0, 1, 2, 3 y 4. La división en base 5 se puede efectuar utilizando el mismo procedimiento que se utiliza en la división decimal.

Ejemplo

Realizar la operación siguiente (1242)10 / (89)10 en base 5.

Solución

Convertimos los números de base 10 a base 5, con lo cual tenemos

Comprobación

$$
\begin{array}{r l}
 & (2\ \ 3)_5 \\
(324)_5 \, \big) & -\ (1\ 4\ 4\ 3\ 2)_5 \\
 & \ \ 1\ 1\ 0\ 3 \\
\hline
 & \ \ \ \ 2\ 4\ 0\ 2 \\
 & -\ \ 2\ 0\ 3\ 2 \\
\hline
 & \ \ \ \ (3\ 2\ 0)_5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r l}
 & (1\ 3)_{10} \\
(89)_{10} \, \big) & -\ (1\ 2\ 4\ 2)_{10} \\
 & \ \ 8\ 9 \\
\hline
 & \ \ \ \ 3\ 5\ 2 \\
 & -\ \ 2\ 6\ 7 \\
\hline
 & \ \ \ \ (8\ 5)_{10}
\end{array}
$$