UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

DIVISIÓN SISTEMA UNIVERSIDAD ABIERTA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

LICENCIATURA en

INFORMÁTICA

APUNTES DIGITALES
PLAN 2012

SUAyED UNA OPCIÓN PARA TI

MATEMÁTICAS III (CÁLCULO INTEGRAL Y DIFERENCIAL)

Plan 2012

Clave:		**Créditos: 8**
Licenciatura: INFORMÁTICA		**Semestre: 3º**
Área: Matemáticas		**Horas asesoría:**
Requisitos:		**Horas por semana: 4**
Tipo de asignatura:	**Obligatoria (X)**	**Optativa ( )**

AUTOR

ALBERTO DE LA ROSA ELIZALDE

ADAPTACIÓN EN LÍNEA

JUAN CARLOS LUNA SÁNCHEZ

ACTUALIZACIÓN AL PLAN DE ESTUDIOS 2012

JUAN CARLOS LUNA SÁNCHEZ

INTRODUCCIÓN AL MATERIAL DE ESTUDIO

Las modalidades abierta y a distancia (SUAYED) son alternativas que pretenden responder a la demanda creciente de educación superior, sobre todo, de quienes no pueden estudiar en un sistema presencial. Actualmente, señala Sandra Rocha (2006):

> con la incorporación de las nuevas tecnologías de información y comunicación a los sistemas abierto y a distancia, se empieza a fortalecer y consolidar el paradigma educativo de éstas, centrado en el estudiante y su aprendizaje autónomo, para que tenga lugar el diálogo educativo que establece de manera semipresencial (modalidad abierta) o vía Internet (modalidad a distancia) con su asesor y condiscípulos, apoyándose en materiales preparados ex profeso.

Un rasgo fundamental de la educación abierta y a distancia es que no exige presencia diaria. El estudiante SUAYED aprende y organiza sus actividades escolares de acuerdo con su ritmo y necesidades; y suele hacerlo en momentos adicionales a su jornada laboral, por lo que requiere flexibilidad de espacios y tiempos. En consecuencia, debe contar con las habilidades siguientes.

- Saber estudiar, organizando sus metas educativas de manera realista según su disponibilidad de tiempo, y estableciendo una secuencia de objetivos parciales a corto, mediano y largo plazos.

- Mantener la motivación y superar las dificultades inherentes a la licenciatura.
- Asumir su nuevo papel de estudiante y compaginarlo con otros roles familiares o laborales.
- Afrontar los cambios que puedan producirse como consecuencia de las modificaciones de sus actitudes y valores, en la medida que se adentre en las situaciones y oportunidades propias de su nueva situación de estudiante.
- Desarrollar estrategias de aprendizaje independientes para que pueda controlar sus avances.
- Ser autodidacta. Aunque apoyado en asesorías, su aprendizaje es individual y requiere dedicación y estudio. Acompañado en todo momento por su asesor, debe organizar y construir su aprendizaje.
- Administrar el tiempo y distribuirlo adecuadamente entre las tareas cotidianas y el estudio.
- Tener disciplina, perseverancia y orden.
- Ser capaz de tomar decisiones y establecer metas y objetivos.
- Mostrar interés real por la disciplina que se estudia, estar motivado para alcanzar las metas y mantener una actitud dinámica y crítica, pero abierta y flexible.
- Aplicar diversas técnicas de estudio. Atender la retroalimentación del asesor; cultivar al máximo el hábito de lectura; elaborar resúmenes, mapas conceptuales, cuestionarios, cuadros sinópticos, etcétera; presentar trabajos escritos de calidad en contenido, análisis y reflexión; hacer guías de estudio; preparar exámenes; y aprovechar los diversos recursos de la modalidad.

Además de lo anterior, un estudiante de la modalidad a distancia debe dominar las herramientas tecnológicas. Conocer sus bases y metodología;

tener habilidad en la búsqueda de información en bibliotecas virtuales; y manejar el sistema operativo Windows, paquetería, correo electrónico, foros de discusión, chats, blogs, wikis, etcétera.

También se cuenta con materiales didácticos como éste elaborados para el SUAYED, que son la base del estudio independiente. En específico, este documento electrónico ha sido preparado por docentes de la Facultad para cada una de las asignaturas, con bibliografía adicional que te permitirá consultar las fuentes de información originales. El recurso comprende referencias básicas sobre los temas y subtemas de cada unidad de la materia, y te introduce en su aprendizaje, de lo concreto a lo abstracto y de lo sencillo a lo complejo, por medio de ejemplos, ejercicios y casos, u otras actividades que te posibilitarán aplicarlos y vincularlos con la realidad laboral. Es decir, te induce al "saber teórico" y al "saber hacer" de la asignatura, y te encauza a encontrar respuestas a preguntas reflexivas que te formules acerca de los contenidos, su relación con otras disciplinas, utilidad y aplicación en el trabajo. Finalmente, el material te da información suficiente para autoevaluarte sobre el conocimiento básico de la asignatura, motivarte a profundizarlo, ampliarlo con otras fuentes bibliográficas y prepararte adecuadamente para tus exámenes. Su estructura presenta los siguientes apartados.

1. *Información general de la asignatura.* Incluye elementos introductorios como portada, identificación del material, colaboradores, datos oficiales de la asignatura, orientaciones para el estudio, contenido y programa oficial de la asignatura, esquema general de contenido, introducción general a la asignatura y objetivo general.
2. *Desarrollo de cada unidad didáctica.* Cada unidad está conformada por los siguientes elementos:

   Introducción a la unidad.

Objetivo específico de la unidad.

Contenidos.

Actividades de aprendizaje y/o evaluación. Tienen como propósito contribuir en el proceso enseñanza-aprendizaje facilitando el afianzamiento de los contenidos esenciales. Una función importante de estas actividades es la retroalimentación: el asesor no se limita a valorar el trabajo realizado, sino que además añade comentarios, explicaciones y orientación.

Ejercicios y cuestionarios complementarios o de reforzamiento. Su finalidad es consolidar el aprendizaje del estudiante.

Ejercicios de autoevaluación. Al término de cada unidad hay ejercicios de autoevaluación cuya utilidad, al igual que las actividades de aprendizaje, es afianzar los contenidos principales. También le permiten al estudiante calificarse él mismo cotejando su resultado con las respuestas que vienen al final, y así podrá valorar si ya aprendió lo suficiente para presentar el examen correspondiente. Para que la autoevaluación cumpla su objeto, es importante no adelantarse a revisar las respuestas antes de realizar la autoevaluación; y no reducir su resolución a una mera actividad mental, sino que debe registrarse por escrito, labor que facilita aún más el aprendizaje. Por último, la diferencia entre las actividades de autoevaluación y las de aprendizaje es que éstas, como son corregidas por el asesor, fomentan la creatividad, reflexión y valoración crítica, ya que suponen mayor elaboración y conllevan respuestas abiertas.

3. *Resumen* por unidad.
4. *Glosario* de términos.

5. *Fuentes* de consulta básica y complementaria. Mesografía, bibliografía, hemerografía, sitios web, entre otros, considerados tanto en el programa oficial de la asignatura como los sugeridos por los profesores.

Esperamos que este material cumpla con su cometido, te apoye y oriente en el avance de tu aprendizaje.

Recomendaciones (orientación para el estudio independiente)

- Lee cuidadosamente la introducción a la asignatura, en ella se explica la importancia del curso.
- Revisa detenidamente los objetivos de aprendizaje (general y específico por unidad), en donde se te indican los conocimientos y habilidades que deberás adquirir al finalizar el curso.
- Estudia cada tema siguiendo los contenidos y lecturas sugeridos por tu asesor, y desarrolla las actividades de aprendizaje. Así podrás aplicar la teoría y ejercitarás tu capacidad crítica, reflexiva y analítica.
- Al iniciar la lectura de los temas, identifica las ideas, conceptos, argumentos, hechos y conclusiones, esto facilitará la comprensión de los contenidos y la realización de las actividades de aprendizaje.
- Lee de manera atenta los textos y mantén una actitud activa y de diálogo respecto a su contenido. Elabora una síntesis que te ayude a fijar los conceptos esenciales de lo que vas aprendiendo.
- Debido a que la educación abierta y a distancia está sustentada en un principio de autoenseñanza (autodisciplina), es recomendable diseñar desde el inicio un plan de trabajo para puntualizar tiempos, ritmos, horarios, alcance y avance de cada asignatura, y recursos.

- Escribe tus dudas, comentarios u observaciones para aclararlas en la asesoría presencial o a distancia (foro, chat, correo electrónico, etcétera).
- Consulta al asesor sobre cualquier interrogante por mínima que sea.
- Revisa detenidamente el plan de trabajo elaborado por tu asesor y sigue las indicaciones del mismo.

Otras sugerencias de apoyo

- Trata de compartir tus experiencias y comentarios sobre la asignatura con tus compañeros, a fin de formar grupos de estudio presenciales o a distancia (comunidades virtuales de aprendizaje, a través de foros de discusión y correo electrónico, etcétera), y puedan apoyarse entre sí.
- Programa un horario propicio para estudiar, en el que te encuentres menos cansado, ello facilitará tu aprendizaje.
- Dispón de periodos extensos para al estudio, con tiempos breves de descanso por lo menos entre cada hora si lo consideras necesario.
- Busca espacios adecuados donde puedas concentrarte y aprovechar al máximo el tiempo de estudio.

TEMARIO DETALLADO

(64 horas)

	Horas
1. Funciones	8
2. Límites	10
3. Derivadas	14
4. Integral	12
5. Ecuaciones diferenciales	10
6. Prácticas en laboratorio	10
TOTAL	**64**

INTRODUCCIÓN

El objetivo de los presentes apuntes de Matemáticas III es lograr que el estudiante conozca de una manera cercana los conocimientos más importantes del “Cálculo Diferencial e Integral”, como son los conceptos y elementos fundamentales, entre otros: las “Funciones”, los “Límites”, la “Derivada”, la “Integral” y las “Ecuaciones Diferenciales”; y de esta manera poder elaborar software más eficiente.

Además se pretende que el contenido temático de esta asignatura sirva como referencia de apoyo para la comprensión y raciocinio de otras que comprenden el Plan de Estudios de la Licenciatura en Informática, que por sus características implican saber, definir y comprender conceptos y procedimientos que sean fundamentales para optimizar las labores cotidianas.

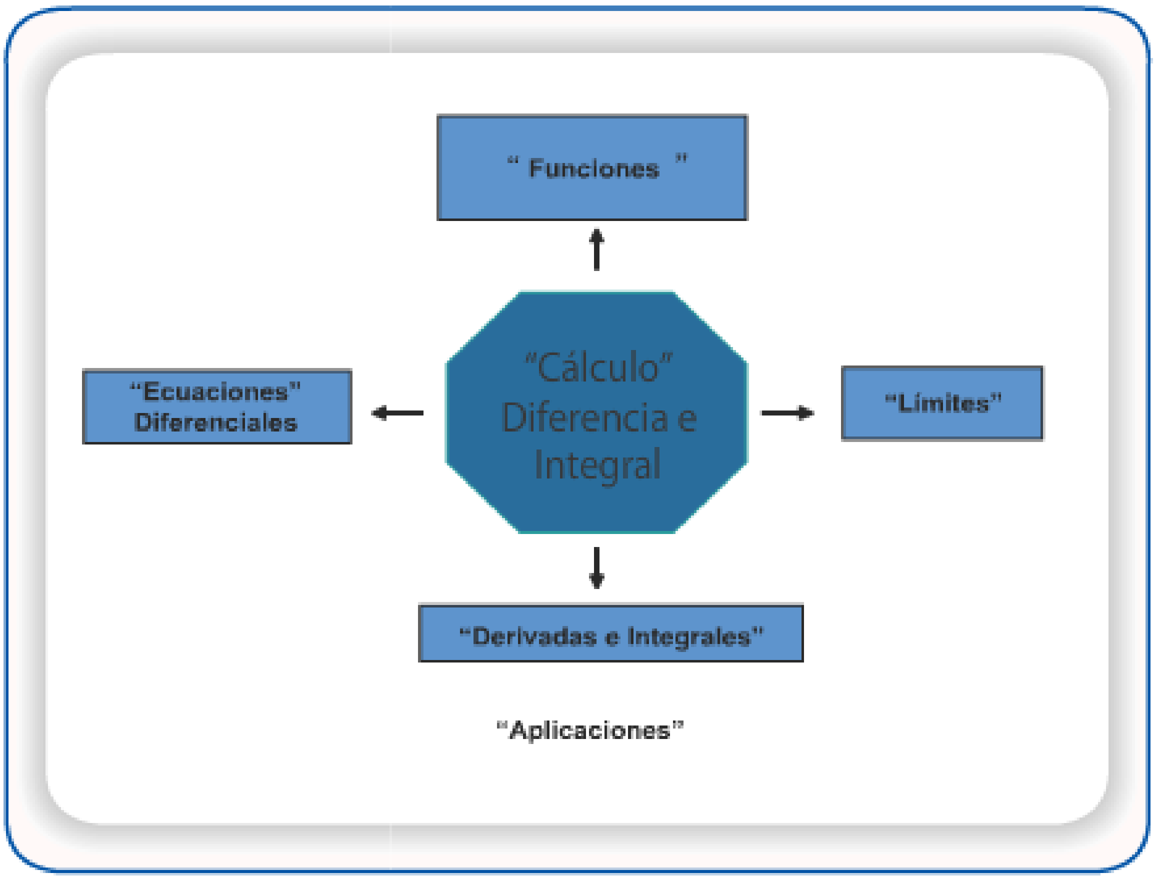
Se ha tratado de exponer todos los temas de la asignatura de una manera clara y sencilla, utilizando un lenguaje simple para que el estudiante encuentre interés en el campo del “Cálculo Diferencial e Integral”. Por lo que la disposición es como sigue:

En primer lugar se verán los conceptos y diferentes tipos de funciones y problemas prácticos; inmediatamente después se verá lo referente al concepto de límite, así como los diferentes tipos y técnicas para resolverlos; una vez terminado el tema anterior entonces se entrará al concepto de la derivada y los diferentes tipos de derivada, y su aplicación a los problemas de la vida real; posteriormente se verá lo referente al concepto de la integral definida e indefinida, así como los diferentes tipos de integrales y su aplicación a los problemas de la vida real y finalmente se entrará a ver lo referente al concepto de una ecuación diferencial ordinaria de primer grado así como los diferentes tipos existentes y su aplicación a los problemas que se presentan en la vida real.

OBJETIVO GENERAL

Al término del curso, el alumno reunirá habilidades en el manejo del cálculo diferencial e integral para aplicarlo en la interpretación, planteamiento y resolución de problemas por medio de modelos matemáticos típicos de la informática.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL



UNIDAD 1

FUNCIONES

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá la naturaleza y los diferentes tipos de de funciones, así como sus aplicaciones.

INTRODUCCIÓN

En la presente unidad se muestran los conceptos de “Función”, “Dominio” y “Codominio”, los cuales son necesarios para abordar las unidades subsecuentes. También se muestran algunos “Tipos de Funciones” así como aplicaciones de las funciones.

LO QUE SÉ

Para dar inicio a la unidad, explica lo que para ti es una definición de Función matemática.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

1.1. Naturaleza y definición de función matemática

1.2. Principales tipos de funciones

- 1.2.1. Función lineal y su representación geométrica
- 1.2.2. Función cuadrática y su representación geométrica
- 1.2.3. Función polinomial y su representación geométrica
- 1.2.4. Función exponencial y su representación geométrica
- 1.2.5. Función logarítmica y su representación geométrica

1.3. Aplicaciones de la funciones

1.1. Naturaleza y definición de función matemática

El concepto de *función* es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Cualquier estudio en el que se utilicen las matemáticas para dar solución a problemas prácticos o en el que se requiera el análisis de datos empíricos se emplea este concepto matemático. La función es una cantidad dependiente que está determinada por otra.

Definición de Función

Una función f(x) es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x del dominio con un solo elemento f(x) de un segundo conjunto (con uno y sólo uno) llamado rango o contra dominio de la función, es decir, si x_1 es diferente de x_2 entonces $f(x_1)$ es diferente de $f(x_2)$.

Una función consta de tres partes:

1. Un conjunto A llamado dominio de la función.
2. Un conjunto B llamado contra dominio de la función.
3. Una regla de correspondencia f que asocia a todo elemento de A, uno y sólo un elemento del conjunto B.

La regla debe tener las siguientes propiedades:

- Ningún elemento del dominio puede quedar sin elemento asociado en el contra dominio.
- Ningún elemento del dominio puede tener más de un elemento asociado en el contra dominio o codominio. Esto no excluye que varios elementos del dominio tengan al mismo algún elemento asociado en el contra dominio.

Si tenemos los conjuntos A y B, y la regla de correspondencia se cumple con las propiedades señaladas, entonces, la terna (A, B, f) es una función cuya notación es:

$$f : A \to B$$

(Se lee f va de A hacia B)

Otra forma es:

$$f(x)$$

(y se lee f de x)

- Se emplean por lo regular las letras f(x), g(x) o h(x) para simbolizar una función.
- Si (x) es un elemento de A, entonces el elemento de B asociado a (x) por medio de la regla de correspondencia se expresa como f(x) y se le llama la imagen de (x) bajo (f).
- La regla de correspondencia de una función puede estar dada por un diagrama, una ecuación, una tabla de valores y una gráfica.

Diagrama

El diagrama se construye formando dos óvalos y uniendo estos con una flecha que parte del primer óvalo hacia el segundo (dirección de izquierda a derecha).

En el interior del primer óvalo se anotan los valores de entrada de la función (dominio), en el segundo se anotan los valores de salida de la función (contra dominio), se une con una flecha el valor de entrada con el valor de salida como se muestra en la siguiente figura:

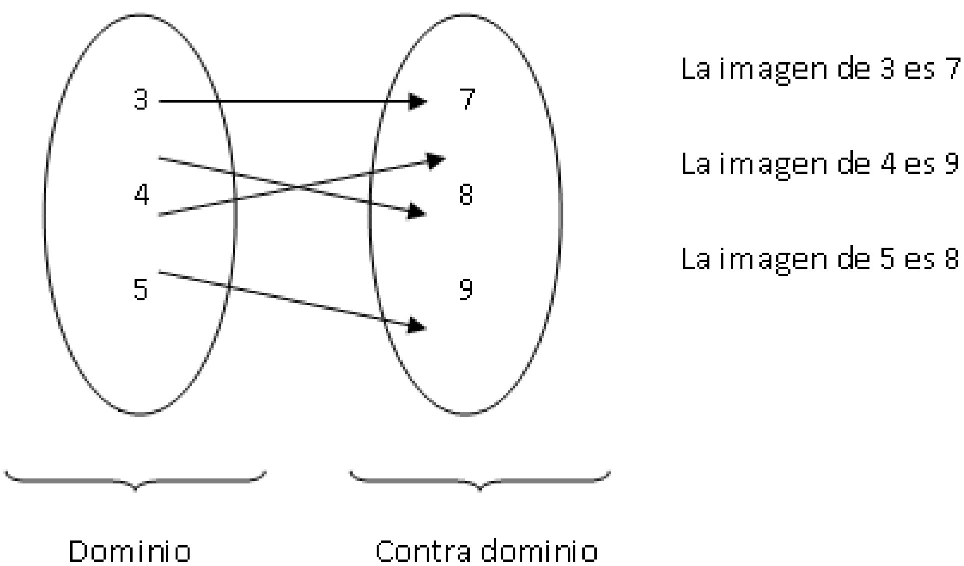


Diagrama de la regla de correspondencia de una función

Ecuación

En este caso se requiere plantear una ecuación con dos incógnitas como la que se muestra a continuación:

$$3x^2 - y + 4 = 0.$$

Como primer paso se despeja la variable dependiente (y), $\therefore$ $y = 3x^2 + 4$.

A la expresión anterior la presentamos en forma de función $f(x) = 3x^2 + 4$, en donde la función (f) es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) tales que x y y satisfacen a la ecuación $3x^2 - y + 4 = 0$, y se denota como:

$$\boxed{f = \{(x, y) \,/\, y = 3x^2 + 4\}}$$

> En el dominio de la función están todos los posibles valores que toma la variable independiente (x) y los valores extremos; en el contra dominio de la función se encuentran todos los valores posibles que pueden asignarse por el dominio y regla de transformación a la variable dependiente (y).

Ejemplo:

Sea la función (f) cuya regla es $f(x) = 3x^2 + 4$

- El dominio es: {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}
- Los valores extremos son: - 3 y 3

- El contra dominio es {31, 16, 7, 4, 7, 16, 31} y está determinado por el dominio y la regla de transformación.
- Una función que va de los reales a los reales se expresa con la notación: $f : R \to R$

Los valores extremos en este caso no están determinados (no existen) en el dominio, porque éste contiene todos los números reales, el contra dominio está formado por todos los números R y la regla de correspondencia está dada por una ecuación.

En los casos en que no se indica o se especifica el dominio de la función, entonces, se debe entender que el dominio incluye todos los números reales (o también llamado dominio natural).

Ejemplo de funciones:

1. Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$

Solución:

- El dominio es todos los números reales R $f = \{x \in R\}$ y el contra dominio también está formado por todos los R.
- Para este tipo de funciones polinomiales el dominio siempre será el conjunto de los números reales R.

2. Sí $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0} = \textit{operación no determinada}$$

- El dominio son todos los reales excepto el 2, ya que la división entre cero no está determinada por lo tanto $f = \{x \in R / x \neq 2\}$.
- El contra dominio está formado por todos los números reales positivos excepto el cero, D = {y ∈ R+/ (0 < x < ∞)}
- Para este tipo de funciones racionales el dominio siempre será el conjunto de los números reales excepto los que hacen cero el denominador de la función.

3. Si $f(x) = \sqrt{5x+2}$

Solución:

- ♦ El radical se expresa de la siguiente forma: $5x + 2 \geq 0$,
- El signo debe ser ≥ , porque no existen raíces cuadradas de números negativos.
- ♦ Se despeja el valor de x de la inecuación $x \geq -\dfrac{2}{5}$
- El dominio de $F = \{x \in R / x \geq -2/5\}$

Para este tipo de función con radical y el índice par, el dominio siempre será formado por todos los números que hagan al radical igual o mayor que cero.

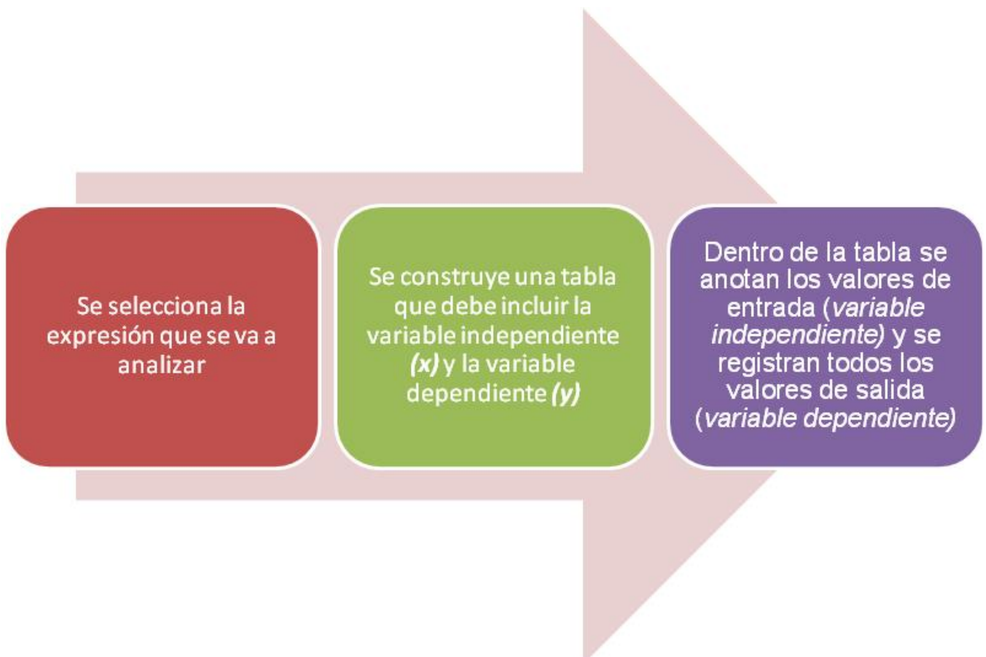
Casos en el que una expresión no cumple con ser una función:

a) La expresión $y > x$ no define una función puesto que hay muchos valores de y para cada valor de x.

b) La expresión $x = y^2$ no define una función puesto que hay dos valores de y para cada valor positivo de x.

c) $x^2 + y^2 = 9$ no define una función, porque para cada valor positivo de (x) hay dos de (y).

Tabla de valores



Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x + 2$

Solución:

Utilizando la tabulación, se registran los valores que toma (x) para encontrar los valores de y; esto se puede apreciar en la “Tabla 1.1” en donde los puntos extremos del dominio son –2 y 4

x	-2	-1	0	1	2	3	4	**Dominio**
y	0	1	2	3	4	5	6	**Contra dominio**

Tabla 1.1. Tabulación de la función $f(x) = x + 2$

1.2. Principales "Tipos de Funciones"

1.2.1. Función lineal y su representación geométrica

Una función lineal tiene la forma:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{con } A \neq 0 \text{ y } B \neq 0$$
(A, B, C son constantes)

- Es la ecuación general de la línea recta y su representación gráfica es una línea recta.
- En particular f(x) = ax + b es una función de primer grado o función lineal. Cuando se expresa en la forma y = mx + b se le llama a la ecuación pendiente-ordenada al origen.
- (m) representa la pendiente, (b) es el punto donde corta al eje de las ordenadas (y).
- La pendiente se puede calcular si se conocen dos puntos por donde pase la recta $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, entonces:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Conociendo la pendiente y un punto se puede encontrar la ecuación de la línea recta con la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

1.2.2. Función cuadrática y su representación geométrica

La función cuadrática tiene la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0 \quad \text{con } A \neq 0}$$

Es la ecuación general de segundo grado, su representación grafica es una parábola.

La ecuación de una parábola es:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Para realizar la gráfica son necesarios tres pasos:

1. Para determinar hacia dónde abre la parábola, es necesario conocer cuál es el signo del coeficiente de x^2.

1.1.) Si es positivo, la parábola abre hacia arriba, $a > 0$.

1.2.) Si el signo es negativo, la parábola abre hacia abajo, $a < 0$.

2. El vértice de la parábola es el punto máximo o mínimo de la parábola, se encuentra utilizando las siguientes expresiones:

$$Vx = \frac{-b}{2a} \quad \textit{vértice en } x \qquad ; \qquad Vy = \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \textit{vértice en } y$$

3. La parábola siempre corta el eje de las ordenadas, para determinar en dónde lo corta se realizan los siguientes pasos:

3.1.) Hacer $x = 0$

3.2.) Sustituir éste en la ecuación: y = a(0)2 + b(0) + c = c, entonces la parábola corta el eje de las ordenadas en el punto (0,c).

Ejemplo: Sea $y = 3x^2 + 12x$.

Entonces:

- La parábola abre hacia arriba porque $a = 3 > 0$.
- El vértice se encuentra en el punto (-2, -12).
- La parábola corta los ejes en los puntos (0, 0) y (-4, 0).

1.2.3. Función polinomial y su representación geométrica

Cualquier función que pueda obtenerse a partir de la función constante y de la función identidad mediante las operaciones de adición, sustracción y multiplicación se llama función polinomial, es decir f es de la forma:

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

En donde los valores de $\mathbf{a_n}$, $\mathbf{a_{n-1}}, \ldots \mathbf{a_0}$.son constantes (números reales) y $\mathbf{a_n \neq 0}$ y **n** es un entero no negativo y también indica el grado de la función polinomial.

1.2.4. Función exponencial y su representación geométrica

La función exponencial se expresa como:

$$\boxed{f(x) = b^x \quad ; \text{si } \; b > 0 \quad y \quad b \neq 1}$$

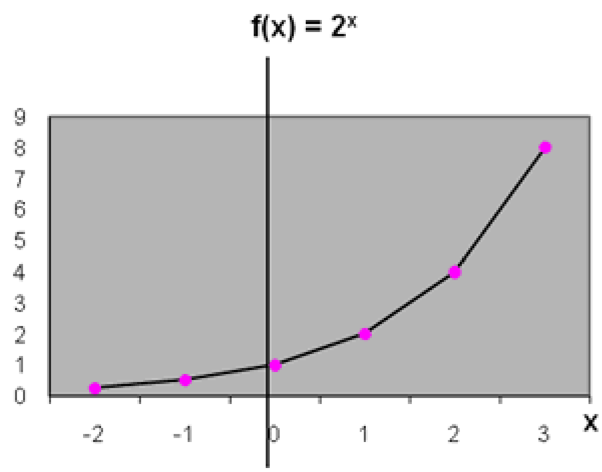
En donde:

- b es la base de una función exponencial.
- x es el exponente de la función exponencial.

El dominio está formado por todos los números reales $D_f = \{R\}$

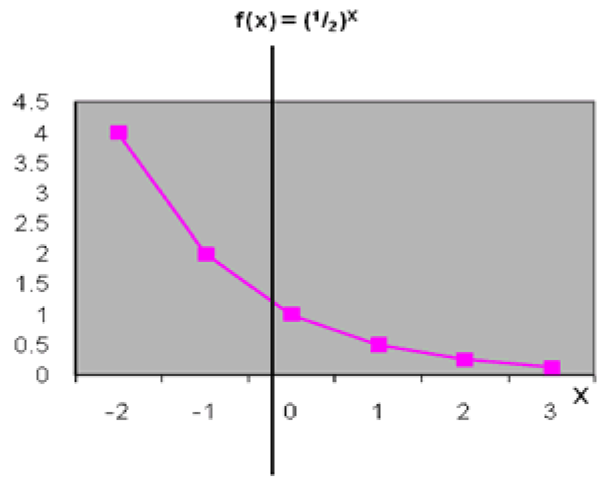
Ejemplos:

a) f(*x*) = 2^x



Función exponencial de base 2

b) f(x) = (1/2) ^{x}



Función exponencial de base 1/2

Propiedades de la función exponencial

Si **a > 0, b > 0 y (x), (y)** elementos de los reales (R) entonces:

Teorema 1

1.1. $a^{x} \bullet a^{y} = a^{x+y}$

1.2. $(a^{x})^{y} = a^{xy}$

1.3. $(a \bullet b)^{x} = a^{x}b^{x}$

1.4. $\dfrac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$

1.5. $\left[\dfrac{a}{b}\right]^{x} = \dfrac{a^{x}}{b^{x}}$

Teorema 2

$$2.1 \quad Si\ a > 1, \quad \begin{cases} a^x > 1 \ \ cuando \quad x > 0 \\ a^x < 1 \ \ cuando \quad x < 0 \end{cases}$$

$$2.2 \quad Si\ a < 1, \quad \begin{cases} a^x < 1, \ \ cuando \quad x > 0 \\ a^x > 1, \ \ cuando \quad x < 0 \end{cases}$$

Las leyes de los exponentes facilitan los cálculos de estas funciones.

También dentro de esta función se define la función exponencial natural que tiene como base el número (e) y es de la forma:

$$y = e_{x}$$

1.2.5. Función logarítmica y su representación geométrica

Si **b > 0 y b ^{1} 0**,

entonces:

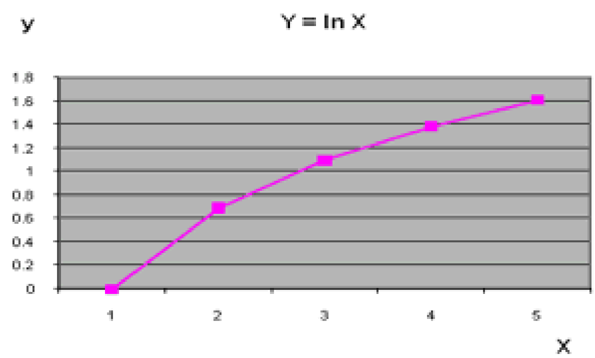
$y = \log_b x$ si y sólo si **$x = b^y$; $x > 0$**

Con el dominio de la función $\mathbf{D_f = \{R+\}}$

$$\boldsymbol{y = \log_b x}$$

(Se lee logaritmo de base (b) de (x) igual a (y))

Los cálculos en funciones logarítmicas se facilitan con las leyes de los logaritmos. Dentro de esta función se define la función logaritmo natural que tiene como base al número (e) y es de la forma: $y = \ln x$



Función logarítmica

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos comunes o de base 10 (Briggs) se denotan como log x, la base 10 no se escribe. El logaritmo natural (neperiano) de base e (e = 2.718281828) se denota como: ln x.

LOGARITMO	
Expresión	**Nombre**
$\log_a a = 1$	Logaritmo de la base
$\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$	Cambio de base
Log (a · b) = log a + log b	Producto
$\log (a\ b) = \log a - \log b$	Cociente
$\log a^n = n \log a$	Potencia
$\log {}^n\ a = \dfrac{1}{n} \log a$	Raíz
Estas propiedades se cumplen para logaritmos con cualquier base.	
Nota: $\log a^n \neq (\log a)^n = \log^n a$	

1.3. Aplicaciones de las “Funciones”

Ejemplo de Funciones Lineales:

Producción		
Problema	**Solución**	**Resultado**
Para un fabricante de relojes, el costo de mano de obra y de los materiales por reloj es de $150 y los costos fijos son de $20,000 al día, si vende cada reloj a $200, ¿cuántos relojes deberá producir y vender cada día con objeto de garantizar que el negocio se mantenga en el punto de equilibrio?	Sea (x) el número de relojes producidos y vendidos cada día. El costo total de producir (x) relojes es: **yc = costos variables + costos fijos = 150x +20000** Dado que cada reloj se vende a $200, el ingreso (I) obtenido por vender (x) relojes es **I = 200x** El punto de equilibrio	Se deben producir y vender al día **400** relojes para garantizar que no haya ni utilidades ni pérdidas.

	se obtiene cuando los ingresos son iguales a los costos, es decir: **200x = 150x + 20000** Obtenemos que 50x = 20000 ó x = 400.	

Punto de equilibrio de mercado		
Problema	**Solución**	**Resultado**
La demanda para los bienes producidos por una industria está dada por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$, en donde (p) es el precio y (x) es la cantidad de demanda. La oferta está dada por p = x + 7 ¿Cuál es el precio y la cantidad del punto de equilibrio?	El precio y la cantidad del punto de equilibrio son los valores positivos de (p) y (x) que satisfacen a la vez las ecuaciones de la oferta y la demanda. $\mathbf{p^2 + x^2 = 169 \quad (1)}$ $\mathbf{p = x + 7 \quad (2)}$ Sustituyendo el valor de (p) de la ecuación (2) en la ecuación (1) y simplificando $(x+7)^2 + x^2 = 169$ $2x^2 + 14x + 49 = 169$ $x^2 + 7x - 60 = 0$ Factorizando encontramos que:	Se deben de producir y vender al día **400** relojes para garantizar que no haya ni utilidades ni pérdidas.

	$$(x+7)^2+x^2=169$$ $$2x^2+14x+49=169$$ $$x^2+7x-60=0$$ Lo cual da **x = -12** ó **5**. El valor negativo de x es inadmisible, de modo que x = 5 es el correcto. Sustituyendo x = 5 en la ecuación (2), se tiene: **P = 5 + 7 = 12**	

Modelo de costo lineal
El costo de procesar un kilo de granos de café es de \$0.50 y los costos fijos por día son de \$300. a). Encuentra la ecuación de costo lineal y dibuja su gráfica. b). Determina el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día. Solución: Si y_c representa el costo de procesar (x) kilos de granos de café por día, entonces se emplea la siguiente expresión: **Modelo lineal** Costo total = costo variable total + costos fijos $$y_c = mx + b \qquad (1)$$ a) La ecuación (1) es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuyo costo fijo es la ordenada al origen. En este caso m = \$0.50 y b = \$ 300, por lo tanto:

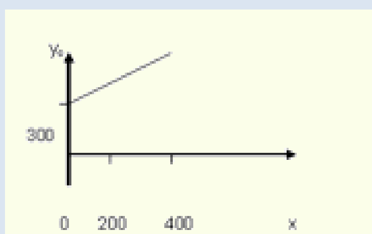
$$y_c = 0.5x + 300 \qquad (2)$$

Para dibujar la gráfica primero encontramos dos puntos sobre ella. Haciendo x = 0 en la ecuación (2), tenemos que y = 300, haciendo x = 200 en la ecuación (2), tenemos que yc = 0.5 (200) +300 = 400. De modo que dos puntos que satisfacen la ecuación (2) de costo son (0,300) y (200,400). Graficando estos puntos y uniéndolos mediante una línea recta, obtendremos la gráfica que aparece en la gráfica.

b) Sustituyendo x =1000 en la ecuación (2), obtendremos:

$$\mathbf{y_c = 0.5(1000) + 300 = 800}$$

En consecuencia el costo de procesar l000 kilogramos de café al día será de $800.



Modelo de costo lineal

El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de \$35000, mientras que cuesta \$60000 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determine la relación entre el costo total y_c de producir (x) máquinas de escribir al día y dibuje su gráfica.

Solución:

Se nos dan los puntos (10,35000) y (20,60000) que están sobre la gráfica del modelo lineal, la pendiente de la línea que une estos dos puntos es:

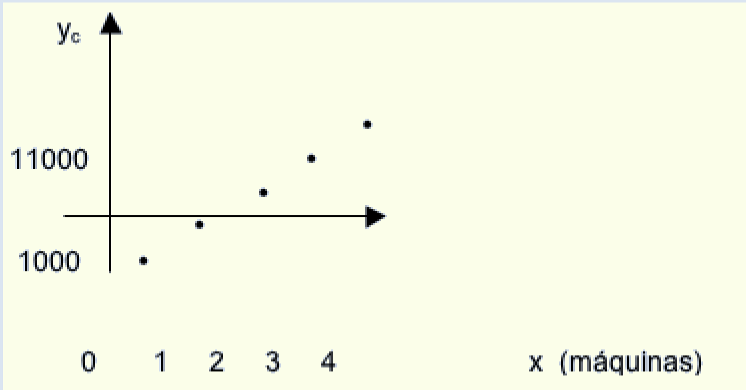
Empleando la fórmula de punto-pendiente:

$$m = \frac{60000 - 35000}{20 - 10} = \frac{25000}{10} = 2500$$

Empleando la fórmula de punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y_c - 35000 = 2500(x - 10) = 2500x - 25000$$
$$y_c = 2500x + 1000$$

X	0	1	2	3	4
yc	1000	3500	6000	8500	11000



La gráfica de la ecuación (3) no es una línea recta continua porque (x) no puede tomar valores fraccionarios al representar el número de máquinas de escribir producidas. La variable (x) sólo puede tomar valores enteros 0, 1, 2,3,.....

Depreciación Lineal

Una empresa compra maquinaria por $150 000; se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con valor de desecho de cero. Determina la cantidad de depreciación por año y una fórmula para el valor depreciado después de (x) años

Solución:

Tasa de depreciación (por año) = (Valor inicial - Valor de desecho) ¸ (vida útil en años)

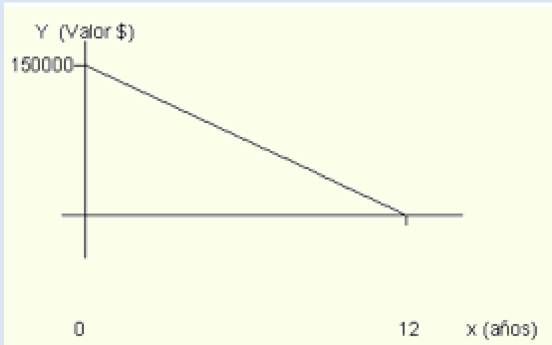
**Depreciación por año = (precio de adquisición inicial) ¸ (vida útil en años)*

= $ 150, 000 ¸ 1 2 años
= $ 12, 500

**Valor después de x años = (valor inicial) – (depreciación por año)(número de años)*

y = $ 150, 000 – ($ 12, 500 por año)(x años)

y = $ 150, 000 – 12, 500 x



Valor después de x años = (valor inicial) – (depreciación por año)(número de años)

y = $ 150, 000 – ($ 12, 500 por año)(x años)
y = $ 150, 000 – 12, 500 x

Demanda

Un comerciante puede vender 20 paquetes de rastrillos al día al precio de $25 cada uno, pero puede vender 30 si les fija un precio de $20 a cada paquete. Determinar la ecuación de demanda.

Solución:

- **x la cantidad de demanda**
- **y el precio p por unidad**

$$x = 20, \quad p = 25 \qquad y \qquad x = 30, \quad p = 20$$

La pendiente de la línea recta de demanda es:

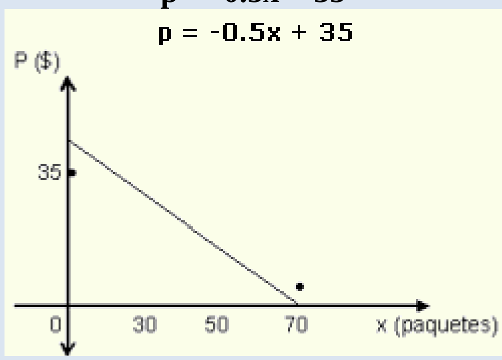
$$m = \frac{20-25}{30-20} = \frac{-5}{10} = -0.5$$

La ecuación de la demanda se encuentra a partir de la ecuación general de la línea recta

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$
$$\text{si } m = -0.5$$
$$p - 25 = -0.5(x - 20)$$

La ecuación de demanda es:

$$p = -0.5x + 35$$



Interés

El licenciado Álvarez cuenta con un capital de $35 000. Parte de este dinero lo invierte en una cuenta de ahorro que le paga el 8% de interés simple y el dinero restante lo invierte en un negocio que produce el 12% de interés simple. ¿Qué cantidad debe invertir en cada caso para obtener una ganancia del 11% sobre su dinero después de un año?

Solución:

Sea (x) la cantidad invertida en la cuenta de ahorros al 8% y $35 000 – x la cantidad de dinero invertido en el negocio al 12%.

1) El interés obtenido por la *cuenta bancaria* es: $I = Cnt = x(0.08)(1) = 0.08x$ **(1)**

2) El interés obtenido por la *inversión en el negocio* es:

$$I = Cnt = (35000 - x)(0.12)(1) = 0.12(35000 - x) \qquad (2)$$

3) El interés recibido por las dos al 11% (el total) es: $I = 0.11\,(35000)$ **(3)**

Sumando la ecuación 1 y 2 e igualando el resultado de estas con la ecuación 3 se tiene:

$$0.08x + 0.12(35000 - x) = 0.11(35000) \qquad (4)$$

Despejando x:

$$-0.04x = -350$$
$$x = 8750$$

La interpretación de este resultado es el siguiente: en la cuenta de ahorros se depositan \$8750.

De la ecuación 2 tenemos:

$$35000 – x = 35000 – 8750$$

Despejando x

$$x = 26250$$

La interpretación de este resultado es: La inversión en el negocio es de **\$26 250**.

RESUMEN

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requiere calcular valores para diferentes tipos de “Funciones” a fin de que satisfagan la solución de un “Problema” en cuestión.

Para la obtención de estos valores existen diversas metodologías que permiten realizarlo y en esta variedad de metodologías es donde tiene su mayor importancia del “Cálculo Diferencial e Integral”.

Además las “Empresas” requieren hacer uso muy frecuente de estas metodologías; dado que está conformada por diversas áreas funcionales en donde se toman de manera constante decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

GLOSARIO

Codominio

Conjunto de valores de la “Variable Dependiente” para los que puede ser evaluada una “Función”.

Dominio

Conjunto de valores de la “Variable Independiente” para los que puede ser evaluada una “Función”.

Gráfico de una Función

Es el “Lugar Geométrico” que representa la trayectoria de una “Función” en un “Sistema Cartesiano”.

Función

Es una regla que asocia a cada objeto de un conjunto A, uno y sólo un objeto de un conjunto B.

Variable Independiente

Es el valor numérico designado a x.

Variable Dependiente

Es el valor numérico designado a y.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Determina el "Dominio", el "Codominio" y el "Lugar Geométrico o Gráfica" de las siguientes "Funciones".

1. $y = \sqrt{(5 - x)}$.
2. $y = \sqrt{(x2 – 9)}$.
3. $x2 + y2 = 25$.
4. y = ?x?.
5. $y = (x2 – 9)/(x – 3)$.

ACTIVIDAD 2

Determina el "Dominio", el "Codominio" y el "Lugar Geométrico o Gráfica" de las siguientes "Funciones".

1. $y = \sqrt{(x(5 - x))}$.
2. $y = x^2 + 2$.
3. $y = \sqrt{(6x^2 – 5x – 4)}$.
4. $y = ((x^3 + 3x^2 + x + 3)/(x + 3)$.
5. $y = |x| \cdot |x - 1|$.

ACTIVIDAD 3

Determina el “Dominio”, el “Codominio” y el “Lugar Geométrico o Gráfica” de los siguientes “Tipos de Funciones”.

1. $y = e^{-2x + 1}$
2. $y = x + 2$
3. $y = |x - 1|$
4. $y = x^2 + 2x + 1$
5. $y = \ln (x + 2)$

ACTIVIDAD 4

Encuentra la “Pendiente” de la recta que pasa por los puntos dados a continuación:

1. (2, -3) y (-4, 3)
2. (5, 2) y (-2, -3)
3. (1/3, ½) y (-5/6, 2/3)
4. (2, 3) y (4, 7)
5. (-2.1, 0.3) y (2.3, 1.4)

ACTIVIDAD 5

Encuentra la "Ecuación de la Recta" que cumpla las condiciones indicadas:

1. La pendiente es 4 y pasa por el punto (2, -3).
2. Pasa por los puntos (3, 1) y (-5, 4).
3. La abscisa en el origen es -3 y la ordenada en el origen es 4.
4. Que pasa por los puntos (3, -5) y (1, -2).
5. Que pasa por el punto (-4, -5) y su pendiente es 2.

ACTIVIDAD 6

Determina el "Dominio", el "Codominio" y el "Lugar Geométrico o Gráfica" de las siguientes "Funciones".

1. $y = \sqrt{(x^2 – 3x - 4)}$
2. $y = \sqrt{((x^3 – 2x^2)/(x – 2))}$
3. $y = |x| + |x - 1|$
4. $y = (x^2 – 1)^{(1/3)}$
5. $y = 3x^2 – 6$

ACTIVIDAD 7

Aplicando las "Propiedades de los Logaritmos" determina lo que se pide en cada inciso.

1. Dada $T = 75e^{-2t}$ exprese $t = f(T)$
2. Dada $p = 29e^{-0.000034h}$ exprese $h = f(p)$
3. $\log_a = (x^3\sqrt{y})/z$
4. Dada la ecuación: $\ln(2x + 3) = \ln 11 + \ln 3$ determine el valor de x
5. Dada la ecuación:

   $\ln(x + 6) - \ln 10 = \ln(x - 1) - \ln 2$ determine el valor de x

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

Contesta el siguiente cuestionario.

1. Define el concepto de función.
2. Define el concepto de dominio.
3. Define el concepto de rango.
4. Da un ejemplo de función cuadrática.
5. Da un ejemplo de función exponencial.
6. Da un ejemplo de una función polinómica y define su contra dominio.
7. Define una función cuadrática y de su dominio y rango.
8. Define una función exponencial y Define su dominio y rango.
9. Define las propiedades de la función logarítmica.

10 Define las propiedades de la función exponencial.

LO QUE APRENDÍ

Resuelve los siguientes problemas.

1. Calcula el punto de equilibrio y el margen de contribución para una "Empresa" que tiene "Gastos Fijos" de $35,000.00; "Gastos Variables por Unidad" de $300.00 y "Precio de Venta por Unidad" de $550.00. Calcula con los resultados la "Utilidad" o la "Pérdida" para un nivel de producción y ventas de 230 unidades.

2. La diferencia de dos números A y B es 14; además se tiene que un cuarto de su suma da como resultado 13. Determina los valores de dichos números.

3. Durante una aventura eco-turística un bote navega por un río recorre 15 km en un tiempo de una hora y media a favor de la corriente en la ida y luego 12 km en 2 horas contra la corriente en la vuelta. Determina la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.

4. Se tiene que la suma de tres números A, B y C es 160. Donde un cuarto de la suma del mayor y el mediano equivale al menor disminuido en 20, y si a un medio de la diferencia entre el mayor y el menor se suma el número de en medio, el resultado es 57.

5. Hace 8 años la edad de J era el triple que la edad de P; y dentro de cuatro años la edad de J será los 5/9 de la edad de P. Determina los valores de las edades actuales de J y P. Se tiene que la suma de tres números A, B y C es 160.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Elige la respuesta correcta a los siguientes problemas.

1. Desde el principio del año el precio de una hogaza de pan integral en un supermercado local ha estado subiendo a un ritmo constante de 2 centavos por mes. El día uno de noviembre, el precio alcanzó los 64 centavos por hogaza. Determina el precio al principio del año.
   a) p(t) = 46 centavos
   b) p(t) = 44 centavos
   c) p(t) = 42 centavos
   d) p(t) = 48 centavos
   e) p(t) = 40 centavos

2. El Índice Medio de estudiantes que empiezan en una escuela de artes liberales orientales ha ido disminuyendo a un ritmo constante en los últimos años. En 2003, este índice era de 582 mientras que el en el 2008 fue del 552. ¿Cuál será el Índice Medio de estudiantes que empiecen en 2013?
   a) y = 500
   b) y = 512
   c) y = 552
   d) y = 530
   e) y = 522

3. Un fabricante puede vender un cierto producto por 110 dólares cada unidad. El “Coste Total” está formado por unos gastos generales de $ 7,500.00 dólares más los “Costes de Producción” de $ 60.00 dólares por unidad. ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para llegar al punto de beneficio nulo?
   a) x = 150 unidades
   b) x = 160 unidades
   c) x = 130 unidades
   d) x = 170 unidades
   e) x = 120 unidades

4. Un fabricante puede vender un cierto producto por 110 dólares cada unidad. El “Coste Total” está formado por unos gastos generales de $ 7,500.00 dólares más los “Costes de Producción” de $ 60.00 dólares por unidad. ¿Cuál es el beneficio o pérdida del fabricante si vende 100 unidades?
   a) - $ 3,000.00 dólares
   b) $ 1,000.00 dólares
   c) $ 3,000.00 dólares
   d) - $ 2,500.00 dólares
   e) $ 2,700.00 dólares

5. Un fabricante puede vender un cierto producto por 110 dólares cada unidad. El “Coste Total” está formado por unos gastos generales de $ 7,500.00 dólares más los “Costes de Producción” de $ 60.00 dólares por unidad. ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para obtener un beneficio de $ 1,250.00 dólares?

   a) x = 185
   b) x = 175
   c) x = 195
   d) x = 165
   e) x = 205

II. Elige la respuesta correcta a los siguientes problemas.

1. Supón que el “Coste Total” en dólares de fabricar q unidades de un cierto artículo viene dado por la función C(q) = q3 – 30q2 + 500q + 200. Calcula el “Coste Total” de fabricación de 10 unidades del artículo.
    a) $ 3,200.00 dólares
    b) $ 3,100.00 dólares
    c) $ 2,900.00 dólares
    d) $ 3,400.00 dólares
    e) $ 3,600.00 dólares

2. Supón que el “Coste Total” en dólares de fabricar q unidades de un cierto artículo viene dado por la función C(q) = q3 – 30q2 + 500q + 200. Calcula el “Coste de Fabricación” de la décima unidad del artículo.
    a) $ 205.00 dólares
    b) $ 199.00 dólares
    c) $ 200.00 dólares
    d) $ 201.00 dólares
    e) $ 203.00 dólares

3. Un fabricante puede producir radios a un “Coste” de 10 dólares cada una y estima que si son vendidas por x dólares cada una, los usuarios comprarán aproximadamente 80 menos x radios cada mes. Determina el “Beneficio Mensual” esperado si el fabricante vendiese 50 radios.
    a) B(x) = $ 1,000.00 dólares
    b) B(x) = $ 1,400.00 dólares
    c) B(x) = $ 1,100.00 dólares
    d) B(x) = $ 1,300.00 dólares
    e) B(x) = $ 1,200.00 dólares

4. Por cada cargamento de materiales en bruto un fabricante debe pagar unos honorarios de solicitud para cubrir embalaje y transporte. Después de haberlos recibido, los materiales en bruto deben almacenarse hasta su utilización y se originan “Costes de Almacenaje”. Si cada cargamento de materiales en bruto es grande, los “Costes de Solicitud” serán bajos, ya que se requieren pocos cargamentos, pero los “Costes de Almacenaje” serán altos. Si cada cargamento es pequeño, los “Costes de Solicitud” serán altos porque se requerirán muchos cargamentos, pero los “Costes de Almacenaje” bajarán. Un fabricante estima que si cada cargamento contiene x unidades, el “Coste Total” de pedir y almacenar el suministro del año de materiales en bruto será C(x) = x + (160,000/x) dólares. Determina el “Coste Total” para un cargamento de 400 unidades.
   a) $ 600.00 dólares
   b) $ 800.00 dólares
   c) $ 700.00 dólares
   d) $ 900.00 dólares
   e) $ 500.00 dólares

5. Halla el precio de equilibrio y el correspondiente número de unidades ofertadas y demandadas si la función de “Oferta” para un cierto artículo es: S(p) = p2 + 3p – 70 y la función de Demanda es D(p) = 410 – p.
   a) p = 30; q = 400
   b) p = 42, q = 420
   c) p = 20, q = 390
   d) p = 22, q = 394
   e) p = 33, q = 405

III. Elige la respuesta correcta a los siguientes problemas.

1. Las funciones de “Oferta” y “Demanda” para un cierto artículo son S(p) = p – 10 y D(p) = (5,600/p), respectivamente. Halla el precio de equilibrio al número de unidades ofertadas y demandadas.
   a) p = 40, q = 50
   b) p = 80, q = 70
   c) p = 70, q = 60
   d) p = 90, q = 80
   e) p = 60, q = 50

2. Un fabricante puede producir radios a un “Coste” de $ 2.00 dólares cada uno. Los radios han sido vendidos a $ 5.00 dólares cada uno, y a este precio, los consumidores han estado comprando 4,000 radios al mes. El fabricante está planeando subir el precio de las radios y estima que por cada dólar de aumento en el precio se venderán 400 radios menos cada mes. Determina el “Beneficio Mensual” del fabricante si el precio de cada radio fuese de $ 8.00 dólares
   a) B(x=8) = $ 20,800.00 dólares
   b) B(x=8) = $ 14,800.00 dólares
   c) B(x=8) = $ 19,800.00 dólares
   d) B(x=8) = $ 16,800.00 dólares
   e) B(x=8) = $ 17,800.00 dólares

3. El departamento de carreteras está planeando construir un área de recreo para automovilistas a lo largo de una carretera principal. Ha de ser rectangular con un área de 5,000 metros cuadrados y ha de ser cercada en los traslados no adyacentes a la carretera. Expresa el número de metros de cerca requeridos como una función de la longitud del lado no cercado.
    a) F(x) = x + (10,000/x)
    b) F(x) = x + (12,000/x)
    c) F(x) = x + (11,000/x)
    d) F(x) = x + (14,000/x)
    e) F(x) = x + (17,000/x)

4. Calcula el punto de equilibrio de una “Empresa” que tiene “Gastos Fijos” de $ 35,000.00; “Gastos Variables por Unidad” de $ 300.00 y “Precio de Venta por Unidad” de $ 650.00.
    a) P. E. = 600 unidades
    b) P. E. = 500 unidades
    c) P. E. = 100 unidades
    d) P. E. = 200 unidades
    e) P. E. = 400 unidades

5. La “Empresa” del “Reactivo 4” actualmente produce y vende 200 unidades y tiene necesidad de disminuir su “Precio de Venta Unitario” a $ 550.00. Calcula las “Utilidades” o “Pérdidas” con el nuevo “Precio” y el mismo nivel de producción y ventas.
    a) Utilidad = $ 14,000.00
    b) Pérdida = $ 15,000.00
    c) Utilidad = $ 17,000.00
    d) Pérdida = $ 16,000.00

e) Utilidad = $ 15,000.00

IV. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas, una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

1. La ecuación de la oferta es $p = 0.03q + 2$, donde p es el precio por unidad y q representa el número de unidades producidas y vendidas, y la ecuación de demanda es $p = -0.07q + 12$. Entonces el punto de equilibrio es:
   a) $p = 3$, $q = 100$
   b) $p = 7$, $q = 100$
   c) $p = 2$, $q = 100$
   d) $p = 12$, $q = 1{,}000$
   e) $p = 5$, $q = 100$

2. Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 2$$
$$2x + 2y = 4$$

Se obtiene:

a) Solución única $x = 1$, $y = 1$
b) Solución única $x = 2$, $y = 0$
c) No tiene solución
d) No se puede saber
e) Infinidad de soluciones

3. Al resolver el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 2$$
$$2x + 2y = 2$$

Se obtiene:

a) Solución única $x = 1, y = 1$

b) Solución única $x = 1, y = 0$

c) No tiene solución

d) No se puede saber

e) Infinidad de soluciones

4. Un fabricante vende un producto a $ 8.00 por unidad, y vende todo lo que fabrica. Los costos fijos son de $5,000 y los costos variables por unidad de $^{22}/_{9}$ dólares. Determinar la producción *q* y los ingresos totales *I*, en el punto de equilibrio:

a) q = 9,000 , I = 72,000

b) q = 90 , I = 720

c) q = 900 , I = 7,200

d) q = 7,200 , I = 900

e) No existe punto de equilibrio

5. En el problema anterior la cantidad de producción requerida para obtener utilidades de $10,000 es:

a) 900

b) 9000

c) 270

d) 2,700

e) 27,000

6. Al resolver el sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas:

$$3x_1 + 2x_2 = 7$$

$$4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 = -4$$

Se obtiene:

a) No tiene solución.

b) No se puede saber.

c) Infinidad de soluciones.

d) Solución única con $x_1 = 2$.

e) Solución única con $x_1 = 1$.

7. Un fabricante está en equilibrio (no obtiene ni pérdidas ni utilidades) con un volumen de ventas de $ 200,000.00. Los costos fijos son de $ 40,000.00 y cada unidad se vende en $ 5.00, entonces el costo variable por unidad es:

a) $ 2

b) $ 4

c) $ 6

d) $ 20

e) $ 40

8. Una compañía fabrica calculadoras y tiene dos plantas, ubicadas en el D.F. y en Guadalajara. En la planta D.F., los costos fijos son de $70,000 al mes y el costo de fabricar cada calculadora es $75.00. En la planta Guadalajara, los costos fijos son de $88,000 mensuales y se requieren $60.00 para fabricar cada unidad. En el siguiente mes, la compañía debe fabricar 1,500 calculadoras. ¿Cuántas deben fabricarse en cada planta para que sean iguales los costos totales? (Plantear q_1 = Número

de calculadoras en D.F. y q_2 = Número de calculadoras en Guadalajara).

a) $q_1 = 600$, $q_2=900$

b) $q_1 = 900$, $q_2=600$

c) $q_1 = 500$, $q_2=1000$

d) $q_1 = 1000$, $q_2=500$

e) $q_1 = 800$, $q_2=700$

9. Una compañía paga a sus vendedores con base en cierto porcentaje de los primeros $100,000 de ventas, más otro porcentaje sobre el excedente de los $100,000 de ventas. Si un vendedor ganó $8,500 en ventas de $175,000 y otro vendedor, $14,800 en ventas de $280,000. Entonces los dos porcentajes X_1 =Porcentaje de los primeros $100,000 y X_2=Porcentaje sobre excedente de $100,000 están entre los valores:

a) $5 \leq X_1 \leq 7$, $5 \leq X_2 \leq 7$

b) $2 \leq X_1 \leq 3$, $3 \leq X_2 \leq 5$

c) $3.5 \leq X_1 \leq 4.5$, $3 \leq X_2 \leq 5$

d) $2 \leq X_1 \leq 3$, $5 \leq X_2 \leq 7$

e) $3.5 \leq X_1 \leq 4.5$, $5 \leq X_2 \leq 7$

10. El precio promedio de compra de dos acciones en el último año, así como la ganancia estimada para el siguiente año (momento de venta) son:

Emisora	*Precio Compra*	*Ganancia estimada*
A	$15	$2.5
B	$50	$12.5

La empresa *B* es más riesgosa, así que se decide destinar 60% de nuestro dinero para *A* y 40% para *B.* ¿Cuántas acciones de *A* y *B* deben comprarse para tener ganancias por $130,000?

Si X_1 = # acciones de *A* y X_2 = # acciones de *B*., entonces X_1 y X_2 están entre:

a) $20{,}000 \leq X_1 \leq 22{,}000$, $2{,}300 \leq X_2 \leq 3{,}900$
b) $20{,}000 \leq X_1 \leq 22{,}000$, $4{,}000 \leq X_2 \leq 5{,}000$
c) $25{,}000 \leq X_1 \leq 27{,}000$, $2{,}000 \leq X_2 \leq 4{,}000$
d) $25{,}000 \leq X_1 \leq 27{,}000$, $4{,}000 \leq X_2 \leq 5{,}000$
e) $25{,}000 \leq X_1 \leq 27{,}000$, $5{,}100 \leq X_2 \leq 5{,}400$

MESOGRAFÍA

(**Nota**: Todos los enlaces, consultados o recuperados, funcionan al 04/06/12. De igual manera todas las imágenes o elementos similares son creación del autor, a menos que se indique lo contrario.)

Bibliografía sugerida

Autor	Capítulo	Páginas
Haeussler y Paul (1997)	3. Funciones y Gráficas	83-121
	4. Rectas, Parábolas y Sistemas	124-175
	5. Función Exponencial y Logarítmica	179-218
Hoffman y Bradley (1995)	1. Funciones, Gráficas y Límites	1-79
Leithold (1982)	1. Números Reales, Introducción a la Geometría Analítica y Funciones	2-74
Leithold (1988)	1. Números Reales, Gráficas y Funciones.	3-55
Swokowsky (1983)	3. Funciones	100-156
	4. Funciones Polinomiales	159-206
	5. Funciones Exponenciales y Logarítmicas	209-245

Bibliografía básica

Haeussler Jr. Ernest; Paul, Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Swokowsky, Earl W. (1983). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica.

Bibliografía complementaria

Ayres Frank. (2010). *Cálculo.* (5ª ed.) México: McGraw-Hill.

Oteyza, Elena, de. (2006). *Conocimientos fundamentales de matemáticas, Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación.

Krantz, Steven. (2006). *Cálculo*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Larson, Ron. (2010). *Cálculo.* (9ª ed.) México: McGraw-Hill (2 vols.)

Purcell Edwin. (2007). *Cálculo*. (9ª ed.) México: Pearson Educación.

Stewart, James. (2006). *Cálculo diferencial e integral.* (2ª ed.) México: Cengage Learning.

Sitios de Internet

Sitio	Descripción
http://office.microsoft.com/es-es/excel-help/CH006252829.aspx	Microsoft Excel, Funciones Matemáticas
http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Funciones_tipos.html	Profesores en línea: Tipos de Función
http://thales.cica.es/cadiz2/ecoweb/ed0118/funcionesmatematicas.htm	Suárez Pindado, Manuel. (2004). "Funciones matemáticas" en *Funciones: una visión del pasado y del futuro* (actualizado el 14/06/04)
http://matematicas1bto-ciencias.blogspot.mx/2008/05/clculo-grfico-del-dominio-y-recorrido.html	IES Bajo Guadalquivir: Matemáticas I. Características de las Funciones: Concepto; Formas de Expresión; Características [blog] (2008)

UNIDAD 2

LÍMITES

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá el concepto, propiedades y aplicaciones de los límites.

INTRODUCCIÓN

En la presente unidad se muestra el concepto de “Límite” aplicado a todo tipo de funciones; así como sus propiedades y por consiguiente la definición en la cual se establece si las funciones tienen o no “Límite”. Finalmente se muestran las diferentes metodologías para resolver los “Límites” de diferentes tipos de funciones.

LO QUE SÉ

Explica con tus propias palabras, de preferencia, lo que son los Límites de una función y cuál sería su utilidad.

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

2.1. Límite de una función

2.2. Propiedades de los límites

2.3. Límites al infinito

2.4. Propiedades de los límites al infinito

2.5. Aplicaciones de los límites

2.1. Límite de una función

Sea f(*x*) una función que está definida en todos los valores cercanos a (a), con la excepción de sí mismo. Se dice que L es el límite de f(*x*) cuando (*x*) tiende a (a), si la diferencia entre f(*x*) y (L) puede hacerse tan pequeña como se desee, con sólo restringir (*x*) a estar lo suficientemente cerca de (a).

Quedando entonces representado como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ejemplos

1. Considerando la función (f) definida por la ecuación:

$$\boxed{f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}}$$

**Solución:*

(f) está definida para todos los valores de (x) excepto cuando x = 1. Además, si x→1, el numerador y el denominador pueden ser divididos entre (x – 1) para obtener:

$$\boxed{f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad x \to 1}$$

Como se muestra a continuación: x toma los valores, 0, 0.25, 0.50, 0.75. 0.9, 0.99, 0.999 y así sucesivamente.

Entonces (*x*) toma valores cada vez más cercanos a 1, pero (*x*) nunca toma el valor de 1, en otras palabras, la variable (*x*) se aproxima por la izquierda a 1 a través de valores que son números menores muy cercanos a éste.

Ahora si analizamos a la variable (*x*) cuando se aproxima por el lado derecho a 1, a través de valores mayores que éste, esto hace, por ejemplo, que (*x*) tome valores de 2, 1.75, 1.50, 1.25, 1.10, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, y así sucesivamente, pero nunca toma el valor de 1.

*Acercándonos a 1 por la izquierda se tiene lo siguiente:

x	0	0.25	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	0.9999
f(x) = 2x + 3	3	3.5	4	4.5	4.8	4.98	4.998	4.9998

Límite por la izquierda

Pero **x ≠ 1**

*Acercándonos a 1 por la derecha se tiene lo siguiente y siempre **x ≠ 1**:

X	2	1.75	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.0001
f (x) = 2x + 3	7	6.5	6	5.5	5.2	5.02	5.002	5.0002

Límite por la derecha

Se observa en ambas tablas a medida que (x) se aproxima cada vez más a 1, f(x) también se aproxima cada vez a 5 y entre más cerca esté (x) de 1, más cerca f (x) a 5, en consecuencia, cuando (x) se aproxima a 1 por la izquierda o por la derecha, f(x)=2x+3 se acerca a 5.

*Se indica que el límite de f(x) cuando (x) tiende a 1 es igual a 5, esto se representa así:

$$\lim_{x \to 1} (2x+3)=5$$

Finalmente se puede concluir que el límite de la función (f) es:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} = 5$$

Del ejemplo anterior se puede concluir: f(x) no está definida en x = 1, sin embargo, lím f(x) existe cuando x→ 1. Y este es igual a 5.

Encontrar el límite de la función definida por:

$$\boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}}$$

**Solución*: Sustituyendo el valor de tres, donde se encuentra la (x), se tiene:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(3)^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} \quad \textit{operación no determinada}$$

*Conclusión: f(x) no está definida en x = 3, sin embargo, $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe porque la podemos escribir como:

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} x + 3 = 3 + 3 = 6$$

Una función f(*x*) es continua en x = a si la función f(a) como el $\lim_{x \to a} f(x)$ existen y son iguales.

2.2. Propiedades de los límites

Las propiedades básicas de las operaciones con límites de una función: Sean (f) y (g) dos funciones tales que lím f(x) = L y lím g(x) = M, si los dos límites existen;

x → a x → a

Entonces:

1 $\lim_{x \to a} k[f(x)] = k \lim_{x \to a} f(x) = kL$	2 $\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$
3 $\lim_{x \to a} f(x) \bullet g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \bullet \lim_{x \to a} g(x) = L \bullet M$	4 $\lim_{x \to a} f(x) \div g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \div \lim_{x \to a} g(x) = L \div M, M \neq 0$
5 $\lim_{x \to a} x^n = a^n$	6 $\lim_{x \to a} k = k$
7. Si m, b, y c son tres constantes, entonces $\lim_{x \to c} (mx + b) = mc + b$	

De acuerdo con el análisis de las propiedades de límites se podrá observar que el valor límite de una función se puede obtener con la simple sustitución del valor de límite de (x) en la función dada. Este método de sustitución siempre nos lleva a una respuesta correcta, si la función es continua en el límite que se está evaluando.

Todos los polinomios son funciones continuas y cualquier función racional es continua, excepto en los puntos en que el denominador se hace cero, dando como resultado del cálculo de un límite que la operación no esté determinada y se concluye que el límite no existe (0 / 0 ó una constante divida entre cero d /0).

Ejemplos

1. calcular el límite de la siguiente función, cuando $x \to -1$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2}$$

Haciendo $x =$ -1 en la fórmula válida para f (x), tenemos

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3(-1) + 2}{1 - (-1)^2} = \frac{0}{0} \quad \textit{la operación no esta determinada}$$

Factorizando

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{x+2}{1-x} = \frac{-1+2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\textit{entonces}: \quad \lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{2}$$

2. Determine

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Racionalizando:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

3. Determine
$$\lim_{x \to 2} \sqrt{5x^3 - 15}$$

Racionalizando:

$$\lim_{x \to 2} \left(5x^3 - 15\right)^{1/2} = \left[\lim_{x \to 2} \left(5x^3 - 15\right)\right]^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} = 5$$

2.3. Límites al infinito

En ocasiones existen límites que su solución no se puede obtener directamente y en este caso la utilización de la metodología de límites al infinito es una técnica que consiste en transcribir el límite en términos de 1/x en lugar del término x, de esta forma se logra que el término 1/x cuando x tiende al infinito, el límite tiende a cero.

Una propiedad de un límite al infinito es la siguiente:

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$$

Determine $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x-1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

2.4. Propiedades de los límites al infinito

A continuación se mencionarán las propiedades de los límites al infinito:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si se tienen dos polinomios

$g(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x^1$ y $h(x)=c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + c_1 x^1$,

entonces el siguiente límite cuando x tiende a infinito es:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{h(x)}$$

Una importante propiedad es que los polinomios en el límite se reducen al término con un mayor exponente, es decir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{c_n x^n} = \frac{a}{c}$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 4x^2 - 4x^1 + 2}{2x^3 + 6x^2 + 4x^1 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3}{2x^3} = \frac{4}{2} = 2$$

2.5. Aplicaciones de los límites

Funciones continuas: Se define función continua como aquella cuya gráfica es una curva continua, la cual no tiene huecos (vacíos) ni está segmentada.

Para poder resolver problemas de la vida real muchas veces se acude a funciones matemáticas, las cuales deben ser capaces de dar un valor para la función de cada uno de los valores de x, y a lo largo de su trayecto.

Se dice que una función es continua para un valor en *x* = a, si cumple con:

- f(*a*) está definida
- $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe*
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Para que en un límite exista la función debe aproximarse al mismo punto x = a por ambos lados.

Ejemplos

1. La función f(x) =x^2 ¿es continua en x = 3?

a. $f(x) = x^2$ está definida

b. $\lim_{x \to 3} x^2 = (3)(3) = 9$

c. Valor funcional

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

$$\lim_{x \to 3} x^2 = f(3)$$

$$9 = 9$$

Por lo tanto: Es continua para x = 3

2. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ¿es continua en x = 3?

a. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ está definida

b. $\lim_{x \to 3} \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$

c. $\lim_{x \to 3} \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4$

d. $\lim_{x \to 3} f(x) = f(a)$

4 = 4

Por lo tanto: Es continua en x = 3

Función discontinua: Cuando no se cumplen las condiciones de continuidad de una función, a ésta se le llama discontinua.

Ejemplos

1. $f(x) = \frac{5}{x-1}$ ¿es discontinua para x = 1?

   a. $f(x) = \frac{5}{x-1}$ es discontinua para x = 1

   b. $\lim\limits_{x \to 1} = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0} =$ *no existe el limite*

   c. $f(x) = \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0} =$ la operación no está definida

Por lo tanto: La función es discontinua en x = 1.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ ¿es continua en x = 0?

   a. $f(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en x = 0?

   b. $\lim\limits_{x \to 0} = \frac{1}{x}$ *no existe el limite*

   c. $\lim\limits_{x \to 0} = \frac{1}{x}$ no esta definida la operación

Por tanto: La función es discontinua en $x = 0$, pero la función es continua en $x \neq 0$.

De acuerdo con lo visto hasta aquí, se puede afirmar que:

Una función f(x) es continua en un intervalo abierto $a < x < b$, si es continua en cada x del intervalo. En un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ si $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $a < x < b$ y $f(x)$ se aproxima a $f(a)$ a medida que (x) se acerca al valor de (a) por la derecha (para $a < x$) y $f(x)$ se aproxima a $f(b)$ a medida que (x) tiende al valor (b) por la izquierda (para $x < b$).

RESUMEN

Esta unidad abarca cuatro bloques consistentes en el siguiente orden de estudio: En primera instancia el alumno comprenderá y analizará el concepto de "Límite de una Función"; si este existe o no dentro de un intervalo definido en una determinada función a estudiar; inmediatamente después el estudiante podrá aplicar las distintas propiedades que tienen los "Límites" de distintas funciones cuando estas tienden a un valor determinado a (ejemplo: a = 2, -1, ¼, p, etc.); posteriormente el alumno comprenderá y analizará las diferentes propiedades de los "Límites" de distintas funciones cuando estas tienden al infinito.

Finalmente el alumno podrá aplicar los conocimientos adquiridos en "Problemas Diversos" del campo profesional utilizando como herramienta de trabajo a los "Límites".

GLOSARIO

Función

En muchos problemas intervienen dos variables una de las cuales puede expresarse en términos de la otra. Asignando el valor a una de ellas, puede calcularse el valor de la otra. Esta relación de dependencia entre dos variables se expresa por la palabra función. Esto es: $y = f(x)$.

Límite

Se dice que una constante *a* es el "Límite" de una variable *x* cuando esta se aproxima a aquella, de modo que la diferencia $x – a$, en valor absoluto puede hacerse tan pequeña como se quiera. Esto es: $\lim f(x) = a$ cuando $x \to a$.

Propiedades de los Límites

Al hallar los "Límites" de funciones, esto se hace con frecuencia haciendo uso de ciertas propiedades que son una consecuencia inmediata de la definición.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Un profesor aplicó el primer día de clase una encuesta a sus alumnos de primer ingreso. Días después le comentó al grupo que 53% de ellos no tenía coche y que el 62% trabajaba. Les dijo además que le sorprendía el hecho de que 35% no trabajaba pero tenía coche.

Estructura una tabla donde puedas incorporar estos datos. Complétala y señala cuál es el porcentaje de estudiantes que no trabaja y no tiene coche.

ACTIVIDAD 2

Realiza la lectura del documento **Operacionalización de variables**, de Betancur López, Sonia Inés, publicado por la revista *Hacia la promoción de la salud, No 5*, Departamento de Salud Pública, Universidad de Caldas, Colombia.

Elabora un cuadro sinóptico sobre las escalas de medición.

ACTIVIDAD 3

Aplicando la definición del "Límite de una Función" demuestra los Límites de las funciones que a continuación se mencionan:

1. $f(x) = (4x - 1)$; entonces el lim $f(x) = 11$ cuando $x \to 3$

2. $f(x) = x^2$; entonces el lim $f(x) = 4$ cuando $x \to 2$

3. $f(x) = 8/(t - 3)$; entonces el lim $f(x) = 2$ cuando $x \to 7$

4. $f(x) = (2x + 1)$; entonces el lim $f(x) = 9$ cuando $x \to 4$

5. $f(x) = (4x + 1)$; entonces el lim $f(x) = -3$ cuando $x \to -1$

6. $f(x) = \sqrt{}(x + 5)$; entonces el lim $f(x) = 3$ cuando $x \to 4$

7. $f(x) = 1/\sqrt{}(5 - x)$; entonces el lim $f(x) = (1/2)$ cuando $x \to 1$

8. $f(x) = (\sqrt{x} - 1)/(x - 1)$; entonces el lim $f(x) = (1/2)$ cuando $x \to 1$

9. $f(x) = (x^2 - 3x)$; entonces el lim $f(x) = 10$ cuando $x \to 5$

10. $f(x) = (3 + 2x - x^2)$; entonces el lim $f(x) = 0$ cuando $x \to -1$

ACTIVIDAD 4

Aplicando la definición del "Límite de una Función" demuestra los Límites de las siguientes funciones:

1. $f(x) = (1 + 3x)$; entonces el lim $f(x) = -5$ cuando $x \to -2$.

2. $f(x) = x^2$; entonces el lim $f(x) = 9$ cuando $x \to 3$.

3. $f(x) = (7x - 2)$; entonces el lim $f(x) = 11$ cuando $x \to -2$.

4. $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 3)$; entonces el lim $f(x) = 6$ cuando $x \to 3$.

5. $f(x) = (4x + 1)$; entonces el lim $f(x) = -7$ cuando $x \to -2$.

6. $f(x) = \sqrt{}(x + 5)$; entonces el lim $f(x) = 4$ cuando $x \to 11$.

7. $f(x) = 2/\sqrt{}(5 - x)$; entonces el lim $f(x) = 1$ cuando $x \to 1$.

8. $f(x) = (\sqrt{x} - 2)/(x - 4)$; entonces el lim $f(x) = (1/4)$ cuando $x \to 4$.

9. $f(x) = (x^2 - 3x)$; entonces el lim $f(x) = 4$ cuando $x \to 4$.

10. $f(x) = (3 + 2x - x^2)$; entonces el lim $f(x) = 4$ cuando $x \to 1$

ACTIVIDAD 5

Aplicando las “Propiedades de los Límites” demuestra los Límites de las siguientes Funciones:

1. $f(x) = (4x - 1)$; entonces el lim $f(x) = 11$ cuando $x \to 3$.

2. $f(x) = x^2$; entonces el lim $f(x) = 4$ cuando $x \to 2$.

3. $f(t) = 8/(t - 3)$; entonces el lim $f(t) = 2$ cuando $x \to 7$.

4. $f(x) = (2x + 1)$; entonces el lim $f(x) = 9$ cuando $x \to 4$.

5. $f(x) = (4x + 1)$; entonces el lim $f(x) = -3$ cuando $x \to -1$.

6. $f(x) = \sqrt{(x + 5)}$; entonces el lim $f(x) = 3$ cuando $x \to 4$.

7. $f(x) = 1/\sqrt{(5 - x)}$; entonces el lim $f(x) = (1/2)$ cuando $x \to 1$.

8. $f(x) = (\sqrt{x} - 1)/(x - 1)$; entonces el lim $f(x) = (1/2)$ cuando $x \to 1$.

9. $f(x) = (x^2 - 3x)$; entonces el lim $f(x) = 10$ cuando $x \to 5$.

10. $f(x) = (3 + 2x - x^2)$; entonces el lim $f(x) = 0$ cuando $x \to -1$.

ACTIVIDAD 6

Aplicando las “Propiedades de los Límites” demuestra los Límites de las siguientes Funciones:

1. $f(x) = (1 + 3x)$; entonces el lim $f(x) = -5$ cuando $x \to -2$.

2. $f(x) = x^2$; entonces el lim $f(x) = 9$ cuando $x \to 3$.

3. $f(x) = (7x – 2)$; entonces el lim $f(x) = 11$ cuando $x \to -2$.

4. $f(x) = (x^2 - 1)/(x – 3)$; entonces el lim $f(x) = 6$ cuando $x \to 3$.

5. $f(x) = (4x + 1)$; entonces el lim $f(x) = -7$ cuando $x \to -2$.

6. $f(x) = \sqrt{(x + 5)}$; entonces el lim $f(x) = 4$ cuando $x \to 11$.

7. $f(x) = 2/\sqrt{(5 – x)}$; entonces el lim $f(x) = 1$ cuando $x \to 1$.

8. $f(x) = (\sqrt{x} - 2)/(x – 4)$; entonces el lim $f(x) = (1/4)$ cuando $x \to 4$.

9. $f(x) = (x^2 – 3x)$; entonces el lim $f(x) = 4$ cuando $x \to 4$.

10. $f(x) = (3 + 2x – x^2)$; entonces el lim $f(x) = 4$ cuando $x \to 1$.

ACTIVIDAD 7

Aplicando los “Límites al Infinito” demuestra los Límites de las siguientes Funciones:

1. $f(x) = 2x^2/(x^2 + 1)$; entonces el lim $f(x) = 2$ cuando $x \to -\infty$.

2. $f(x) = (4x – 3)/(2x + 5)$; entonces el lim $f(x) = 2$ cuando $x \to +\infty$.

3. $f(x) = (2x^2 – x + 5)/(4x^3 – 1)$; entonces el lim $f(x) = 0$ cuando $x \to -\infty$.

4. $f(x) = (3x + 4)/\sqrt{(2x^2 – 5)}$; entonces el $\lim f(x) = 3/\sqrt{2}$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

5. $f(x) = (3x + 4)/\sqrt{(2x^2 – 5)}$; entonces el $\lim f(x) = -3/\sqrt{2}$ cuando $x \rightarrow - \infty$.

6. $f(x) = x^2/(x + 1)$; entonces el $\lim f(x) = + \infty$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

7. $f(x) = (2x – x^2)/(3x + 5)$; entonces el $\lim f(x) = + \infty$ cuando $x \rightarrow - \infty$.

8. $f(x) = x/\sqrt{(x^2 + 1)}$; entonces el $\lim f(x) = 1$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

9. $f(x) = 1/x^3$; entonces el $\lim f(x) = 0$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

10. $f(x) = (\sqrt{(x^2 + 1)} - x)$; entonces el $\lim f(x) = 0$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

ACTIVIDAD 8

Aplicando los “Límites al Infinito” demuestra los Límites de las siguientes Funciones:

1. $f(x) = (2x + 7)/(4 – 5x)$; entonces el $\lim f(x) = -(2/5)$ cuando $x \rightarrow - \infty$.

2. $f(t) = (2t + 1)/(5t – 2)$; entonces el $\text{Lim } f(t) = (2/5)$ cuando $t \rightarrow + \infty$.

3. $f(x) = (7x^2 – 2x + 1)/(3x^2 + 8x + 5)$; entonces el $\lim f(x) = (7/3)$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

4. $f(x) = (x + 4)/(3x^2 – 5)$; entonces el $\lim f(x) = 0$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

5. $f(x) = (2x^2 – 3x)/(x + 1)$; entonces el $\lim f(x) = + \infty$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

6. $f(x) = (4x^3 + 2x^2 – 5)/(8x^3 + x + 2)$; entonces el $\lim f(x) = (1/2)$ cuando $x \rightarrow - \infty$.

7. $f(x) = (2x^3 – 4)/(5x + 3)$; entonces el $\lim f(x) = + \infty$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

8. $f(x) = 3x + (1/x2)$; entonces el $\lim f(x) = - \infty$ cuando $x \rightarrow - \infty$.

9. $f(x) = (x^2 – 3x)$; entonces el $\lim f(x) = - \infty$ cuando $x \rightarrow - \infty$.

10. $f(x) = (3 + 2x – x^2)$; entonces el $\lim f(x) = + \infty$ cuando $x \rightarrow + \infty$.

ACTIVIDAD 9

Aplicando las "Propiedades de los Límites al Infinito" demuestra los Límites de las siguientes Funciones:

1. $f(x) = 2x^2/(x^2 + 1)$; entonces el lim $f(x) = 2$ cuando $x \to -\infty$.

2. $f(x) = (4x – 3)/(2x + 5)$; entonces el lim $f(x) = 2$ cuando $x \to +\infty$.

3. $f(x) = (2x^2 – x + 5)/(4x^3 – 1)$; entonces el lim $f(x) = 0$ cuando $x \to -\infty$.

4. $f(x) = (3x + 4)/\sqrt{(2x^2 – 5)}$; entonces el lim $f(x) = 3/\sqrt{2}$ cuando $x \to +\infty$.

5. $f(x) = (3x + 4)/\sqrt{(2x^2 – 5)}$; entonces el lim $f(x) = -3/\sqrt{2}$ cuando $x \to -\infty$.

6. $f(x) = x^2/(x + 1)$; entonces el lim $f(x) = +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

7. $f(x) = (2x – x^2)/(3x + 5)$; entonces el lim $f(x) = +\infty$ cuando $x \to -\infty$.

8. $f(x) = x/\sqrt{(x^2 + 1)}$; entonces el lim $f(x) = 1$ cuando $x \to +\infty$.

9. $f(x) = 1/x^3$; entonces el lim $f(x) = 0$ cuando $x \to +\infty$.

10. $f(x) = (\sqrt{(x^2 + 1)} - x)$; entonces el lim $f(x) = 0$ cuando $x \to +\infty$.

ACTIVIDAD 10

Aplicando las "Propiedades de los Límites al Infinito" demuestra los Límites de las siguientes Funciones:

1. $f(x) = (2x + 7)/(4 - 5x)$; entonces el lim $f(x) = -(2/5)$ cuando $x \to -\infty$.

2. $f(t) = (2t + 1)/(5t - 2)$; entonces el lim $f(t) = (2/5)$ cuando $t \to +\infty$.

3. $f(x) = (7x^2 - 2x + 1)/(3x^2 + 8x + 5)$; entonces el lim $f(x) = (7/3)$ cuando $x \to +\infty$.

4. $f(x) = (x + 4)/(3x^2 - 5)$; entonces el lim $f(x) = 0$ cuando $x \to +\infty$.

5. $f(x) = (2x^2 - 3x)/(x + 1)$; entonces el lim $f(x) = +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

6. $f(x) = (4x^3 + 2x^2 - 5)/(8x^3 + x + 2)$; entonces el lim $f(x) = (1/2)$ cuando $x \to -\infty$.

7. $f(x) = (2x^3 - 4)/(5x + 3)$; entonces el lim $f(x) = +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

8. $f(x) = 3x + (1/x2)$; entonces el lim $f(x) = -\infty$ cuando $x \to -\infty$.

9. $f(x) = (x^2 - 3x)$; entonces el lim $f(x) = -\infty$ cuando $x \to -\infty$.

10. $f(x) = (3 + 2x - x^2)$; entonces el lim $f(x) = +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

ACTIVIDAD 11

Dadas las siguientes funciones definidas determina todos los valores de x para los cuales es continua y en qué punto es discontinua.

1. $f(x) = (3x^2 - 8x + 1)$.

2. $f(t) = x^2(x + 3)$.

3. $f(x) = (x)/(x + 3)$.

4. $f(x) = (x + 1)/(x^2 - 1)$.

5. $f(x) = (x – 2)/(x^2 + 2x - 8)$.

6. $f(x) = (x^3 + 7)/(x^2 - 4)$.

7. $f(x) = \sqrt{}(x^2 – 16)$.

8. $f(x) = \sqrt{}(16 – x^2)$.

9. $f(x) = (x^2 – 3x)$.

10. $f(x) = (3 + 2x – x^2)$.

ACTIVIDAD 12

Aplicando la definición del “Límite de una Función” demuestra los Límites de las siguientes funciones:

1. Lim $x^2 = a^2$ cuando $x \to -a$ si a es cualquier número positivo.
2. Lim $x^2 = a^2$ cuando $x \to a$ si a es cualquier número negativo.
3. Lim $\sqrt{x} = \sqrt{a}$ cuando $x \to a$ si a es cualquier número positivo.
4. Lim $x^3 = a^3$; cuando $x \to a$ si a es cualquier número positivo.
5. Lim $x^{(1/3)} = a^{(1/3)}$; cuando $x \to a$. Nota considere: $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$.

ACTIVIDAD 13

Aplicando las “Propiedades de los Límites” demuestra los Límites de las siguientes Funciones:

1. $f(x) = (x^3 – 27)/(x – 3)$; entonces el lim $f(x) = 27$ cuando $x \to 3$.

2. $f(s) = (3s^2 – 8s – 16)/(2s^2 – 9s –+4)$; entonces el lim $f(s) = (16/7)$ cuando $s \to 4$.

3. $f(x) = (3 - \sqrt{x})/(9 – x)$; entonces el lim $f(x) = (1/6)$ cuando $x \to 9$.

4. $f(x) = (2x^2 - x - 3)/(x^3 + 2x^2 + 6x + 5)$; entonces el lim $f(x) = -1$ cuando $x \to -1$.

5. Si $f(x) = x^2 + 5x - 3$; demuestre que el lim $f(x) = f(2)$ cuando $x \to 2$.

6. $f(x) = (\sqrt{(x + 2)} - \sqrt{2})/x$; entonces el lim $f(x) = (1/4)\sqrt{2}$ cuando $x \to 0$.

7. $f(y) = (y^3 + 8)/(y + 2)$; entonces el lím $f(y) = 12$ cuando $y \to -2$.

8. $f(y) = (y^3 - 2y^2 + 3y - 4)$; entonces el lim $f(y) = -10$ cuando $y \to -1$.

9. $f(x) = (5x + 2)$; entonces el lim $f(x) = -18$ cuando $x \to -4$.

10. $f(x) = (3x - 7)$; entonces el lim $f(x) = 8$ cuando $x \to 5$.

ACTIVIDAD 14

Aplicando los “Límites al Infinito” demuestra los Límites de las siguientes Funciones:

1. $f(x) = (\sqrt{(x^2 + 4)})/(x + 4)$; entonces el lim $f(x) = 1$ cuando $x \to +\infty$.

2. $f(w) = \sqrt{(w^2 - 2w + 3)}/(w + 5)$; entonces el lim $f(w) = -1$ cuando $w \to -\infty$.

3. $f(x) = (7x^2 - 2x + 1)/(3x^2 + 8x + 5)$; entonces el lim $f(x) = (7/3)$ cuando $x \to +\infty$.

4. $f(x) = (\sqrt{(3x^2 + x)} - 2x)$; entonces el lim $f(x) = -\infty$ cuando $x \to +\infty$.

5. $f(x) = (x^3 + x)^{(1/3)} - (x^3 + 1)^{(1/3)}$; entonces el lim $f(x) = 0$ cuando $x \to -\infty$.

Elabora un cuadro sinóptico sobre las escalas de medición.

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

Contesta el siguiente cuestionario.

1. Define el concepto de límite.
2. Define el concepto de límite por la izquierda.
3. Define el concepto de límite por la derecha.
4. Da un ejemplo de función cuadrática y calcula su límite.
5. Da un ejemplo de un límite por la izquierda.
6. Da un ejemplo de un límite por la derecha.
7. Define una función e indica si es continua.
8. Define una función e indica si su rango es continuo.
9. Define las propiedades de la continuidad.
10. Define en qué casos una función no es continua atizando sus propiedades.

LO QUE APRENDÍ

Determina el “Valor Límite” de las siguientes funciones definidas:

1. Si $f(x) = x^4 - x^2 + 1$, demostrar que $f(-x) = f(x)$.

2. Si $f(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$, demostrar que f (x + 2 ☐) = f(x).

3. Aplicando las “Propiedades de los “Límites” compruebe que: $f(x) = (x^2 + 2x - 3)/(x - 5)$; entonces el lim $f(x) = 3/5$ cuando $x \to 0$. Considérese la Base usual del “Espacio Euclidiano” de Dimensión en R^3:

4. Aplicando las “Propiedades de los “Límites” compruebe que: $f(x) = (x^2 + 5x - 6)/(x - 1)$; entonces el lim $f(x) = 7$ cuando $x \to 1$.

5. Aplicando las “Propiedades de los “Límites” compruebe que: $f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{a})/(x - a)$; entonces el lim $f(x) = 1/2\sqrt{a}$ cuando $x \to a$.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Resuelve los siguientes ejercicios

1. Encontrar: límite de $f(x) = (x^3 - 27) / (x – 3)$ cuando $x \rightarrow 3$.
   - a) 3
   - b) 23
   - c) 32
   - d) 12
   - e) 27

2. Encontrar: límite de $X / (- 7X + 1)$ cuando $X \rightarrow 4$.
   - a) 4/7
   - b) 7
   - c) –4/27
   - d) 27/4
   - e) –7

3. Encuentra el límite de la función definida por la expresión $f(x) = (2x^2 + x - 3) / (x -1)$ cuando (x) tiende a 1.
   - a) 4
   - b) 5
   - c) 4.5
   - d) 6
   - e) 5.5

4. Encuentra el límite de la función definida por la expresión f(*x*) = $(2x^2 + x - 3)/(x-2)$ cuando (*x*) tiende a 1.

   a) -2

   b) -1

   c) 0

   d) 1

   e) 2

5. Determina el límite de la función f(*x*) = $x^3 - 3x + 4$ cuando (x) tiende a infinito.

   a) 0

   b) 1

   c) -3

   d) 4

   e) infinito (∞)

6. Calcula el límite de la función f(*x*) = $(x^3 - 6x^2 + 9x)/(x + 5)$ cuando (x) tiende a infinito

   a) 0

   b) 1

   c) -6

   d) 9

   e) infinito (∞)

7. Calcula el límite de la función f(*x*) = $(x+6)/(5x^3 - 7x^2 + 9x)$ cuando (x) tiende a infinito:

   a) -7

   b) 0

c) 1

d) 5

e) infinito (∞)

8. Calcula el límite de la función f(*x*) = (2x)/(x^2 - 1) cuando (x) tiende a infinito.

a) 2

b) 1

c) cero (0)

d) infinito (∞)

e) -1

9. Calcula el límite de f(x)= (5t^2 + 7)/ t cuando tiende a 2.

a) 13

b) 13.5

c) 14

d) 12.5

e) -13

10. Encuentra la solución de la función (x+3)(x+2)/(x+2) cuando (x) tiende a -2.

a) 2

b) 1

c) -1

d) 0

e) -2

MESOGRAFÍA

Bibliografía sugerida

Autor	Capítulo	Páginas
Granville (1985)	2. Variables, Funciones y Límites.	11-22
Haeussler y Paul (1997)	11. Límites y Continuidad.	517-559
Laurence y Bradley (1995)	1. Funciones, Gráficas y Límites.	69-74
Leithold (1982)	2. Límites y Continuidad.	79-169
Leithold. (1988)	2. La Derivada.	60-84

Bibliografía básica

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Bibliografía complementaria

Ayres Frank. (2010). *Cálculo.* (5ª ed.) México: McGraw-Hill.

Oteyza, Elena, de. (2006). *Conocimientos fundamentales de matemáticas, Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación.

Krantz, Steven. (2006). *Cálculo*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Larson, Ron. (2010). *Cálculo.* (9ª ed.) México: McGraw-Hill (2 vols.)

Purcell Edwin. (2007). *Cálculo*. (9ª ed.) México: Pearson Educación.

Stewart, James. (2006). *Cálculo diferencial e integral.* (2ª ed.) México: Cengage Learning.

Sitios de Internet

Sitio	Descripción
http://www.vitutor.com/fun/3/a_7.html	Límites (2010)
http://www.terra.es/personal2/jpb00000/tlimitescalculo.htm	Límites de Funciones. Cálculo
http://www.slideshare.net/videoconferencias/calculo-i-limites-y-sus-propiedades	Diana Torres (2009). Cálculo I: Límites y sus Propiedades.
http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=351	Vélez Álvarez, Carlos. "Límites y sus Funciones", Cálculo

UNIDAD 3

DERIVADAS

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá el concepto, las propiedades, las aplicaciones y la interpretación de la derivada.

INTRODUCCIÓN

En la presente unidad se muestra el concepto de “Derivada” así como sus propiedades. De igual manera se muestra el “Método de los Cuatro Pasos” que es la base para la obtención de las fórmulas de las diferentes derivadas. Y por último la aplicación de “Máximos, Mínimos y Puntos de Inflexión” para la solución de “Problemas Diversos” que permiten optimizar los recursos de todo tipo.

LO QUE SÉ

Define qué es una derivada y cómo puede aplicarse en el campo de la Informática y de las áreas contables y administrativas

TEMARIO DETALLADO

(14 horas)

3.1. Derivada de una función

3.2. Proceso de cuatro pasos para determinar una derivada

3.3. Uso e interpretación de la derivada

3.4. Reglas para determinar la derivada de una función

3.5. Segunda derivada

3.6. Máximos y mínimos

3.7. Aplicaciones de la derivada

3.1. Derivada de una función

Interpretación geométrica de la derivada: El cálculo diferencial estudia el cambio que le ocurre a una variable cuando existen variaciones en otra variable de la cual depende la variable original.

Los investigadores del área económico-administrativa se interesan por las razones de cambio promedio e instantáneo y están particularmente interesados en las tasas marginales de cambio, tales como: el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

Para llegar a un concepto claro de derivada, esta sección define lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

Definición de **incremento** de una variable

Sea $y = f(x)$ una función, con x_1 y x_2, un par de valores en el dominio de (f), de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$,

Entonces:

1. El cambio en el valor de x al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de x y se representa por Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$.

2. El cambio en el valor de Y al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de y, se representa por ΔY, donde:

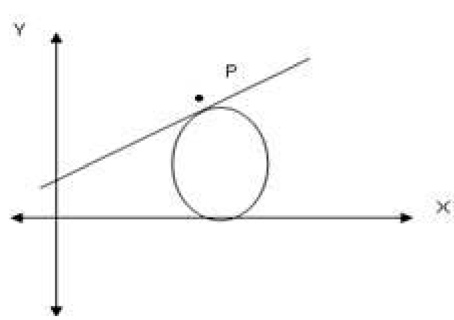
$$\Delta Y = Y_2 - Y_1 = f(X_2) - f(X_1)$$

Tasa de cambio: Para entender el comportamiento geométrico de la derivada, se define la tasa de cambio de una función f(x), entre x y (x + □x), al cociente que a continuación se muestra:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Muchos de los problemas importantes del cálculo dependen de encontrar la recta tangente a una curva dada en un punto específico de la curva. Si la curva es una circunferencia, sabemos de la geometría plana que la recta tangente en un punto **P** de la circunferencia se define como la recta que intersecta a la circunferencia únicamente en el punto **P**. Esta definición no es suficiente para cualquier curva en general.

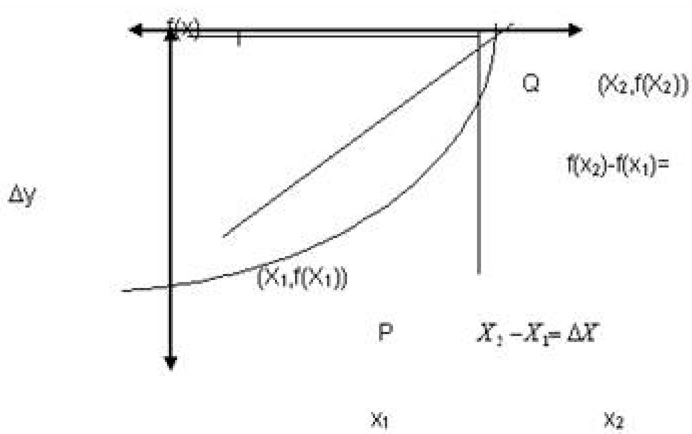
Por ejemplo, en la siguiente figura donde la línea es la recta tangente a la curva en el punto **P**, la cual intersecta a la curva en el punto P.



- Para llegar a una definición adecuada de la recta tangente a la gráfica de la función, se comienza por considerar cómo se definiría la pendiente de la recta tangente en un punto, si conocemos la pendiente de una recta y un punto sobre la misma, la recta está determinada (punto-pendiente).

- Sea la función (*f*) continua en x_1. Se define la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función (*f*) en P (x_1, $f(x_1)$).

Sea Q (x_2, $f(x_2)$) otro punto sobre la gráfica de la función *f*. que representan la "Pendiente de la Recta Tangente" como sigue:



Cualquier recta que pase por dos puntos de una curva se llama secante; por lo tanto, la recta a través de P y Q es una recta secante. En la figura, está a la derecha de P. Sin embargo, Q puede estar a la derecha o a la izquierda de P.

Denotemos la diferencia de las abscisas de Q y P por Δx tal que:

Δ_x puede ser positivo o negativo. La pendiente de la recta secante PQ está definida por:

Ya que $X_2 = X_1 + \Delta x$, podemos escribir la ecuación anterior como:

Ahora el punto P está fijo, si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia P; entonces Q se aproxima a P. Esto es equivalente a establecer que Δx tiende a cero. Como esto sucede, la recta secante gira sobre el punto fijo P.

Si esta recta secante tiene un punto límite, a esta posición límite, común de la recta secante se le define como la recta tangente a la curva en P. Así se querría que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en P sea el límite de Mpq cuando Δx se aproxima a cero, y el límite existe.

Esto conduce al proceso denominado "Método de los Cuatro Pasos":

1. A la función definida se expresa en función de f (x + □x).
2. A la función f(x + □x) – f(x) se le res
3. Después a f(x + □x) – f(x) se divide entre □x.
4. Finalmente: a la resultante de los tres pasos desarrollados se le obtiene el "Límite de f(x) cuando □x → 0".

3.2. Derivada de cuatro pasos para determinar la derivada

La **Pendiente de una recta** tangente en la gráfica de la función f en el punto P (*x*, f(*x*)) está dada por:

$$m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Si el límite existe,

El límite que mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica de Y = f(*x*) en el punto P (*x*, f(*x*)) recibe el nombre especial de derivada de (f) en (*x*).

La derivada de una función (f) con respecto de (*x*) es la función (f)' (que se lee "f prima de *x*"), definida por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Donde el dominio de f' es el conjunto de todas las (*x*) donde existe límite.

Diferenciación: La operación de calcular la derivada de una función se denomina diferenciación.

Si la derivada de una función existe en un punto (a), se dice que (f) es diferenciable en este punto.

Ejemplo

Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto (x_1, y_1)

Si: $f(x) = x^2$, entonces:

$f(x_1) = x_1^2$ y $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2$

Primer paso

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Segundo paso

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - x_1^2}{\Delta x}$$

Tercer paso

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - x_1^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1\Delta x + \Delta x^2{}_1}{\Delta x}$$

Ya que $\Delta x \to 0$ podemos factorizar Dx en el numerador

Cuarto paso

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x_1 - 4)}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x$$

En donde:

$$\boxed{\begin{array}{l} m(x_1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_1 + \Delta x) \\ m\ (x_1) = 2x_1 \end{array}}$$

Nota: Cuando se obtiene como resultado del cálculo de un límite 0 / 0 o constante / 0, se concluye que el límite no existe.

3.3. Uso e interpretación de la derivada

El "Cálculo Diferencial" estudia el cambio que le ocurre a una variable cuando existen variaciones en otra variable de la cual depende la variable original.

Los investigadores de las áreas "Económico-Administrativas" se interesan por las razones de cambio promedio e instantáneo y están particularmente interesados en las tasas marginales de cambio, tales como: el costo marginal, el ingreso marginal, la utilidad marginal, el producto marginal, todos los cuales se miden utilizando matemáticamente la derivada.

Para llegar a un concepto claro de derivada, esta sección define lo que se conoce como cambio o incremento de una variable.

Definición de incremento de una variable

- **Sea $y = f(x)$ una función, con x_1 y x_2, un par de valores en el dominio de (f), de tal forma que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, entonces:**

- El cambio en el valor de ***x*** al pasar de x_1 a x_2, dado por $x_2 - x_1$, se denomina incremento de ***x*** y se representa por Δx, donde $\Delta x = x_2 - x_1$.

♦ El cambio en el valor de Y al pasar de y_1 a y_2, dado por $y_2 - y_1$, se denomina incremento de Y, se representa por ΔY, donde:

$$\Delta \mathbf{Y} = \mathbf{Y_2} - \mathbf{Y_1} = \mathbf{f(X_2)} - \mathbf{f(X_1)}$$

3.4. Reglas para determinar la derivada de una función

No siempre es sencillo utilizar la definición dada anteriormente para calcular la derivada de algunas funciones, lleva tiempo y cuidado; por ello, es necesario conocer reglas que faciliten este procedimiento. Estas reglas forman lo que se denomina el álgebra de derivadas. La notación $\frac{dy}{dx}$ representa un sólo símbolo y no deberá interpretarse como el cociente de las cantidades de *dy* y *dx*, $\frac{dy}{dx}$ indica la derivada d*y* con respecto a (*x*) si Y es una función de la variable independiente (*x*), la derivada también se denota por las siguientes representaciones:

$$\frac{d}{dx}(y), \quad \frac{df}{dx}, \quad y', \quad Dxy, \quad Dxf, \quad \frac{d}{dx}(f).$$

Las principales derivadas algebraicas son las siguientes

1. Derivada de una constante es igual a cero, si: y = c

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

Ejemplos

a. $\frac{d}{dx}(6) = 0$

b. $\frac{d}{dx}(b) = 0$

Problemas

a. $\frac{d}{dx}(18)$ **R. 0**

b. $\frac{d}{dx}(3b)$ **R.**

2. La derivada de la potencia *n*-ésima de una variable es el producto del exponente (*n*) y la potencia del exponente *n*-1 de la variable, si: *y*=*xn*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

a. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$

b. $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{8}}) = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$

Problemas:

a. $\frac{d}{dx}(x^{-3}) \qquad R. \ -\frac{3}{x^4}$

b. $\frac{d}{dx}(x^{-\frac{5}{3}}) \qquad R. \ -\frac{5}{3x^{\frac{8}{3}}}$

3. Derivada del producto de una constante y una función. Si: y =cu en donde u= f(*x*).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Ejemplos

a. $\frac{d}{dx}(10x) = 10\frac{d}{dx}(x) = 10$

$$\frac{d}{dx}(-2x^{\frac{4}{3}}) = -2\frac{d}{dx}(x^{\frac{4}{3}}) = -2\left[\left(\frac{4}{3}\right)x^{\frac{4}{3}-1}\right] = -\frac{8}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

Problemas:

a. $\frac{d}{dx}(4x^3) \qquad R. \ 12x^2$

$\frac{d}{dx}(16x^{\frac{1}{2}}) \qquad R. \ \frac{8}{x^{1/2}}$

4. Derivada de la suma de un número infinito de funciones.

Si: Y = u + v en donde u = f(x) y v = g(x)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$$

Ejemplos

a. $\frac{d}{dx}(3x^2 + 4x + 2) = 3\frac{d}{dx}(x^2) + 4\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(2) = 3(2x) + 4 + 0 = 6x + 4$

b. $\frac{d}{dx}(2x - 6x^{-\frac{1}{2}} + 10) = 2\frac{d}{dx}(x) - 6\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(10) = \frac{-3}{x} + 2$

Problemas

a. 1. $\frac{d}{dx}(7x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 7x - 5)$ $\quad R. \frac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 7$

a. 2. $\frac{d}{dx}(16x^{\frac{1}{2}} + 7x + 4)$ $\quad R. \; 8x^{-1/2} + 7$

5. Derivada del producto de dos funciones.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

Ejemplo

a. f(x) = (x3 +3)(x+2)

Sea: u=(x3+3) y v=(x+2)

b. $f(x) = (x+3)(x+3)$

Sea: $u = x+3$ **y** **v = x+3**

$$(x+3)(1) + \left(x+3\left(\frac{1}{2x}\right)\right) = (x+3)\left(\frac{x+3}{2x}\right)$$

a. $f(x) = \frac{4}{x^6}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^6}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{x^{12}}\right)(6x^5) = -\frac{24x^5}{x^{12}} = -24x^{-7}$$

b. $f(x) = \frac{36}{x^3+1}$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{36}{x^3+1}\right) = -\frac{108x^2}{(x^3+1)^2}$$

Ejemplo

a. $f(x) = (x^2+3)^3$

$$\frac{d}{dx}(x^2+3)^3 = 3(x^2+3)^2(2x) = 6x(x^2+3)^2$$

b. $f(x) = (x+3)^{-\frac{1}{3}}$

$$\frac{d}{dx}(x+3)^{-1/3} = \frac{-1}{3(x+3)^{4/3}}$$

Derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas:

Derivada de una constante elevada a una función.

Si: $f(x) = a^u$ en donde u = f(*x*) es una función derivable con respecto a *x*.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a^u) = a^u Lna \frac{du}{dx}$$

Ejemplo

a. $f(x) = 2^{-x}$

$$\frac{d}{dx}\left(2^{-x}\right) = 2^{-x}Ln(2)\frac{d}{dx}(-x) = -2^{-x}Ln(2)$$

b. $f(x) = 10^{x^2-x}$

$$\frac{d}{dx}10^{x^2-x} = 10^{x^2-x}\ln 10(2x-1)$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

a. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{x\frac{d}{dx}\left(e^x\right) - e^x\frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

b. $f(x) = 10e^{x^2+4}$

$$\frac{d}{dx}\left(10\frac{d}{dx}\left(x^2+4\right)\right) = 20xe^{x^2+4}$$

Ejemplos

a. $f(x) = \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\log e}{\frac{x}{x+1}}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \frac{\log e}{x}\, x+1\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{\log e}{x(x+1)}$$

b. $f(x) = \sqrt{\log x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\log x}\right) = \frac{\log e}{2x\sqrt{\log x}}$$

3.5. Segunda derivada

Derivadas de las funciones de orden superior: En ocasiones es necesario derivar una función una o más veces. Al resultado de dos o más derivadas en forma consecutiva de una función, se le conoce como derivada de orden superior y se representa de la siguiente forma:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad ; \quad f^n(x) \quad ; \quad y^n$$

Ejemplo

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Solución

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 6x \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= 6x - 6 \\ \frac{d^3 y}{dx^3} &= 6 \\ \frac{d^4 y}{dx^4} &= 0 \end{aligned}}$$

Las derivadas de orden superior son también iguales a cero.

b. $f(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

Solución

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dt}{dy} &= t(t^2+1)^{-1/2} \\ \frac{d^2t}{dy^2} &= (t^2+1)^{-3/2} \\ \frac{d^3t}{dy^3} &= -3t(t^2+1)^{-5/2} \end{aligned}}$$

Funciones creciente y decreciente: Este tipo de funciones es también muy importante pues en la vida real una creciente representará los ingresos y ventas que una empresa desea obtener en el presente y futuro así como las decrecientes los gastos y costos.

- **Función creciente**: Se dice que la función es creciente en un intervalo (I), si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$. Si la primera derivada de (f) es positiva en todo un intervalo entonces la pendiente será positiva y (f) será una función creciente en el intervalo.

- **Función decreciente**: Se dice que la función es decreciente en un intervalo (I), si para cualesquiera x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$. Si la primera derivada de (f) es negativa en todo un intervalo, entonces la pendiente será negativa y (f) será una función decreciente en el intervalo.

Ejemplos

1. En $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$ determinar los intervalos en que *f* puede describirse como:

a. Función creciente.
b. Función decreciente.
c. La función no es creciente ni decreciente.

Solución

Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = 5x^2 - 20x + 3$$
$$f`(x) = 10x - 20$$

a. (f) será creciente cuando f`(*x*)>0 o cuando:

$$10x - 20 > 0$$
$$10x > 20$$
$$x > 20/10$$
$$x > 2$$

b. (f) será decreciente cuando f`(*x*)<0 o cuando:

$$10x - 20 < 0$$
$$10x < 20$$
$$x < 2$$

c. (f) no será creciente ni decreciente cuando f`(x) = 0 o cuando:

$$10x - 20 = 0$$
$$10x = 20$$
$$x = 2$$

2. En $f(x) = 2x^2 + 10$ determinar los intervalos en que *f* puede describirse como:

a. Función creciente.
b. Función decreciente.
c. La función no es creciente ni decreciente.

Solución: Encontrar la primera derivada

$$f(x) = 2x^2 + 10$$
$$f`(x) = 4x$$

a. f será creciente cuando f`(x)>0 o cuando:

$$4x > 0$$
$$x > 0/4$$
$$x > 0$$

b. f será decreciente cuando f`(*x*)<0 o cuando:

$$4x < 0$$
$$x < 0/4$$
$$x < 0$$

c. f no será creciente ni decreciente cuando f\`(*x*) = 0 o cuando:

$$4x = 0$$
$$x = 0$$

3. En $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$ determinar los intervalos en que (f) puede describirse como:

a. Función creciente.
b. Función decreciente.
c. La función no es creciente ni decreciente.

Solución

Encontrar la primera derivada:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15$$
$$f`(x) = 3x^2 + 12x$$
$$f`(x) = 3x(x+4)$$

a. (f) será creciente cuando f\`(x)>0 y cuando f(x)< - 4:

$$3x > 0$$
$$x > 0$$
$$cuando:$$
$$x < -4$$

b. (f) será decreciente cuando - 4< f'(x) <0 o cuando:

$$\begin{aligned} &3x < 0 \\ &x < 0 \\ \\ &cuando: \\ &x > -4 \end{aligned}$$

c. (f) no será creciente ni decreciente cuando f'(x) = 0 y cuando f(x) = -4:

$$\begin{aligned} &3x = 0 \\ &x = 0 \\ \\ &x + 4 = 0 \\ &x = -4 \end{aligned}$$

3.6. Máximos y mínimos

Valores máximos y mínimos utilizando el método de la primera derivada.
Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos de una función:

- Encontrar la primera derivada de la función y factorizarla hasta obtener los factores de primer grado.
- Los factores encontrados en el punto anterior se igualan a cero (cada uno) y se resuelve la ecuación hasta obtener sus raíces, que vienen a ser los valores críticos de la variable o abscisa de un máximo o mínimo.
- Se realiza un cuadro en el que se toma como base los valores críticos de la variable, se le dan valores menores y mayores, pero vecinos para cada valor crítico de la variable, los cuales se sustituyen en la ecuación importante de la segunda operación, si el cambio de signo es de más (+) a menos (-) hay un máximo, pero si es de menos (-) a más (+) es un mínimo, si no hay cambio de signo entonces se tiene un punto estacionario.
- Los valores críticos de la variable se sustituyen en la función, obteniéndose las ordenadas de los máximos y mínimos.

Los puntos anteriores se utilizan como un procedimiento para localizar los máximos y mínimos que ocurren en los valores de x para los cuales f(*x*) y f'(*x*) son continuas.

Ejemplos

Caso A

1.
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$$
$$f``(x) = 3x^2 - 12x$$
$$f``(x) = 3x(x - 4)$$

2. Valores críticos

$3x = 0 \qquad x - 4 = 0$

$x = 0 \qquad x = 4$

3.

	x	3x (x - 4)	
	-1	(-)(-) = +	
0			Máximo
	1	(+)(-) = -	
	3	(+)(-) = -	
4			Mínimo
	5	(+)(+) = +	

a. Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 16$$
$$f(0) = 16$$

b. Ordenada del mínimo

$$f(4) = (4)^3 - 6(4)^2 + 16$$
$$f(4) = -16$$

4. Punto del máximo P(0,16); Punto del mínimo P(4,-16)

Caso B

1.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$
$$f`(x) = 12x^3 - 12x^2 = x^2(x-1)$$

2. Valores críticos

$x^2 = 0$ $\qquad$ $x - 1 = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 1$

3.

	x	x^2 (x - 1)	
	-1	(+)(-) = -	
0			Punto estacionario
	1	No hay signo	
	0	(+)(-) = -	
1			Mínimo
	2	(+)(+) = +	

4.

a.
$$f(0) = 3(0)^4 - 4(0)^3$$
$$f(0) = 0$$

b.
$$f(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3$$
$$f(1) = -1$$

5. Punto estacionario P (0,0); Punto del mínimo P(1,-1)

Caso C

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 5$$
$$f`(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$$

1.

2. 6 = 0 $x^2 - 1 = 0$

$x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

3.

	x	$6\ (x^2 - 1)$	
	0	(-)	
1			Mínimo
	2	(+)	
	-2	(+)	
-1			Máximo
	0	(-)	

4.

a. Ordenada del mínimo

$$f(1) = 2(1)^3 - 6(1) \ + 5$$
$$f(1) = 1$$

b. Ordenada del mínimo

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) \ + 5$$
$$f(-1) = 9$$

5. Punto del máximo P(-1,9); Punto del mínimo P(1,1).

2. La derivada de la potencia *n*-ésima de una variable es el producto del exponente (*n*) y la potencia del exponente *n*-1 de la variable, si: *y*=*xn* $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
RESUMEN
1. Si la función tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en un valor x=a, para el que la primera derivada es continuo, entonces f´(a) = 0, si y sólo si.   2. Si f´(a) = 0 no necesariamente debe de ser un máximo relativo o un mínimo relativo en x=a, puede ser un punto estacionario con tangencia horizontal, pero f(x) y f´(x) son continuas en x=a entonces f´(a) = 0.   3. Las condiciones necesarias para que exista un máximo o un mínimo son: a. f´(a) = 0   o bien   b. f´(a) no está definida

Valores máximos y mínimos utilizando el método de la segunda derivada

La segunda derivada se emplea para determinar en dónde una función tiene una concavidad hacia arriba o hacia abajo.

La segunda derivada f’’(*a*) es la pendiente de la gráfica de f`(*x*) en el punto x = 0.

- La segunda derivada f``(*a*) de una función y = f (*x*) es positiva, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia arriba y f`(*x*) es una función de *x* creciente en x = a.
- La segunda derivada f``(*a*) de una función y = f(*x*) es negativa, se afirma que la curva que representa es cóncava hacia abajo (convexa) y f`(*x*) es una función de x decreciente en x = a.

Si una función f(x) en un valor x = a para el cual f(x) y f`(x) son continuas.

a. Geométricamente si f`(*a*) = 0 y f(*x*) es cóncava hacia abajo en x =a, entonces f(x) tiene un máximo en a.
b. Geométricamente si f`(*a*) = 0 y f(*x*) es cóncava hacia arriba en x =a, entonces f(x) tiene un mínimo en a.

Si f(*x*) y f`(*x*) son continuas en x = a y f`(*a*) = 0, entonces:

Mínimo	Máximo	La prueba no es aplicable
En x = a, f``(*a*) > 0	En x = a, f``(*a*) < 0	F``(*a*) = 0

Criterio de la segunda derivada para calcular máximos y mínimos.

- Obtener la primera derivada y encontrar los factores de primer orden.
- Igualar a cero los factores de primer orden y obtener los valores críticos.

- Obtener la segunda derivada y sustituir en ellos los valores críticos de la variable y ver si el valor numérico obtenido es positivo (x > 0) existe un mínimo, si el valor es negativo (x < 0) existe un máximo, cuando el valor obtenido es cero (x = 0), el criterio no se aplica y se tiene que regresar al criterio de la primera derivada.

Ejemplos

A. Encontrar los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 12$$
$$f`(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f`(x) = 6(x^2 - x - 2)$$
$$f`(x) = 6(x + 1)(x - 2)$$

2.

x + 1 = 0 x = -1 x - 2 = 0 x = 2 6 = 0

3.

$$f`(x) = 6x^2 - 6x - 12$$
$$f``(x) = 12x - 6$$

Para x1 = -1

$$f``(x) = 12(-1) - 6 = -18$$

Existe un Máximo para x2=2

$$f``(x) = 12(2) - 6 = 18$$

Existe un Mínimo

Es cóncava hacia abajo en x = -1.

Es cóncava hacia arriba en x = 2.

B. Determinar la concavidad de la función en el punto x = -2

1.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$
$$f`(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

2.

$$f`(x) = 3x^2 - 4x + 1$$
$$f``(x) = 6x - 4$$

Para x_1 = -2

$$f``(x) = 6(-2) - 4 = -16$$
$$f``(-2) < 0$$

Existe un Máximo.

Para x_2= 3

$$f``(x) = 6(3) - 4 = 14$$

Existe un Mínimo.

Es cóncava hacia abajo en x = -2

Es cóncava hacia arriba en x = 3

C. Obtener los máximos o mínimos y determinar la concavidad.

1.

$$f(x) = x^4$$
$$f`(x) = 4x^3$$

2.

$$4x^3 = 0$$
$$x = 0$$

3.

$$f`(x) = 4x^3$$
$$f``(x) = 12x^2$$

Para x_1 = 0

$$f``(x) = 12(0) = 0$$

No existe máximo o mínimo, la prueba no es aplicable

a. Valor crítico

si $x < 0$; $f`(x) < 0$

si $x > 0$; $f`(x) > 0$

Entonces existe un Mínimo

	x	$4x^3$	
	-1	(-)-	
0			Mínimo
	1	(+)	

b. Ordenada del máximo

$$f(0) = (0)^4$$
$$f(0) = 0$$

El mínimo está en el punto P(0,0)

Es cóncava hacia arriba en $x = 0$

3.7. Aplicaciones de la derivada

Aplicaciones con la primera derivada

Costo Marginal. Se define como el cambio en el costo total C(x) debido al incremento de una unidad en la producción y se escribe como:

$$C'(x) = \frac{dc}{dx}$$

Ingreso Marginal. El ingreso marginal es el cambio en el ingreso total R(x) por un incremento de una unidad en la demanda y se representa por:

$$R'(x) = \frac{dr}{dx}$$

Costo promedio marginal. Es el costo total dividido entre la cantidad producida, que es la razón C (x)/x, y ésta representa el costo promedio por unidad producida. A la derivada de la razón C (x)/x, con respecto a x se le llama costo promedio marginal y se representa como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}\left[C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right]$$

La expresión anterior indica el costo promedio por artículo en la cantidad total producida.

Ejemplos

1. El costo total de producir un artículo esta dado por: C(*x*)= $0.25x^2$ +40x+100 pesos, el precio de venta de las *"x"* unidades está dado por la ecuación p(*x*)= 120-0.5x pesos por unidad.

a. Encontrar el "Costo Marginal".
b. Calcular el "Ingreso Marginal".
c. ¿Cuál es el "Costo Marginal" de la venta de 14 unidades?
d. ¿De cuánto es el "Ingreso Marginal" que se obtiene de la venta de 14 unidades?

Solución

a) La ecuación del costo total es: C (x)= $0.25x^2$+40x+100

La primera derivada nos da el costo marginal:

$$C'(x)= 0.5x+40$$

b) El precio de venta está dado por la ecuación p(*x*) = 120 - 0.5x, al venderse "*x*" unidades se expresa como:

$$R(x) = x[p(x)] \qquad\qquad R(x) = x(120 - 0.5x)$$

Al encontrar la primera derivada obtenemos el ingreso marginal:

$$R'(x)= 120 – x$$

De la ecuación de costo marginal del inciso "a", se obtiene:

C' (14) = 0.5 (14) + 40 = 47 pesos.

El ingreso marginal de la venta de 14 unidades:

$$R'(x) = 120 - x$$

$$\boldsymbol{R'(14) = 120 - 14}$$

$$\boldsymbol{R(14) = 106}$$

El ingreso obtenido al vender 14 unidades es 106 pesos.

2. Encontrar el costo promedio marginal de la siguiente ecuación; cuando x = 150

$$C(x) = 0.003x^3 - 0.5x^2 + 20x + 1500$$

$$C'(x) = 0.009x^2 - x + 20$$

$$C'(150) = 72.5$$

$$C(150) = 3375$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\left[\boldsymbol{C`(x) - \frac{C(x)}{x}}\right] = \frac{1}{150}\left[147.5 - \frac{3375}{150}\right] = 0.8$$

Así, cuando x = 150, el costo promedio por unidad aumenta en 0.8 por cada unidad adicional producida.

Costo Marginal

Supóngase que el fabricante de cierto artículo descubre que a fin de producir *"x"* de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por: $C = 200 + 0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C = 200 + 0.03\ (100)^2 = 500$. El costo promedio al producir 100 artículos es 500/100 = $5.

$$-2x(25-2x^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\begin{aligned} C + \Delta C &= 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 \\ &= 200 + 0.03\,[10,000 + 200\,\Delta x + (\Delta x)^2] \\ &= 200 + 300 + 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)2 \\ &= 500 + 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es:

$$\begin{aligned} &\Delta C = (C + \Delta C) - C = 500 + 6\Delta\ x + 0.03\,(\Delta x)^2 - 500 \\ &\Delta C = 6\,\Delta x + 0.03\,(\Delta x)^2 \\ &\Delta C = \Delta x\,(6 + 0.3\,\Delta x) \end{aligned}$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extras es:

$$\Delta C/\Delta x = 6 + 0.03\,\Delta x$$

Si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que el $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a 6 + 0.03 (50) = $7.50 por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a $6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar del costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el caso anterior:

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\,\Delta x) = 6$$

Regla de la cadena

1. Un importador de café mexicano estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p)=\frac{4.374}{p^2}$ kilogramos de café por semana cuando el precio sea de p pesos por kilogramos. Se estima que dentro de t semanas, el precio del café mexicano será de $P(t)=0.02t^2+0.1t+6.0$ pesos el kilogramo. ¿A qué ritmo estará cambiando la demanda de café dentro de 10 semanas?

La demanda, ¿Estará creciendo o decreciendo?

$$\frac{dD}{dp}=-\frac{8.748}{p^3} \qquad\qquad \frac{dp}{dt}=0.04t+0.1$$

Donde

$$\frac{dD}{dt}=\frac{dD}{dp}*\frac{dp}{dt}=\frac{-8.748}{\left(0.02t^2+0.1t+6\right)^3}$$

Cuando t = 10 semanas $\frac{dD}{dt} = -0.012$

Por lo tanto, la demanda está decreciendo a un ritmo de 0.012 kilogramos por semana.

A modo de conclusión: Hoy en día se requiere optimizar procesos de muchos tipos en diferentes actividades, por esto se requieren metodologías para la optimización, ya sea maximizando o minimizando dichas actividades; así hemos visto la utilidad de la derivada para su uso constante en la vida real.

RESUMEN

Este tema comprendió siete bloques consistentes en el siguiente orden de estudio: en primera instancia se analizó el concepto de la “Derivada de una Función” así como su desarrollo a través del “Método de los Cuatro Pasos” e inmediatamente después se aplicaron las distintas reglas de la “Derivada”; enseguida se analizó las diferentes aplicaciones de la “Derivada” de distintas situaciones de carácter práctico y, finalmente, se aplicaron los conocimientos adquiridos en “Problemas Diversos” del campo profesional utilizando como herramienta de trabajo la “Derivada”.

GLOSARIO

Curva cóncava hacia arriba

Se dice que una curva es cóncava hacia arriba en un punto P cuando se conserva a ambos lados de P por encima de la tangente en dicho punto.

Curva cóncava hacia abajo

Se dice que una curva es cóncava hacia abajo en un punto P cuando se conserva a ambos lados de P por debajo de la tangente en dicho punto.

Derivada

Se define como el límite de la razón de incrementos Df(x)/Dx; cuando el Dx tiende a cero. Esto significa una rapidez o razón de cambio.

Derivación

Es el proceso que se utiliza para obtener la "Derivada" de diversas funciones definidas; utilizando las denominadas "Reglas de Derivación".

Funciones Continuas

Una función es continua cuando el incremento de la función tiende a cero a medida que el incremento de la variable tiende a cero.

Incrementos

Cuando una variable cambia de valor, el aumento algebraico se denomina incremento y se representa por el símbolo D antepuesto a la variable.

Máximo

Se dice que una función f(x) tiene un “Máximo” para x = a, cuando para x = a la función es mayor que para cualquier otro valor de x en un entorno de a.

Mínimo

Se dice que una función f(x) tiene un “Mínimo” para x = a, cuando para x = a la función es menor que para cualquier otro valor de x en un entorno de a.

Pendiente

Es el ángulo de inclinación que se mide partiendo de la dirección positiva del eje de las x en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj; y por consiguiente esta pasa por algún punto de la función o curva definida.

Punto de Inflexión

Se llama “Punto de Inflexión” al punto tal que en su ubicación dentro de la curva de un lado la curva es cóncava hacia arriba y del otro lado es cóncava hacia abajo.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Aplicando el “Proceso de los Cuatro Pasos” demuestra las “Derivadas” de las siguientes funciones:

1. $f(x) = (4x – 1)$; entonces la $(df(x)/dx) = 4$.
2. $f(x) = x^2$; entonces la $(df(x)/dx) = 2x$.
3. $f(x) = 8/(t – 3)$; entonces la $(df(x)/dx) = -8/(t – 3)^2$.
4. $f(x) = (2x + 1)$; entonces la $(df(x)/dx) = 2$.
5. $f(x) = (4x^2 + x)$; entonces la $(df(x)/dx) = 8x + 1$.
6. $f(x) = \sqrt{}(x + 5)$; entonces la $(df(x)/dx) = 1/ 2\sqrt{}(x + 5)$.
7. $f(x) = 1/\sqrt{}(5 – x)$; entonces la $(df(x)/dx) = 1 / 2(5 – x)^{(3/2)}$.
8. $f(x) = 5x^3 – 2x^2 + 6x -4$; entonces la $(df(x)/dx) = 15x^2 – 4x + 6$.
9. $f(x) = (x^2 – 3x)$; entonces la $(df(x)/dx) = 2x - 3$.
10. $f(x) = (3 + 2x – x^2)$; entonces la $(df(x)/dx) = 2 – 2x^2$.

ACTIVIDAD 2

Aplicando el “Proceso de los Cuatro Pasos” demuestra las “Derivadas” de las siguientes funciones.

1. f(x) = (1 + 3x); entonces la (df(x)/dx) = 3.
2. f(x) = x^4; entonces la (df(x)/dx) = $4x^3$.
3. f(x) = (7x – 2); entonces la (df(x)/dx) = 7.
4. f(x) = (x^2 - 1)/(x – 3); entonces la (df(x)/dx) = x^2 – 6x + 1/ $(x – 3)^2$.
5. f(x) = (4x + 1); entonces la (df(x)/dx) = 4.
6. f(x) = √(x + 5); entonces la (df(x)/dx) = 1 / 2√(x + 5).
7. f(x) = 2/√(5 – x); entonces la (df(x)/dx) = -1 / $(5 – x)^{(5/2)}$.
8. f(x) = (x - 2)/(x – 4); entonces la (df(x)/dx) = - 2/$(x – 4)^2$.
9. f(x) = (x^3 – 3x); entonces la (df(x)/dx) = $3x^2$ - 3.
10. f(x) = (3 + 2ax – x^2); entonces la (df(x)/dx) = 2a – $2x^2$.

ACTIVIDAD 3

Aplicando las “Reglas para determinar la Derivada de una Función” demuestra las “Derivadas” de las siguientes funciones:

1. f(x) = (4x – 1); entonces la (df(x)/dx) = 4.
2. f(x) = x^2; entonces la (df(x)/dx) = 2x.
3. f(x) = 8/(t – 3); entonces la (df(x)/dx) = -8/$(t – 3)^2$.
4. f(x) = (2x + 1); entonces la (df(x)/dx) = 2.
5. f(x) = ($4x^2$ + x); entonces la (df(x)/dx) = 8x + 1.
6. f(x) = √(x + 5); entonces la (df(x)/dx) = 1/ 2√(x + 5).

7. $f(x) = 1/\sqrt{(5 - x)}$; entonces la $(df(x)/dx) = 1 / 2(5 - x)^{(3/2)}$.

8. $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 6x - 4$; entonces la $(df(x)/dx) = 15x^2 - 4x + 6$.

9. $f(x) = (x^2 - 3x)$; entonces la $(df(x)/dx) = 2x - 3$.

10. $f(x) = (3 + 2x - x^2)$; entonces la $(df(x)/dx) = 2 - 2x^2$.

ACTIVIDAD 4

Aplicando las "Reglas para determinar la Derivada de una Función" demuestra las "Derivadas" de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{x}$; entonces la $df(x)/dx = 1/ 2\sqrt{x}$.
2. $f(x) = e^{(2x)}$; entonces la $df(x)/dx = 2e^{2x}$.
3. $f(x) = \ln x$; entonces la $df(x)/dx = 1/x$.
4. $f(x) = \ln (2x + 1)$; entonces la $df(x)/dx = 2/ (2x + 1)$.
5. $f(x) = \operatorname{sen} x$; entonces la $df(x)/dx = \cos x$.
6. $f(x) = e^{-x}$; entonces la $df(x)/dx = -e^{-x}$.
7. $f(x) = 2x(1 - x^2)$; entonces la $df(x)/dx = -6x^2 + 2$.

ACTIVIDAD 5

Aplicando las “Reglas para determinar la Derivada de una Función” demuestra las “Derivadas” de las siguientes funciones que a continuación se mencionan:

1. f(x) = (1 + 3x); entonces la (df(x)/dx) = 3.
2. f(x) = x^4; entonces la (df(x)/dx) = $4x^3$.
3. f(x) = (7x – 2); entonces la (df(x)/dx) = 7.
4. f(x) = (x^2 - 1)/(x – 3); entonces la (df(x)/dx) = x^2 – 6x + 1/ $(x – 3)^2$.
5. f(x) = (4x + 1); entonces la (df(x)/dx) = 4.
6. f(x) = √(x + 5); entonces la (df(x)/dx) = 1 / 2√(x + 5).
7. f(x) = 2/√(5 – x); entonces la (df(x)/dx) = -1 / $(5 – x)^{(5/2)}$.
8. f(x) = (x - 2)/(x – 4); entonces la (df(x)/dx) = - 2/$(x – 4)^2$.
9. f(x) = (x^3 – 3x); entonces la (df(x)/dx) = $3x^2$ - 3.
10. f(x) = (3 + 2ax – x^2); entonces la (df(x)/dx) = 2a – $2x^2$.

ACTIVIDAD 6

Aplicando las “Reglas para determinar la Derivada de una Función” demuestra la “Segunda Derivada” de las siguientes:

1. $f(x) = (4x – 1)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 0$.
2. $f(x) = x^2$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 2$.
3. $f(x) = 8/(t – 3)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = -16/(t – 3)^5$.
4. $f(x) = (2x + 1)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 0$.
5. $f(x) = (4x^2 + x)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 8$.
6. $f(x) = \sqrt{}(x + 5)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = -1/ 4(x + 5)^{(3/2)}$.
7. $f(x) = 1/\sqrt{}(5 – x)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 5 / 4(5 – x)^{(7/2)}$.
8. $f(x) = 5x^3 – 2x^2 + 6x -4$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 30x – 4$.
9. $f(x) = (x^2 – 3x)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 2$.
10. $f(x) = (3 + 2x – x^2)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = - 4x$.

ACTIVIDAD 7

Aplicando las “Reglas para determinar la Derivada de una Función” demuestra las “Derivadas” de las siguientes:

1. $f(x) = (1 + 3x)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 0$.
2. $f(x) = x^4$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 12x^2$.
3. $f(x) = (7x – 2)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 0$.
4. $f(x) = (x^2 - 1)/(x – 3)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 16x - 48/ (x – 3)^4$.
5. $f(x) = (4x + 1)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 0$.
6. $f(x) = \sqrt{}(x)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = -1/4x^{(3/2)}$.
7. $f(x) = \sqrt{}(5 – x)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = -1/4(5 – x)^{(3/2)}$.
8. $f(x) = (x - 2)/(x – 4)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = - 4/(x – 4)^3$.
9. $f(x) = (x^3 – 3x)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = 6x$.
10. $f(x) = (3 + 2ax – x^2)$; entonces la $(d^2f(x)/dx^2) = – 4x$.

ACTIVIDAD 8

Aplicando los “Máximos y Mínimos” contesta y desarrolla los siguientes ejercicios.

Problema 1: Dada la siguiente función $f(x) = x^3 + 9x$; construye su gráfica y determina en dónde es:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

Problema 2: Dada la siguiente función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1$; construye su gráfica y determina en dónde:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

Problema 3: Dada la siguiente función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$; construye su gráfica y determina en dónde:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

Problema 4: Dada la siguiente función $f(x) = x/(x^2 – 1)$; construye su gráfica y determina en dónde:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

Problema 5: Dada la siguiente función $f(x) = (x – 2)^{(1/5)}$; construye su gráfica y determina en dónde:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

ACTIVIDAD 9

Aplicando los “Máximos y Mínimos” contesta y desarrolla los siguientes ejercicios.

Problema 1: Dada la siguiente función $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$; construye su gráfica y determina en dónde es:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

Problema 2: Dada la siguiente función $f(x) = x^4 - 2x^2$; construye su gráfica y determina en dónde:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

Problema 3: Dada la siguiente función $f(x) = x^2/(x - 1)$; construye su gráfica y determina en dónde:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

Problema 4: Dada la siguiente función $f(x) = 2x/(x^2 - 1)$; construye su gráfica y determina en dónde:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

Problema 5: Dada la siguiente función $f(x) = x \ (9/x)$; construye su gráfica y determina en dónde:

a) Cóncava hacia Arriba.

b) Cóncava hacia Abajo.

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

Contesta el siguiente cuestionario.

1. Define el concepto de derivada.
2. Define el concepto de segunda derivada.
3. Define el concepto de máximo.
4. Da un ejemplo de un mínimo.
5. Da un ejemplo de un máximo.
6. Da un ejemplo de una derivada y calcula sus valores críticos.
7. Define el concepto de mínimo.
8. Define el concepto de punto de inflexión.
9. Define ¿cómo se determina la "Derivada de una Función" aplicando el "método de los Cuatro Pasos"?
10. Define en forma general que nos indican las distintas "Reglas de Derivación" aplicadas a las Funciones.

LO QUE APRENDÍ

Resuelve los siguientes problemas.

Problema 1. La ecuación de cierta "Oferta" de una cierta clase de focos es $x = 1000(4 + 3p + 2p^2)$ donde se ofrecen x focos cuando el precio unitario es p centavos de dólar. Determina la intensidad de cambio de la "Oferta" con respecto a al precio cuando este aumenta de \$ 0.90 a \$ 0.93.

Problema 2. La ecuación de cierta "Oferta" de una cierta clase de focos es $x = 1000(4 + 3p + 2p^2)$ donde se ofrecen x focos cuando el precio unitario es p centavos de dólar. Determina la razón instantánea de variación de la "Oferta" con respecto al precio cuando este es \$ 0.90.

Problema 3. La población de una cierta ciudad, t años después del primero de enero del 2006 calculada sería f(t) donde $f(t) = 30t^2 + 100t + 5000$. Determina la razón a la cual se espera que la población crezca para el primero de enero del 2014.

Problema 4. La población de una cierta ciudad, t años después del primero de enero del 2006 calculada sería f(t) donde $f(t) = 30t^2 + 100t + 5000$. Determina la población que habrá para el primero de enero del 2014.

Problema 5. La población de una cierta ciudad, t años después del primero de enero del 2006 calculada sería f(t) donde f(t) = $30t^2$ + 100t + 5000. Determina la intensidad relativa de crecimiento de la población para el primero de enero del 2014.

a. 7.4 %.
d. 7.5 %.
b. 7.2 %.
e. 7.6 %.
c. 7.3 %.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Elige la respuesta correcta a los siguientes problemas.

1. Dada la parábola y = x2; determina la pendiente de la recta secante a través de los puntos: A (2, 4) y B (3, 9).
   - a) 6
   - b) 5
   - c) 4
   - d) 7
   - e) 3

2. Dada la parábola $y = x^2$; determina la pendiente de la recta secante a través de los puntos: A (2, 4) y B (2.1, 4.41).
   - a) 6.1
   - b) 5.2
   - c) 4.1
   - d) 7.1
   - e) 3.2

3. Dada la parábola $y = x^2$; determina la pendiente de la recta secante a través de los puntos: A (2, 4) y B (2.01, 4.0401).
   - a) 6.01
   - b) 5.02
   - c) 3.02

d) 7.01

e) 4.01

4. Dada la parábola $y = x^2$; determina la pendiente de la recta tangente a dicha parábola en el punto A (2, 4)

a) m (2) = 4

b) m (2) = 7

c) m (2) = 6

d) m (2) = 8

e) m (2) = 5

5. Dada la curva $y = x^2 – 4x +3$; determina la pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto A (x_1, y_1).

a) $m (x_1) = -2x_1 + 4$

b) $m (x_1) = -2x_1 - 5$

c) $m (x_1) = 2x_1 + 6$

d) $m (x_1) = 2x_1 - 4$

e) $m (x_1) = 2x_1 - 6$

II. Elige la respuesta correcta a los siguientes problemas.

1. Dada la curva $y = x^2 - 4x + 3x$; determina una ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto A (5, 8)
   a) $y = -6x - 20$
   b) $y = 6x + 22$
   c) $y = 6x - 22$
   d) $y = -6x - 22$
   e) $y = 6x + 20$

2. Halla una ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{(x - 3)}$ que es paralela a la recta $6x + 3y - 4 = 0$.
   a) $-2x - y - 9 = 0$
   b) $-2x + y - 9 = 0$
   c) $2x - y - 9 = 0$
   d) $2x + y + 9 = 0$
   e) $2x + y - 9 = 0$

3. Encuentra una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$, que es paralela a la recta $8x - y + 3 = 0$.
   a) $-8x - y - 5 = 0$
   b) $8x - y - 5 = 0$
   c) $8x + y - 5 = 0$
   d) $8x - y + 5 = 0$
   e) $8x + y + 5 = 0$

4. Obtén una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{(4x - 3)}$ que es perpendicular a la recta $x + 2y - 11 = 0$.
   a) $2x + y + 2 = 0$

b) $2x - y + 2 = 0$

c) $-2x - y - 2 = 0$

d) $2x - y - 2 = 0$

e) $2x + y - 2 = 0$

5. Obtén una ecuación de cada recta que pasa por el punto A (2, -6) y es tangente a la curva $y = 3x^2 - 8$.

   a) $(12 - 2\sqrt{30})x - y - 30 + 4\sqrt{30} = 0$; $(12 + 2\sqrt{30})x - y - 30 - 4\sqrt{30} = 0$

   b) $(12 + 2\sqrt{30})x - y - 30 + 4\sqrt{30} = 0$; $(12 - 2\sqrt{30})x - y - 30 - 4\sqrt{30} = 0$

   c) $(12 - 2\sqrt{30})x + y - 30 + 4\sqrt{30} = 0$; $(12 + 2\sqrt{30})x + y - 30 - 4\sqrt{30} = 0$

   d) $(12 - 2\sqrt{30})x - y + 30 + 4\sqrt{30} = 0$; $(12 + 2\sqrt{30})x - y + 30 - 4\sqrt{30} = 0$

   e) $(12 - 2\sqrt{30})x - y - 30 + 4\sqrt{30} = 0$; $(12 + 2\sqrt{30})x - y - 30 + 4\sqrt{30} = 0$

III. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Dada la curva y = x3 – 3x; determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A (x1, y1).
   - a) 3x12 - 3
   - b) -3x12 - 3
   - c) 3x12 + 1
   - d) -3x12 + 3
   - e)-3x12 - 1

2. Dada la curva y = √(4 – x); determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A (x1, y1).
   - a) 3/((2)(√(4x – 1))
   - b) 1/((2)(√(4x – 1))
   - c) 1/(√(4x – 1)
   - d) 5/((2)(√(4x – 1))
   - e) 7/((2)(√(4x – 1))

3. Dada la curva y = x3 – 3x; determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A (x1, y1).
   - a) 3x12 – 8x1 -4
   - b) 3x12 +8x1 + 4
   - c) 3x12 – 8x1 + 4
   - d) -3x12 +8x1 + 4
   - e) 3x12 – 8x1 + 4

4. Dada la curva y = 9 – x2; determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A (x1, y1).
   - a) -2x1

b) 4x1

c) -3x1

d) -2x1

e) -4x1

5. Dada la curva y = x3 + 1: determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto A (x1, y1).

   a) 7x12

   b) 5x12

   c) 2x12

   d) x12

   e) 3x12

IV. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas, una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

1. Suponiendo que C(x) es el número de dólares en el "Costo Total" de la manufactura de x juguetes y C(x) = 110 + 4x + 0.02x2; determina la función del "Costo Marginal".
   a) C´(x) = 4 - 0.04x
   b) C´(x) = 4 + 0.04x
   c) C´(x) = -4 + 0.04x
   d) C´(x) = -4 - 0.04x
   e) C´(x) = 4 + 0.04x2

2. De acuerdo con la "Respuesta Obtenida" en el "Reactivo 1" determina el valor del "Costo Marginal" cuando x = 50.
   a) 7
   b) 5
   c) 6
   d) 4
   e) 8

3. De acuerdo a lo desarrollado en los "Reactivos 1 y 2" determina el valor del "Costo Real" de fabricación del juguete número 51.
   a. 6.01
   b. 5.02
   c. 3.02
   d. 7.01
   e. 6.02

4. Supón que C(x) dólares es el "Costo Total" de producción de x unidades de un artículo y C(x) = 2x2 + x + 8; determina la función que da el "Costo Promedio".

   a) Q(x) = 2x + 1 + (8/x)

   b) Q(x) = -2x + 1 + (8/x)

   c) Q(x) = 2x - 1 + (8/x)

   d) Q(x) = 2x + 1 - (8/x)

   e) Q(x) = -2x + 1 + (8/x)

5. Supón que C(x) dólares es el "Costo Total" de producción de x unidades de un artículo y C(x) = 2x2 + x + 8; determina la función que da el "Costo Marginal".

   a) C´(x) = 4x2 + 1

   b) C´(x) = -4x - 1

   c) C´(x) = 4x - 1

   d) C´(x) = 4x + 1

   e) C´(x) = -4x + 1

V. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas, una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

1. Suponiendo que C(x) es el número de dólares en el "Costo Total" de la manufactura de x juguetes y C(x) = 110 + 4x + 0.02x2; determina la función del "Costo Promedio":
    - a) Q(x) = (110/x) - 4 + 0.02x
    - b) Q(x) = (110/x) + 4 + 0.02x
    - c) Q(x) = (110/x) + 4 - 0.02x
    - d) Q(x) = -(110/x) + 4 + 0.02x
    - e) Q(x) = -(110/x) + 4 - 0.02x

2. De acuerdo con la "Respuesta Obtenida" en el "Reactivo 1" determina el valor del "Costo Promedio" si x = 50.
    - a) 8.00
    - b) 5.20
    - c) 7.20
    - d) 6.10
    - e) 4.20

3. Suponiendo que C(x) es el número de dólares en el "Costo Total" de la manufactura de x juguetes y C(x) = 110 + 4x + 0.02x2; determina la "Elasticidad del Costo".
    - a) 2/6
    - b) 7/6
    - c) 1/6
    - d) 3/6
    - e) 5/6

4. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 8x – (x2/100); determina el valor del "Costo Promedio" si x = 60.

   a) Q(x = 60) = 8.23
   b) Q(x = 60) = 7.23
   c) Q(x = 60) = 6.23
   d) Q(x = 60) = 9.23
   e) Q(x = 60) = 4.23

5. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 8x – (x2/100); determina el valor del "Costo Marginal" si x = 60.

   a) C´(x = 60) = 9.80
   b) C´(x = 60) = 5.80
   c) C´(x = 60) = 7.80
   d) C´(x = 60) = 6.80
   e) C´(x = 60) = 4.80

6. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 8x – (x2/100); determina el valor de la "Elasticidad del Costo" si x = 60.

   a) k(x = 60) = 0.63
   b) k(x = 60) = 0.93
   c) k(x = 60) = 0.83
   d) k(x = 60) = 0.53
   e) k(x = 60) = 0.73

VI. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Supón que R(x) dólares es el "Ingreso Total" que se obtiene por las "Ventas" de x mesas y R(x) = 300x – (x2/2); determina la función de "Ingreso Marginal".
    a) R´(x) = -300 + x
    b) R´(x) = 300 - x
    c) R´(x) = -300 - x
    d) R´(x) = 300 – x2
    e) R´(x) = 300 + x

2. De acuerdo con la "Respuesta Obtenida" en el "Reactivo 1" determina el valor del "Ingreso Marginal" cuando x = 40 mesas.
    a) 230
    b) 290
    c) 260
    d) 240
    e) 280

3. Supón que R(x) dólares es el "Ingreso Total" que se obtiene por las "Ventas" de x mesas y R(x) = 300x – (x2/2); determina el número de dólares del "Ingreso Real" por la venta de la mesa número 41.
    a) 259.30
    b) 259.90
    c) 259.20
    d) 259.80
    e) 259.50

4. La ecuación de “Demanda” de una cierta mercancía es: 5x + 3p = 15; determina la función de “Ingreso Total”.

a. R(x) = -(5/3)x3 – 5x

b. R(x) = (5/3)x + 5x

c. R(x) = -(5/3)x2 – 5x

d. R(x) = (5/3)x + 5

e. R(x) = -(5/3)x2 + 5x

5. La ecuación de “Demanda” de una cierta mercancía es: 5x + 3p = 15; determina la función de “Ingreso Marginal”

a) R´(x) = -(10/3)x - 5

b) R´(x) = -(10/3)x + 4

c) R´(x) = -(10/3)x - 4

d) R´(x) = -(10/3)x + 5

e) R´(x) = (10/3)x + 5

VII. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Dada f(x) = x3 – 6x2 + 9x + 1; determina en donde f(x) es creciente.

   a) x < -1; 3 > x

   b) x < 1; 3 < x

   c) x > 1; -3 > x

   d) x < -2 1 > x

   e) x > -1 x > 3

2. Dada f(x) = x3 – 6x2 + 9x + 1; determina en donde f(x) es decreciente.

   a) (-3 < x < 1)

   b) (-1 < x < 3)

   c) (1 < x < 3)

   d) (-3 < x < -1)

   e) (1 > x > 3)

3. Dada f(x) = x(4/3) – 4x(1/3); determina un intervalo en donde f(x) es creciente.

   a) (-2 < x < 0)

   b) (-1 < x < 2)

   c) (-1 < x < 1)

   d) (0 < x < 1)

   e) (-1 < x < 0)

VIII. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas. Aplicando los "Máximos y Mínimos" contesta y desarrolla los siguientes reactivos que a continuación se mencionan:

1. Dada la siguiente función f(x) = x3 + 9x; determina el "Punto de Inflexión":
    a) (0, 0)
    b) (0, 1)
    c) (1, 0)
    d) (1, 1)
    e) No existe

2. Dada la siguiente función f(x) = 2x3 + 3x2 - 7x + 1; determina el "Punto de Inflexión"
    a) (1/2, 4)
    b) (1/2, -5)
    c) (-1/2, 5)
    d) (-1/2, -5)
    e) (-1/2, 4)

3. Dada la siguiente función f(x) = x4 - 8x3 + 24x2; determina el "Punto de Inflexión":
    a) (0, 0)
    b) (1, 2)
    c) (-1, 2)
    d) (1, -1)
    e) No existe

4. Dada la siguiente función f(x) = x/(x2 – 1); determina el “Punto de Inflexión”:
   a) (1, 0)
   b) (0, 0)
   c) (0, 1)
   d) No existe
   e) Infinito

5. Dada la siguiente función f(x) = (x – 2)(1/5); determine el “Punto de Inflexión”:
   a) (0, 2)
   b) (1, 2)
   c) (-1, 2)
   d) (2, 0)
   e) No existe

IX. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Suponiendo que C(x) es el número de dólares en el “Costo Total” de la manufactura de x juguetes y C(x) = 110 + 5x + 0.02x2; determina la función del “Costo Promedio”.
   a) Q(x) = (110/x) - 5 + 0.02x
   b) Q(x) = (110/x) + 5 + 0.02x
   c) Q(x) = (110/x) + 5 - 0.02x
   d) Q(x) = -(110/x) + 5 + 0.02x
   e) Q(x) = -(110/x) + 5 - 0.02x

2. De acuerdo a la “Respuesta Obtenida” en el “Reactivo 1” determina el valor del “Costo Promedio” si x = 55.
   a) 8.00
   b) 5.20
   c) 8.10
   d) 6.10
   e) 4.20

3. Suponiendo que C(x) es el número de dólares en el “Costo Total” de la manufactura de x juguetes y C(x) = 110 + 5x + 0.02x2; determina la “Elasticidad del Costo”.
   a) 2.6/6.9
   b) 7.5/6.8
   c) 1.7/6.7
   d) 3.2/6.2
   e) 7.2/8.1

4. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 9x – (x2/100); determina el valor del "Costo Promedio" si x = 60.
   a) Q(x = 60) = 9.78
   b) Q(x = 60) = 7.23
   c) Q(x = 60) = 6.23
   d) Q(x = 60) = 8.23
   e) Q(x = 60) = 4.23

5. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 9x – (x2/100); determina el valor del "Costo Marginal" si x = 60.
   a) C´(x = 60) = 9.80
   b) C´(x = 60) = 5.80
   c) C´(x = 60) = 9.80
   d) C´(x = 60) = 7.80
   e) C´(x = 60) = 4.80

6. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 9x – (x2/100); determina el valor de la "Elasticidad del Costo" si x = 60.
   a) k(x = 60) = 0.63
   b) k(x = 60) = 0.93
   c) k(x = 60) = 0.79
   d) k(x = 60) = 0.53
   e) k(x = 60) = 0.73

X. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. El "Costo Total" de producción de x relojes en una cierta planta está dada C(x) = 1500 + 30x + x2; determina la función del "Costo Marginal".
   a) C´(x) = -30 + 2x
   b) C´(x) = 30 + 2x
   c) C´(x) = 30 - 2x
   d) C´(x) = 30 + 2x2
   e) C´(x) = -30 - 2x

2. De acuerdo con la "Respuesta Obtenida" en el "Reactivo 1" determina el valor del "Costo Marginal" si x = 40.
   a. 125
   b. 120
   c. 110
   d. 115
   e. 105

3. El "Costo Total" de producción de x relojes en una cierta planta está dada C(x) = 1500 + 30x + x2; determina el "Costo Real" de fabricación de la unidad 41.

a. 108

b. 110

c. 130

d. 126

e. 111

4. Supón que cierto proceso químico produce un líquido y que la función del "Costo Total" C está dada por C(x) = 6 + 4√x; donde c(x) dólares es

el “Costo Total” de producción de x litros del líquido; determina el valor del “Costo Marginal” cuando se producen 16 litros.

a) $C'(x = 16) = 0.50$

b) $C'(x = 16) = 0.55$

c) $C'(x = 16) = 0.45$

d) $C'(x = 16) = 0.30$

e) $C'(x = 16) = 0.60$

5. Supón que cierto proceso químico produce un líquido y que la función del “Costo Total” C está dada por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$; donde c(x) dólares es el “Costo Total” de producción de x litros del líquido; determina la cantidad de litros obtenidos cuando el “Costo Marginal” por litro es igual a 40 centavos.

a) 23

b) 20

c) 18

d) 25

e) 30

XI. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. En una cierta fábrica si C dólares es el “Costo Total” de producción de s unidades, entonces C(s) = 0.25s2 + 2s + 1000; además si se producen s unidades durante t horas desde que se inició la producción entonces s(t) = 3t2 +50t; determina la intensidad de cambio del “Costo Total” con respecto a un tiempo de 2 horas después de iniciarse la producción.
   a) 3,590 usd/hora
   b) 3,596 usd/hora
   c) 3,598 usd/hora
   d) 3,592 usd/hora
   e) 3,588 usd/hora

2. La ecuación de “Demanda” de una mercancía determinada es: p2 + 4x2 – 80x – 15,000 = 0; donde se demandan x unidades cuando el precio unitario es p dólares. Calcula el “Ingreso Marginal” si demandan 30 unidades
   a) 44.20
   b) 44.35
   c) 44.27
   d) 44.32
   e) 44.20

3. Una compañía constructora renta cada departamento en p dólares al mes cuando se rentan x de ellos, y 30√(300 – 2x). ¿Cuántos departamentos deben rentarse antes de que el “Ingreso Marginal” sea cero?
   a) 103
   b) 109

c) 110
d) 105
e) 100

4. En un bosque, un depredador se alimenta de las presas y la población de depredadores en cualquier instante es función del número de presas que hay en el bosque en ese momento. Supón que cuando hay x presas en el bosque, la población de depredadores es y, donde
y = (x2/6) + 90; además si han transcurrido t semanas desde que terminó la temporada de cacería donde x = 7t + 85. Determina a qué rapidez crece la población de depredadores a las 8 semanas de haber finalizado la temporada de cacería.
   a) 329 depredadores/semana
   b) 319 depredadores/semana
   c) 309 depredadores/semana
   d) 299 depredadores/semana
   e) 339 depredadores/semana

5. La ecuación de "Demanda" de cierta mercancía es px = 36,000, donde se demandarán x unidades por semana cuando el precio por unidad es p dólares. Se espera que a la t semanas, donde t ☐ {0, 10}, el precio del artículo sea p, donde 30p = 146 + 2t(1/3). Calcula la intensidad de cambio anticipada de la demanda con respecto al tiempo en 8 semanas.
   a) 8 unidades por semana
   b) 5 unidades por semana
   c) -3 unidades por semana
   d) -8 unidades por semana
   e) -7 unidades por semana

XII. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Suponiendo que C(x) es el número de dólares en el “Costo Total” de la manufactura de x juguetes y C(x) = 120 + 10x + 0.02x2; determina la función del “Costo Promedio”.
   a) Q(x) = (120/x) - 10 + 0.02x
   b) Q(x) = (120/x) + 10 + 0.02x
   c) Q(x) = (120/x) + 10 - 0.02x
   d) Q(x) = -(120/x) + 10 + 0.02x
   e) Q(x) = -(120/x) + 10 - 0.02x

2. De acuerdo a la “Respuesta Obtenida” en el “Reactivo 1” determina el valor del “Costo Promedio” si x = 20.
   a) 18.00
   b) 15.20
   c) 16.40
   d) 16.10
   e) 14.20

3. Suponiendo que C(x) es el número de dólares en el “Costo Total” de la manufactura de x juguetes y C(x) = 120 + 10x + 0.02x2; determina la “Elasticidad del Costo”.
   a) 12.45/15.20
   b) 17.56/16.10
   c) 12.45/16.56
   d) 13.70/16.30
   e) 10.80/16.40

4. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 8x – (x2/100); determina el valor del "Costo Promedio" si x = 25.

   a) Q(x = 25) = 9.75
   b) Q(x = 25) = 7.25
   c) Q(x = 25) = 6.75
   d) Q(x = 25) = 9.25
   e) Q(x = 25) = 4.25

5. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 8x – (x2/100); determina el valor del "Costo Marginal" si x = 25. 5

   a) C´(x = 25) = 9.50
   b) C´(x = 25) = 5.50
   c) C´(x = 25) = 6.50
   d) C´(x = 25) = 7.50
   e) C´(x = 25) = 4.50

6. Supón que C(x) dólares el "Costo Total" de producción de marcos y C(x) = 50 + 8x – (x2/100); determina el valor de la "Elasticidad del Costo" si x = 25.

   a) k(x = 25) = 0.66
   b) k(x = 25) = 0.92
   c) k(x = 25) = 0.76
   d) k(x = 25) = 0.56
   e) k(x = 25) = 0.73

XIII. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Encuentra la primera derivada de f(x) = x(x – 3).
   - a) 2x-3
   - b) 2
   - c) x-3
   - d) -3
   - e) -3x

2. Encuentra la primera derivada de f(x) = x(2x+1).
   - a) 4x+1
   - b) 2x+1
   - c) x+1
   - d) 3x+1
   - e) 3x

3. Deriva la función definida por la expresión f(x) = (2x2 + x - 3).
   - a) (2x2 + x - 3)
   - b) (2x + 3)
   - c) (2x - 3)
   - d) (4x + 1)
   - e) (2x2 – 3)

4. Supongamos que la función f(x) es continua en un punto x1; entonces la derivada de la función en x1 es:

a) La pendiente de la recta tangente a la función en x1

b) El límite de la función en x1

c) La recta tangente a la grafica de f(x)

d) La pendiente de la recta secante de la función en x1

e) La pendiente de la recta secante de la función en el límite de las rectas secantes a la función en el punto x1

5. Determina la ecuación de la recta tangente a la función f(x) = x3 - 3x +4 en el punto (2, 6).

a) 3x - y = 12

b) 9x - y = 12

c) 3x + 4 = y

d) 9x + y = 12

e) 4x + 9 = 12

6. Para la función f(x) = x3 -6x2+9x encuentra los valores de x en los cuales ocurren los extremos relativos:

a) x=2, x= 3

b) x= 1, x= 2

c) x= 1, x= 3

d) x= 2, x= 4

e) x= 1, x = -1

7. Para la función f(x) = (1 - 2x)3, determina el valor de (x) en el punto de inflexión de la gráfica.

a) x= 3

b) x= 4

c) x= 2

d) x = -1

e) x= 0.5

8. Calcula la primera derivada cuando x=1 de la función f(x) = (2)/(x2 - 1).

a) +4

b) infinito

c) cero

d) -4

e) -2

9. Calcula la derivada de f(x)= (5t2 + 7t).

a) -(10t+7)

b) (10t+7)

c) (-10t+7)

d) (10t-7)

e) 10t

10. Deriva la función f(x) = (4x +3.)*3x.

a) 8x+3

b) x(4x)+3

c) 4x(4x+3)

d) 4(4x+3)

e) 24x+9

MESOGRAFÍA

Bibliografía sugerida

Autor	Capítulo	Páginas
Granville (1985)	3. Derivación	25-32
	4. Reglas para Derivar Funciones Algebraicas	36-49
	5. Aplicaciones de la Derivada	52-82
Haeussler y Paul (1997)	12. Diferenciación	561-613
	13. Temas adicionales sobre Diferenciación	617-643
Hoffman y Bradley (1995)	2. Derivación: Conceptos Básicos	85-156
	3. Aplicaciones adicionales de Derivada	162-243
Leithold (1982)	2. La Derivada	96-12
	3. Aplicaciones de la Derivada	126-164
	4. Valores Extremos	169-205

	5. Más Aplicaciones	210-247
Leithold (1988)	3. La Derivada	174-247
	4. Aplicaciones de la Derivada	252-336

Bibliografía básica

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul, Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Bibliografía complementaria

Ayres Frank. (2010). *Cálculo.* (5ª ed.) México: McGraw-Hill.

Oteyza, Elena, de. (2006). *Conocimientos fundamentales de matemáticas, Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación.

Krantz, Steven. (2006). *Cálculo*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Larson, Ron. (2010). *Cálculo.* (9ª ed.) México: McGraw-Hill (2 vols.)

Purcell Edwin. (2007). *Cálculo*. (9ª ed.) México: Pearson Educación.

Stewart, James. (2006). *Cálculo diferencial e integral.* (2ª ed.) México: Cengage Learning.

Sitios de Internet

Sitio	Descripción
http://www.derivadas.es/2009/12/12/derivadas-de-primer-nivel/	Derivadas de Primer Nivel (12/12/09)
http://www.vitutor.com/fun/4/d_f.html	Fórmulas de Derivadas
http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/default.htm	Derivadas
http://www.derivadas.es/	Derivadas. Ejercicios (03/01/12)

UNIDAD 4

INTEGRAL

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá el concepto, las propiedades, las aplicaciones y la interpretación de la integral.

INTRODUCCIÓN

En la presente unidad se muestra el concepto de la “Integral Definida e Indefinida” así como sus propiedades. También se muestran diferentes métodos para la obtención de la integral para una función. Y por último la aplicación de la integral para la obtención de áreas bajo la curva y también cálculo de probabilidades.

LO QUE SÉ

¿Qué tipo de métodos básicos conoces para resolver integrales?

TEMARIO DETALLADO

(12 horas)

4.1. Antiderivadas

4.2. Integral indefinida

4.3. Reglas de integración

4.4. Integración por substitución

4.5. Integración por partes

4.6. Integral definida

4.7. Integración por substitución

4.8. Integración por partes

4.9. Aplicación de integral

1.1. Antiderivadas

Empecemos por plantear el concepto de integral en forma general y más adelante se estudiará la integral indefinida y definida.

La integral de una función (f) se denota como: $\int f(x)\,dx$

Donde:

- f(x) = función a integrar o integrando.
- dx = diferencial de la variable x.
- $\int$ = signo de integración.

La "Derivada" de la función x es 1. Esto es: dx (x) = 1.

Por lo tanto la "Antiderivada" o "Integral" de 1 es: $\int 1\,dx = x + C$

$$F(x) = x + 3$$
$$F(x) = x + 2$$
$$F(x) = x + 1$$
$$F(x) = x + 0$$
$$F(x) = x - 1$$

Todos los casos anteriores son "Antiderivadas" de la función f(x) =1, con lo que se afirma que una función f es una "Antiderivada" de f en un intervalo, si:

$$\mathbf{F'(\mathit{x}) = f(\mathit{x})}$$

Las funciones F(x) = x + C representan una familia de rectas, todas ellas con pendiente igual a 1.

Ejemplo 2

La "Derivada" de la función f(x) = x^2, es 2x. Esto es: dx(x^2) = 2x.

Por lo tanto la "Antiderivada" o "Integral" de 2x es: $\int 2x = x^2 + C$

En donde "C" es una constante de integración que puede tomar cualquier valor, así decimos que:

$$\mathbf{F(\mathit{x}) = x^2 + 3}$$
$$\mathbf{F(\mathit{x}) = x^2 + 2}$$
$$\mathbf{F(\mathit{x}) = x^2 + 1}$$
$$\mathbf{F(\mathit{x}) = x^2 + 0}$$
$$\mathbf{F(x) = x^2 - 1}$$

Todos los casos anteriores son "Antiderivadas" de la función f(x) =2x, entonces se puede afirmar que una función f es una "Antiderivada" de f en un intervalo, si:

$$\mathbf{F'(\mathit{x}) = f(\mathit{x})}$$

Las funciones F(x) = x^2 + C representan una familia de curvas.

Hasta aquí podemos concluir que si conocemos la "Derivada" de una función, entonces también conocemos su "Antiderivada" o "Integral".

4.2. Integral indefinida

La integral indefinida de cualquier función (f) con respecto a x es una antiderivada indefinida (arbitraria) de (f), y se denota como:

$$\int \mathbf{f}(x)\, \mathbf{d}x$$

Se afirma que todas las "Antiderivadas" de f difieren sólo en una constante.

La "Antiderivada General" de f(x) es: F(x) + C

Por lo tanto

$$\int \mathbf{f}(x)\, \mathbf{d}x = \mathbf{F}(x) + \mathbf{C}$$

Ejemplo

a) $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

b) $\int 3x^2 dx = 3\int x^3 dx = 3\left[\frac{x^3}{3} + C\right] = x^3 + C$

Aplicando a la fórmula anterior la siguiente:

Fórmula $\int x^n dx = \int x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right] = x^{n+1} + C$

Se tiene entonces:

$$\int (1 - x) dx = \int dx - \int x dx = x - \frac{x^2}{2} + C.$$

4.3. Reglas de integración

Algunas de las propiedades de la integral definida:

1. Si tenemos una función que se está multiplicando por una constante; podemos colocar a la constante fuera de la integral.

En forma general:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo:

$$\int_2^4 6x^3dx = 6\int_2^4 x^3dx = 6\left(\tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_2^4 = 6\left[\tfrac{1}{4}(4)^4 - 1/4(2)^4\right] = 360$$

2. Si k es cualquier constante, entonces:

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

Ejemplo:

$$\int_2^4 2xdx = (2x\ )\Big|_2^6 = 2(6-2) = 8$$

3. Si estamos calculando la integral de la suma o resta de 2 funciones:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$$

Ejemplo:

$$\int_0^3 \left(x^2 + x^3\right)dx = \int_0^3 x^2dx + \int_0^3 x^3dx = 1/3(x^3) \Big|_0^3 + 1/4(x^4) \Big|_0^3$$

$$= 1/3\left[(3)^3 - (0)^3\right] + 1/4\left[(3)^4 - (0)^4\right] = 9 + 20.25 = 29.25$$

4. La inversa del orden de los límites de integración cambia el signo de la integración.

$$\int_a^b F(x)dx = -\int_a^b F(x)dx$$

$$\int_1^2 dx = (x)\Big|_1^2 = (2-1) = 1$$

Entonces invirtiendo los límites de integración tenemos

$$\int_2^1 dx = (x)\Big|_2^1 = -(1-2) = -(-1) = 1$$

5. Si el límite superior de integraciones es igual al límite inferior de integración, el valor de la integración definida es cero.

$$\int_a^b F(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

6. La integral definida puede expresarse como la suma de sub integrales.

$$\int_a^c F(x)dx = \int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx \qquad a \le b \le c$$

FÓRMULAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN

1. $\int dx = x + C$
2. $\int kdx = kx + C$
3. $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
6. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{2}dx = Ln|x| + C$ $\quad x \neq 0$
7. $\int e^x dx = e^x + C$

EJERCICIOS DE INTEGRALES

1. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int {}^{1}\!/_{x^5}\, dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{-1}{4x^4} + C$

3. $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C = \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} x^{4/3} + C$

4. $\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x^3 x^{1/2} dx = \int x^{7/2} dx = \frac{x^{7/2+1}}{7/2+1} + C = \frac{2}{9} x^{9/2} + C$

5. $\int x(x + x^5)dx = \int (x^2 + x^6)dx = \int x^2 dx + \int x^6 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + C =$

$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7}x^7 + C$

6.

$\int (2 + y^2)^2 dx = \int (4 + 4y^2 + y^4)dy = 4\int dy + 4\int y^2 dy + \int y^4 dy = 4y + \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5} +$

$\int \left(3x^5 + 4x^{3/2} - 2x^{-1/2}\right)dx = 3\int x^5 dx + 4\int x^{3/2} dx - 2\int x^{-1/2} dx =$

4.4. Integración por sustitución

De las fórmulas de las integrales se desprende que es limitado el número de ellas.

Existen dos principios que permiten ampliar el alcance:

- Cada regla de integración representa un patrón.
- Las diferenciales suministran una pauta a dicho patrón.

Por ejemplo:

$$\int (x+3)^{50}\, d(x+3) = \frac{(x+3)^{50+1}}{51} + C$$

Donde a la expresión (x+3) se le saca la derivada con respecto a x.

4.5. Integración por Partes

La integral por partes es una fórmula muy eficiente que se basa en el producto de una integral.

La fórmula de integración por partes es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para ejemplificar tenemos el siguiente ejemplo:

$$\int x\cos xdx$$

Sea: U= x dv = cos x V= sen x du = dx

Entonces:

$$\int x\cos xdx = xsenx - \int sexdx = xsenx + \cos x + C$$

4.6. Integral definida

La “Integral Definida” de una función f(x) entre x = a y x = b se denota como:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Se puede interpretar como el área de la región limitada por la gráfica
y = f(x) y las rectas x = a, x = b y el eje “x”.

Los valores “a” y “b” reciben el nombre de límite inferior y superior de integración respectivamente.

Una definición más precisa es mencionar que el área bajo una gráfica de una función continua puede expresarse como la “Integral Definida” de F(x) sobre el intervalo de “a” hasta “b” escrito matemáticamente como:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{lím}{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(x)\Delta xi$$

Al contrario de *la integral indefinida*, que es un conjunto de funciones que contiene todas las “Antiderivadas de F(x)”, la “Integral Definida” es un número real que puede ser evaluado empleando el “Teorema Fundamental del Cálculo” que establece lo siguiente:

"El valor numérico de la "Integral Definida" de una función continua F(*x*) sobre el intervalo de (a) hasta (b) está dado por la "Antiderivada" F(*x*)+C evaluada en el límite superior de integración (b), menos la misma "Antiderivada" F(*x*)+C evaluada en el límite inferior de integración (a), con (C) común a ambos, la constante de integración se elimina en la sustracción matemática expresada".

Donde el símbolo $\Big|_a^b$, $\Big]_a^b$, ó $[\ldots]_a^b$ indica que los límites de (b) y (a) deben sustituirse sucesivamente para x.

Ejemplo

$$\int_0^3 (x-1)dx$$

Calcular

a. Primero el cálculo del área.
b. El concepto de "Antiderivada" que plantea la pregunta ¿qué función al derivarla da como resultado (x – 1)? y se obtiene lo siguiente:

$$\int_0^3 (x-1)dx = \int_0^3 xdx - \int_0^3 dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^3 = \left[\frac{1}{2}(3)^2 - (3)\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - 0\right]$$

El resultado es:

$$\int_0^3 (x-1)dx = \frac{3}{2}$$

Propiedades de la "Integral Definida"

Algunas de las propiedades de la integral definida.

1. Si tenemos una función que se está multiplicando por una constante; podemos colocar a la constante fuera de la integral.

En forma general:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo

$$\int_2^4 6x^3dx = 6\int_2^4 x^3dx = 6\left(1/4\, x^4\right)\Big|_2^4 = 6\left[1/4(4)^4 - 1/4(2)^4\right] = 360$$

2. Si k es cualquier constante, entonces:

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

Ejemplo

$$\int_2^5 6xdx = \left(\frac{6}{2}x^2\right)\Big|_2^5 = 3(5-2) = 3(3) = 9$$

3. Si estamos calculando la integral de la suma o resta de 2 funciones:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$$

Ejemplo

$$\int_0^4 (2x+5)dx = \int_0^4 2xdx + \int_0^4 5dx = 1/2(2x^2) \Big|_0^4 + 5x \Big|_0^4 = (4^2 - 0) + 5(4-0) = 16 - 2$$

4. La inversa del orden de los límites de integración cambia el signo de la integración.

$$\int_a^b F(x)dx = -\int_a^b F(x)dx$$

5. Si el límite superior de integraciones es igual al límite inferior de integración, el valor de la integración definida es cero.

$$\int_a^b F(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

6. La integral definida puede expresarse como la suma de subintegrales.

$$\int_a^c F(x)dx = \int_a^b F(x)dx + \int_b^c F(x)dx \qquad a \le b \le c$$

Problemas de integrales definidas

a) $\int_2^4 3x^2dx = 3\int_2^4 x^2dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = (4)^3-(2)^3 = 56$
b) $\int_4^{36}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_4^{36} x^{\frac{-1}{2}}dx = \left[\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_4^{36} = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_4^{36} = 2(36)^{\frac{1}{2}}-2(4)^{\frac{1}{2}}$ =12 – 4 = 8
c) $\int_1^5 3x^{-1}dx = 3\int_1^5 x^{-1}dx = 3[\ln x]_1^5 = 3\ln 5 - 3(\ln 1)$ =3(ln 5) = 4.82
d) $\int_0^1 e^{\frac{t}{2}}dt = \left[2e^{t/2}\right]_0^1 = 2e^{\frac{1}{2}} - 2e^0 = 2(e^{\frac{1}{2}}-1)$

4.7. Integración por sustitución

De las fórmulas de las integrales se desprende que es limitado el número de ellas.

Existen dos principios que permiten ampliar el alcance.

* Cada regla de integración representa un patrón.
* Las diferenciales suministran una pauta a dicho patrón.

Por ejemplo:

$$\int_0^4 8e^x dx = 8(e^4 - e^0) = 8(54.598 - 1) = 8(53.598) = 428.784$$

Donde a la expresión (x+3) se le saca la derivada con respecto a x.

4.8. Integración por partes

La integral por partes es una fórmula muy eficiente que se basa en el producto de una integral.

La fórmula de integración por partes es:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para ejemplificar tenemos el siguiente ejemplo:

$$\int_0^{\pi} x\cos xdx$$

Sea:

U=x dv= cos *x*

V= sen *x* du = dx

Entonces se tiene:

$$\int_0^{\pi} x\cos xdx = xsenx - \int_0^{\pi} senxdx = (xsenx + \cos x)\Big|_0^{\pi} = [(\pi sen\pi + \cos\pi) - (0sen0 + \cos 0)] = (0-1) - (0+1)$$

4.9. Aplicación de integral

1. La gerencia de la compañía de equipo para oficina determinó que la función de ingresos marginales diarios asociados con la producción y venta de su sacapuntas de baterías está dada por: R´(x) = -0.0006x + 6. Donde (x) denota las unidades producidas y R´(x) se mide en dólares por unidad.

a) Determinar la función de ingresos R(x) asociada con la producción y venta de estos sacapuntas

b) ¿Cuál es la ecuación de demanda que relaciona el precio unitario al mayoreo con estos sacapuntas con la cantidad demandada?

Solución

a) La función de ingresos R se encuentra integrando la función de ingresos marginales R´(x).

Así, R(x)=(-0.0006x + 6)

$$\mathbf{R(x) = \int R`(x)dx = \int (-0.0006x + 6)dx = -0.0006 \int x\,dx + 6\int dx = \underline{-0.0003x^2 + 6x + C}}$$

Para determinar el valor de la constante (C), hemos de darnos cuenta de que los ingresos totales de la empresa son cero cuando el nivel de producción y ventas son nulos; es decir, R(0) = 0. Esta condición indica que:

$$\mathbf{R(0) = -0.0003\ (0)^2 + 6(0) + C = 0}$$

Por lo tanto: C = 0

Así la función de ingresos requerida está dada por:

$$\mathbf{R(\mathit{x}) = -0.0003\ x^2 + 6x}$$

b) Sea (p) el precio unitario al mayoreo de los sacapuntas, entonces:

Ingresos: R (x) = p x = (Precio)(número de sacapuntas)

Despejando

$$\mathbf{p} = \frac{R(x)}{x} = \frac{-0.0003x^2 + 6x}{x} = -0.0003x + 6$$

La ecuación de demanda es:

$$p = -0.0003x + 6$$

2. Las tasas de costos e ingresos de cierta operación minera están dadas por:

$$C'(t) = 5 + 2t^{\frac{2}{3}} \quad \text{y} \quad R'(t) = 17 - t^{\frac{2}{3}}$$

En donde (C) y (R) se miden en millones de pesos y (t) en años, determine:

a) ¿Qué tanto deberá prolongarse la operación?
b) Encuentre la utilidad total que puede obtenerse durante este periodo.

Solución
a) El instante óptimo (t) que dará como resultado la utilidad máxima es el instante en que el costo y el ingreso son iguales, es decir:

C'(t)=R'(t)

$$5 + 2t^{\frac{2}{3}} = 17 - t^{\frac{2}{3}}$$
$$3t^{\frac{2}{3}} = 17 - 5$$
$$3t^{\frac{2}{3}} = 12$$
$$t^{\frac{2}{3}} = \frac{12}{3}$$
$$t^{\frac{2}{3}} = 4$$
$$t = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

Por lo tanto, la operación deberá mantenerse por t =8 años.

b) La utilidad que puede obtenerse durante este periodo de 8 años está dada por:

Utilidad = $\int_0^8 [R'(t) - C'(t)]dt$

$$= \int_0^8 \left[17 - t^{\frac{2}{3}} - (5 + 2t^{\frac{2}{3}})\right]dt$$

$$= \int_0^8 \left[17 - t^{\frac{2}{3}} - 5 - 2t^{\frac{2}{3}}\right]dt$$

$$= \int_0^8 (12 - 3t^{\frac{2}{3}})dt$$

$$= 12t - \left.\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right|_0^8$$

$$= 12t - \left.\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}\right|_0^8$$

$$= 12(8) - \frac{9}{5}(8)^{\frac{5}{3}}$$

$= 96 - 57.6 = 38.4$ Millones de pesos.

3. La función de costo marginal de un fabricante está dada por la

$$\frac{dc}{dq} = 0.8q + 4$$

Si la producción es alta, esto es, es casi igual a q = 90 unidades por semana ¿Cuánto costaría incrementar la producción a 110 unidades por semana?

Solución

La tasa de cambio del costo es $\frac{dc}{dq}$.

$$C(110) - C(90) = \int_{90}^{110} \frac{dc}{dq}\, dq = \int_{90}^{110} (0.8q + 4)dq$$

c

Finalmente: El costo para aumentar la producción de 90 a 110 unidades es $1680.

4. El valor actual de un flujo continuo de ingresos de $5000 al año durante 10 años al 4% compuesto continuamente esta dado por: $\int_0^{10} 5000e^{-0.04t} dt$. Calcule el "valor Actual".

Solución

a) Determinando el Valor Actual:

$$\int_0^{10} 5000e^{-0.04t} dt = 5000\int_0^{10} e^{-0.04t} dt \quad = 5000\left[-\frac{e^{-0.04t}}{0.04}\right]_0^{10} = -83790.0 + 125000$$

Finalmente el Valor Actual = $ 41,210.00

Nota: Dentro del Campo de la Estadística se puede aplicar con frecuencia a la "Integral". Tal es el caso del estudio de una función de densidad de probabilidad (f) de una variable (x), en donde (x) toma todos los valores del intervalo $[a,b]$ tiene las siguientes propiedades:

$F(x) \geq o$ 2. $\int_a^b F(x)dx = 1$ 3. $P(c \leq x \leq d) = \int_c^d F(x)dx$

5. Supón que (y) tiene la función de densidad F(y) = C y en el intervalo $0 \leq y \leq 2$

Solución

a) Encuentra el valor de la constante C que hace de F(y) una función de densidad de probabilidad.

$$F(y) = \int_0^2 Cydy = 1 \qquad C\int_0^2 ydy = \frac{Cy^2}{2}\Big|_0^2 = 1$$

Finalmente se tiene que:

2C=1 ∴ C = $\frac{1}{2}$

b) Encuentra la probabilidad de $P(1 \leq y \leq 2)$:

$$P(1 \leq y \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{2} ydy = \frac{1}{2}\int_1^2 ydy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Finalmente se tiene que:

$$P(1 \leq y \leq 2) = \frac{3}{4}$$

6. El tiempo requerido por un grupo de estudiantes de la Facultad de Contaduría para presentar un examen de 1 hora es una variable aleatoria continua con una función de densidad dada por $F(y) = cy^2 + y$ que se comporta en el intervalo de $0 \le y \le 1$. Determinar:

Solución

a) El valor de C.

- $F(y) = \int_0^1 [Cy^2 + y]dy = 1$
- $\left[\frac{cy^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1$
- $\frac{C}{3} + \frac{1}{2} = 1$
- $C = \frac{3}{2}$

b) La probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.

$$P(o \le y \le 0.5) = \int_0^{0.5} \left[\frac{3}{2}y^2 + y\right]dy = \left[\frac{3}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.1875$$

Así como se utiliza la "Integral" para calcular el área que tiene una superficie irregular, la cual se puede descomponer en diferentes figuras geométricas para el cálculo de sus áreas y así obtener el área total.

La "Integral" se utiliza en el ambiente administrativo para calcular los ingresos y costos acumulados de una empresa, por eso es posible utilizarla y de hecho se utiliza en la vida real en muchos cálculos.

RESUMEN

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requiere resolver problemas diversos referentes a usar como herramienta de solución a la “Integral”. Ésta se define como la “Antiderivada de una Función Determinada” y por consecuencia nos lleva a tomar decisiones en cualquier campo de la “Ciencia y la Investigación”. Esto por efecto resultante nos indica la importancia que tiene hoy en día el “Cálculo Integral”.

En el caso de las “Empresas”; éstas requieren hacer uso muy frecuente de dichas metodologías; dado que están conformadas por diversas áreas funcionales en donde de manera constante se toman decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

GLOSARIO

Constante de Integración

Es aquella constante que diferencia a dos o más funciones continuas que son “Integrales” de la misma diferencial.

Integral

Es la operación que consiste en hallar una función que tenga una diferencial determinada.

Integral Definida

Es aquella que al resolverla obtenemos una cierta cantidad o valor en un límite determinado por un intervalo de interés dado un problema previo de análisis. En otras palabras permite obtener el “Área Bajo una Curva”.

Integral Indefinida

Es aquella que al resolverla obtenemos una solución general de forma indefinida que representa una “Familia de Funciones” distinguidas por la “Constante de Integración”.

Integración por Sustitución

Es un método que se aplica de la siguiente forma: Con frecuencia se toma como nueva variable u alguna función de la variable x; una diferencial determinada se transforma en otra que se “Integra” fácilmente mediante alguna de las “Fórmulas de Integración” por diferir de dicha forma sólo en un factor constante.

Integración por Partes

Es un método basado en la “Regla de la Derivada del Producto de dos Funciones”. El cual es sólo aplicable a dos funciones; de las cuales un componente es la función original y el otro componente es la diferencial de la otra función; entones este método debe cumplir la siguiente ecuación: $\int u dv = uv - \int v du$.

Reglas de Integración

Son las “Fórmulas” que se utilizan de una manera o forma estandarizada en la solución de una “Integral”.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes "Integrales Indefinidas":

1. $\int(8x^4 + 4x^3 – 6x^2 – 4x + 5)dx$
2. $\int(ax^2 + bx + c)dx$
3. $\int(x(^{3/2)} – x)dx$
4. $\int(x^2 – 4x + 4)^{(4/3)}dx$
5. $\int(x/(x^2 + 1))^{(1/3)}dx$

ACTIVIDAD 2

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes "Integrales Indefinidas":

1. $\int(x^4)(\sqrt{}(3x^5 – 5))dx$
2. $\int(\sqrt{}(3 – x))(x)dx$
3. $\int((x^3 + 3)^{(3/2)})(x^5)dx$
4. $\int(t/\sqrt{}(t + 3))dt$
5. $\int((x)(2x + 1))^6)dx$

ACTIVIDAD 3

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes "Integrales Indefinidas":

1. $\int\sqrt{(5r + 1)}dx$
2. $\int(3\text{sen } 2x)dx$
3. $\int(\cos^3 x)dx$
4. $\int((x^2)/(x^3 +1))dx$
5. $\int\text{sen}^2 x(\cos x\, dx)$

ACTIVIDAD 4

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes "Integrales Indefinidas"; aplicando las "Reglas de Integración":

1. $\int(\sqrt{(3 + s)})(s + 1)^2dx$
2. $\int((y + 3)/(3 - y)^{(2/3)})dx$
3. $\int(2t^2 + 1)^{(1/3)}(t^3)dt$
4. $\int((x^3)/(x^2 + 4)^{(3/2)})dx$
5. $\int\text{sen } x(\sqrt{(1 - \cos x)})dx$

ACTIVIDAD 5

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes "Integrales Indefinidas"; aplicando las "Reglas de Integración":

1. $\int e^{(2x + 1)}dx$

2. $\int x^{2}e^{2x\uparrow 3}dx$
3. $\int(\ln x/x)dx$
4. $\int((e^{3x})/(1 – 2e^{3x})^{2})dx$
5. $\int(1/((x)(\ln x)^{2}))dx$

ACTIVIDAD 6

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes “Integrales Indefinidas”; aplicando las “Reglas de Integración”:

1. $\int((e^{x})/(e^{x} + e))dx$
2. $\int(e^{3x}e^{2x}dx$
3. $\int(1/(1 + e^{x}))dx$
4. $\int ae^{t}dt$
5. $\int a^{z\ln z}(\ln z + 1)dz$

ACTIVIDAD 7

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes “Integrales Indefinidas”; por el “Método de Sustitución”:

1. $\int 3^{2x}dx$
2. $\int(a^{t}e^{t}dt$
3. $\int(4^{\ln(1/x)}/x)dx$
4. $\int(3e^{2x}/(1 + e^{2x}))dx$
5. $\int(e^{2x}/(e^{x} - 1))dx$

ACTIVIDAD 8

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes “Integrales Indefinidas”; por el “Método de Sustitución”:

1. ∫e(1 – x)dx
2. ∫(x(x2x + 1)5dx
3. ∫(2x4/(x5 + 1))dx
4. ∫(ln 5x/x)dx
5. ∫(e√x/√x)dx

ACTIVIDAD 9

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes “Integrales Indefinidas”; por el “Método de Sustitución”:

1. $\int(x/(x - 1))dx$
2. $\int(x + 1)(x - 2)^9dx$
3. $\int(x + 3)/(x - 4)^2)dx$
4. $\int(1/(3x + 5)dx$
5. $\int a^{nx}dx$

ACTIVIDAD 10

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes “Integrales Indefinidas”; por el “Método por Partes”:

1. $\int xe^{3x}dx$

2. $\int x \cos 2x dx$
3. $\int x \sec x \tan x \, dx$
4. $\int x 3^x dx$
5. $\int x^2 \ln x dx$

ACTIVIDAD 11

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes "Integrales Indefinidas"; por el "Método por Partes":

1. $\int (xe^x/(x + 1)^2)dx$
2. $\int x^2 \text{ sen } 3x \, dx$
3. $\int (\text{sen } 2x/e^x)dx$
4. $\int x^2 3^x dx$
5. $\int \ln (x + 2)dx$

ACTIVIDAD 12

Desarrolla los procesos correspondientes a las siguientes "Integrales Indefinidas"; por el "Método por Partes":

1. $\int \sec^5 x dx$
2. $\int z^2 \cos 2z \, dz$
3. $\int x \text{ sen}^{-1} x \, dx$
4. $\int (xe^x/(x + 1)^2)dx$
5. $\int (\ln x)^2 dx$

ACTIVIDAD 13

Evalúa y desarrolla las siguientes “Integrales Definidas”:

1. $\int_{0}^{1}(5x - \; 8x3 + 1)dx$

2. $\int_{-1}^{2} 30(5x - 2)^{2}dx$

3. $\int_{0}^{1}(x - 3)(x2 – 6x + 2)^{3}dx$

4. $\int_{1}^{4}(\sqrt{x} + x^{-(3/2)})dx$

5. $\int_{0}^{1}xe^{x}dx$

ACTIVIDAD 14

Evalúa y desarrolla las siguientes “Integrales Definidas:

1. $\int_{2}^{8}(x/(x - 1))dx$

2. $\int_{4}^{11}(x + 1)(x – 2)^{9}dx$

3. $\int_{6}^{10}(x + 3)/(x – 4)^{2})dx$

4. $\int_{6}^{9}(1/(3x + 5)dx$

5. $\int_{0}^{2}a^{nx}dx.$ Si a = 2 y n = 3[1]

ACTIVIDAD 15

Evalúa y desarrolla las siguientes “Integrales Definidas”:

1. $\int_{1}^{2}(x^4)(\sqrt{(3x^5 - 5)})dx.$

2. $\int_{4}^{6}(\sqrt{(3 - x)})(x)dx.$

3. $\int_{0}^{2}((x^3 + 3)^{(3/2)})(x^5)dx.$

4. $\int_{1}^{2}(t/\sqrt{(t + 3)})dt.$

5. $\int_{-1}^{4}((x)(2x + 1))^{6})dx.$

ACTIVIDAD 16

Evalúa y desarrolla las siguientes “Integrales Definidas”; por el “Método por Sustitución”:

1. $\int_{1}^{2} \sqrt{10^{3x}}dx.$

2. $\int_{0}^{2} (2^x - 2^{2-x})dx.$

3. $\int_{0}^{1} (4/5x^4)dx.$

4. $\int_{0}^{2} (x\sqrt{(3x + 4)})dx.$

5. $\int_{-2}^{2} (t^3 - 3t)dt.$

ACTIVIDAD 17

Evalúa y desarrolla las siguientes “Integrales Definidas”; por el “Método por Sustitución”:

1. $\int_{0}^{1}(2x^2 + 4x + 1)dx$

2. $\int_{0}^{\pi/6}(\text{sen } t/\cos^2 t)dt$

3. $\int_{1}^{5}(1/\sqrt{}(3x - 1))dx$

4. $\int_{0}^{2}(x\sqrt{}(3x - 6))dx$

5. $\int_{0}^{\pi/2}(\sqrt{}\text{sen } x\, dx$

ACTIVIDAD 18

Evalúa y desarrolla las siguientes “Integrales Definidas”; por el “Método por Sustitución”:

1. $\int_{1}^{4}\sqrt{}x dx$

2. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\text{sen } x/x)dx$

4. $\int_{0}^{1}(1/(x^2 + x + 1))dx$

5. $\int_{0}^{\pi}(\text{sen } x/(1 + x))\, dx$

3. $\int_{0}^{\pi/2} \text{sen } 5x \cos 3x \, dx$

ACTIVIDAD 19

Evalúa y desarrolla las siguientes “Integrales Definidas”; por el método de “Integración por Partes”:

1. $\int_{0}^{2} (x^2 3^x dx$

2. $\int_{0}^{2} xe^{2x} dx$

3. $\int_{-1}^{2} \ln(x + 2) dx$

4. $\int_{0}^{0.5\pi/2} (\cos \sqrt{2}x) dx$

5. $\int_{1}^{3} xe^{4x} dx.$

ACTIVIDAD 20

Evalúa y desarrolla las siguientes “Integrales Definidas”; por el método de “Integración por Partes”:

1. $\int_{0}^{\pi/3} \text{sen } 3x \cos x \, dx$

2. $\int_{0}^{1} x \text{ sen}^{-1} x dx$

3. $\int_{0}^{\pi/4} e^{3x} \text{sen } 4x \, dx$

4. $\int_{0}^{3\pi/4} (\sqrt{x} + x^{-(3/2)}) dx$

5. $\int_{-\pi}^{\pi} z^2 \cos 2z \, dz$

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

Contesta el siguiente cuestionario.

1. Define el concepto de integral.
2. Define el concepto de integral definida.
3. Define el concepto de integral indefinida.
4. ¿Cómo se resuelve una “Integral” mediante su fórmula?
5. ¿Cómo se aplica el “Método de Cambio de Variable” de una “Integral”?
6. Da un ejemplo teórico de una aplicación de la “Integral Definida”.
7. Da un ejemplo teórico de una aplicación de la “Integral Indefinida”.
8. Da un ejemplo teórico de la aplicación de “Integral” en el campo de la “Estadística”.
9. Define el concepto de “Área bajo la Curva”.
10. Menciona dos ejemplos teóricos en donde se aplique el “Área bajo la Curva” en la “Administración”.

LO QUE APRENDÍ

Resuelve los siguientes problemas.

1. La función de probabilidad de la duración de las llamadas telefónicas en una cierta ciudad es $f(x) = 0.4e^{-0.4x}$, donde x representa la duración en minutos de una llamada seleccionada aleatoriamente. ¿Qué porcentaje de las llamadas duran entre 1 y 2 minutos?

2. La función de probabilidad de la duración de las llamadas telefónicas en una cierta ciudad es $f(x) = 0.4e^{-0.4x}$, donde x representa la duración en minutos de una llamada seleccionada aleatoriamente. ¿Qué porcentaje de las llamadas duran 2 minutos o menos?

3. La función de probabilidad de la duración de las llamadas telefónicas en una cierta ciudad es $f(x) = 0.4e^{-0.4x}$, donde x representa la duración en minutos de una llamada seleccionada aleatoriamente. ¿Qué porcentaje de las llamadas duran más de 2 minutos?

4. Los registros indican que t meses después del principio del año, el precio del pollo en los supermercados locales era $p(t) = 0.06t^2 – 0.02t + 1.2$ dólares por libra. ¿Cuál fue el precio medio del pollo durante los primeros 6 meses del año?

5. La densidad de población a r millas del centro de una cierta ciudad es $D(r) = 6{,}000e^{-0.1r}$ personas por milla cuadrada. ¿Cuántas personas viven a distancias entre 3 y 3 millas del centro de la ciudad?

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Elige la respuesta correcta a los siguientes problemas.

1. Sea f(x) una función; y su "Antiderivada" es F´(x) = $12x^2 + 2x$; entonces F(x) es:
   a) $F(x) = -4x^3 + x^2 + C$
   b) $F(x) = 4x^3 + x^2 + C$
   c) $F(x) = 4x^4 + x^2 + C$
   d) $F(x) = 4x^3 - x^2 + C$
   e) $F(x) = 4x^4 + x^3 + C$

2. Sea f(x) una función; y su "Antiderivada" es F´(x) = (3x + 5); entonces F(x) es:
   a) $F(x) = (3/2)x^4 + 5x + C$
   b) $F(x) = (3/2)x^3 + 5x + C$
   c) $F(x) = (3/2)x^2 + 5x + C$
   d) $F(x) = (-3/2)x^2 + 5x + C$
   e) $F(x) = (3/2)x^2 - 5x + C$

3. Sea f(x) una función; y su "Antiderivada" es F´(x) = $x^{(2/3)}$; entonces F(x) es:
   a) $F(x) = (9/5)x^{(5/9)} + C$
   b) $F(x) = (7/5)x^{(5/7)} + C$
   c) $F(x) = (2/5)x^{(5/2)} + C$

d) $F(x) = (4/5)x^{(5/4)} + C$

e) $F(x) = (3/5)x^{(5/3)} + C$

4. Sea f(x) una función; y su "Antiderivada" es $F´(x) = 1/x^4 + 1/x^{(1/4)}$; entonces F(x) es:

a) $F(x) = -(1/3)x^3 + (4/3)x^{(3/4)} + C$

b) $F(x) = (1/3)x^3 + (4/3)x^{(3/4)} + C$

c) $F(x) = -(1/3)x^3 - (4/3)x^{(3/4)} + C$

d) $F(x) = -(1/3)x^2 + (4/3)x^{(3/5)} + C$

e) $F(x) = (1/3)x^2 + (4/3)x^{(3/4)} + C$

5. Sea f(x) una función; y su "Antiderivada" es $F´(x) = 2x\sqrt{}(1 – x^2)$; entonces F(x) es:

a) $F(x) = (2/3)(-1 + x^2)^{(3/2)} + C$

b) $F(x) = (-2/3)(1 + x^2)^{(3/2)} + C$

c) $F(x) = (2/3)(1 - x^2)^{(3/2)} + C$

d) $F(x) = (2/3)(1 + x^2)^{(3/2)} + C$

e) $F(x) = -(2/3)(-1 + x^2)^{(3/2)} + C$

II. Elige la respuesta correcta a los siguientes problemas.

1. Sea f(x) una función; y su “Antiderivada” es F´(x) = √(3x + 4); entonces F(x) es:
    a) $F(x) = (2/9)(-3x - 4)^{(3/2)} + C$
    b) $F(x) = (2/9)(-3x + 4)^{(3/2)} + C$
    c) $F(x) = (2/9)(3x - 4)^{(3/2)} + C$
    d) $F(x) = (-2/9)(3x + 4)^{(3/2)} + C$
    e) $F(x) = (2/9)(3x + 4)^{(3/2)} + C$

2. Sea f(x) una función; y su “Antiderivada” es $F´(x) = t(5 + 3t^2)^8$; entonces F(x) es:
    a) $F(x) = 1/54(5 + 3t2)^9 + C$
    b) $F(x) = 1/52(5 + 3t2)^9 + C$
    c) $F(x) = 1/59(5 + 3t2)^9 + C$
    d) $F(x) = 1/56(5 + 3t2)^9 + C$
    e) $F(x) = 1/51(5 + 3t2)^9 + C$

3. Sea f(x) una función; y su “Antiderivada” es $F´(x) = x^2(7 - 4x^3)^{(1/5)}$; entonces F(x) es:
    a) $F(x) = -(5/72)(7 – 4x^3)^{(6/5)} + C$
    b) $F(x) = -(5/71)(7 – 4x^3)^{(6/5)} + C$
    c) $F(x) = -(5/76)(7 – 4x^3)^{(6/5)} + C$
    d) $F(x) = -(5/73)(7 – 4x^3)^{(6/5)} + C$
    e) $F(x) = -(5/77)(7 – 4x^3)^{(6/5)} + C$

4. Sea f(x) una función; y su “Antiderivada” es $F´(x) = 4x2/(1 – 8x^3)^4$; entonces F(x) es:
    a) $F(x) = (1/13)(1 – 8x^3)^3 + C$

b) $F(x) = (1/16)(1 – 8x^3)^3 + C$

c) $F(x) = (1/11)(1 – 8x^3)^3 + C$

d) $F(x) = (1/18)(1 – 8x^3)^3 + C$

e) $F(x) = (1/19)(1 – 8x^3)^3 + C$

5. Sea f(x) una función; y su “Antiderivada” es $F´(x) = x^2\sqrt{}(1 + x)$; entonces F(x) es:

a) $F(x) = -(2/7)(1 + x)^{(7/2)} - (4/5)(1 + x)^{(5/2)} + (2/3)(1 + x)^{(3/2)} + C$

b) $F(x) = (2/7)(1 + x)^{(7/2)} - (4/5)(1 + x)^{(5/2)} + (2/3)(1 + x)^{(3/2)} + C$

c) $F(x) = (2/7)(1 + x)^{(7/2)} - (4/5)(1 + x)^{(5/2)} - (2/3)(1 + x)^{(3/2)} + C$

d) $F(x) = (2/7)(1 + x)^{(7/2)} + (4/5)(1 + x)^{(5/2)} + (2/3)(1 + x)^{(3/2)} + C$

e) $F(x) = -(2/7)(1 + x)^{(7/2)} - (4/5)(1 + x)^{(5/2)} - (2/3)(1 + x)^{(3/2)} + C$

III. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Un cierto pozo de petróleo que produce 300 barriles de petróleo crudo al mes se secará en 3 años. Se estima que dentro de t meses el precio del petróleo crudo será de $P(t) = 18 + 0.3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo. ¿Cuál será "Ingreso" futuro total del pozo?
    a) $ 207,370.00 dólares
    b) $ 207,380.00 dólares
    c) $ 207,360.00 dólares
    d) $ 207,340.00 dólares
    e) $ 207,390.00 dólares

2. Un detallista recibe un cargamento de 10,000 kg de arroz que serán consumidos en un periodo de 5 meses a un ritmo constante de 2,000 kg por mes. Si el almacenaje cuesta un centavo por kg por mes. ¿Cuánto pagará el detallista en costes de almacenaje en los próximos 5 meses?
    a) $ 250.00
    b) $ 240.00
    c) $ 260.00
    d) $ 235.00
    e) $ 270.00

3. Cuando tiene x años, una cierta maquinaria industrial genera ingresos a un ritmo de $R(x) = 5{,}000 – 20x^2$ dólares por año y da por resultado unos costos que se acumulan a un ritmo de $C(x) = 2{,}000 + 10x^2$ dólares por año. ¿Cuántos años es provechoso el uso de la maquinaria? y ¿cuáles son las ganancias netas totales generadas por la maquinaria durante el periodo de tiempo de la pregunta anterior?

a) x = 12 años; Ganancias = $ 24,000.00 dólares

b) x = 09 años; Ganancias = $ 18,000.00 dólares

c) x = 11 años; Ganancias = $ 22,000.00 dólares

d) x = 08 años; Ganancias = $ 16,000.00 dólares

e) x = 10 años; Ganancias = $ 20,000.00 dólares

4. La función de densidad de probabilidad para la vida de los componentes electrónicos construidos por una cierta compañía es $f(x) = 0.02e^{-0.02x}$, donde x representa la vida en meses de un componente seleccionado aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la vida de un componente seleccionado al azar esté entre 20 y 30 meses?

a) $P(20 \le x \le 30) = 12.20$ %

b) $P(20 \le x \le 30) = 12.15$ %

c) $P(20 \le x \le 30) = 12.25$ %

d) $P(20 \le x \le 30) = 12.05$ %

e) $P(20 \le x \le 30) = 12.30$ %

5. Durante varias semanas el departamento de carreteras ha estado registrando la velocidad del tráfico que fluye por una cierta salida del centro de la ciudad. Los datos sugieren que entre la 1:00 y las 6:00 P.M. en un día normal de la semana la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente de $S(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40$ km por hora, donde t es el número de horas desde mediodía. Calcula la velocidad media del tráfico entre la 1:00 y las 6:00 P.M.

a) 78.00 km/h

b) 77.56 km/h

c) 79.20 km/h

d) 78.50 km/h

e) 80.00 km/h

IV. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Un día de cada mes depositas 100 dólares en una cuenta que produce interés al tipo anual del 8%, compuesto continuamente. Usa una “Integral Definida” para estimar: ¿cuánto tendrías en tu cuenta transcurridos 2 años (inmediatamente antes de hacer tu 25º depósito?
    - a) $ 2,602.66 dólares
    - b) $ 2,607.38 dólares
    - c) $ 2,597.36 dólares
    - d) $ 2,617.34 dólares
    - e) $ 2,585.39 dólares

2. Usa una “Integral Definida” para estimar el “Valor Actual” de una anualidad que paga 100, dólares por mes en los próximos 2 años si el tipo de interés que prevalece permanece fijo a un 8 por 100 anual compuesto continuamente.
    - a) $ 2,050.45
    - b) $ 1,940.56
    - c) $ 2,260.89
    - d) $ 2,235.10
    - e) $ 2,217.84

3. La dirección de una cadena nacional de heladerías está vendiendo una licencia para cinco años para manejar su nuevo mercado de una importante ciudad. Experiencias pasadas en otras ciudades similares sugieren que dentro de t años la licencia estará generando beneficios a un ritmo de $f(t) = 14{,}000 + 490t$ dólares por año. Si el tipo anual de interés predominante permanece fijo durante los 5 años a un 7 por 100 compuesto continuamente. ¿Cuál es el “Valor Actual” de la licencia?

a) Valor Actual = $ 63,729.49 dólares

b) Valor Actual = $ 63,429.49 dólares

c) Valor Actual = $ 63,929.49 dólares

d) Valor Actual = $ 63,829.49 dólares

e) Valor Actual = $ 63,629.49 dólares

4. Acaba de abrirse un nuevo manicomio de distrito. Las estadísticas reunidas en idénticas condiciones sugieren que la fracción de pacientes que estarán aún recibiendo tratamiento en la clínica t meses después de su visita inicial viene dado por la función $f(t) = e^{-t/20}$. La clínica acepta inicialmente a 300 personas para tratamiento y planea aceptar nuevos pacientes a un ritmo de 10 por mes. Aproximadamente: ¿cuánta gente estará recibiendo tratamiento en la clínica dentro de 15 meses?

a) 245

b) 247

c) 240

d) 250

e) 235

5. Determina una expresión para el ritmo (en centímetros cúbicos por segundo) al que la sangre fluye a través de una arteria de radio R si la velocidad de la sangre a r centímetros del eje central es de
$S(r) = k(R^2 – r^2)$, donde k es una constante.

a) $-kr^2/2$ cm^3/s

b) $-kr^6/3$ cm^3/s

c) $-kr^3/3$ cm^3/s

d) $-kr^4/2$ cm^3/s

e) $-kr^5/5$ cm^3/s

V. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Los registros indican que t horas después de la medianoche, la temperatura en el aeropuerto local era $f(t) = -0.3t^2 + 4t + 10$ Grados Celsius. ¿Cuál será la temperatura media en el aeropuerto entre las 9:00 A.M. y el Mediodía?
   a) 18.9º C
   b) 18.4º C
   c) 18.7º C
   d) 18.5º C
   e) 18.6º C

2. Después de t meses en el trabajo, un empleado postal puede clasificar correo a un ritmo de $Q(t) = 700 – 400e^{-0.5t}$ cartas por hora. ¿Cuál es el ritmo medio al que el empleado clasifica el correo durante los primeros 3 meses de trabajo?
   a) 492.83 cartas/hora
   b) 496.83 cartas/hora
   c) 499.83 cartas/hora
   d) 491.83 cartas/hora
   e) 495.83 cartas/hora

3. Un estudio indica que dentro de x meses la población de un cierto pueblo estará aumentando a un cierto ritmo de $5 + 3x^{(2/3)}$ personas por mes. ¿Cuánto crecerá la población del pueblo en los próximos 8 meses?
   a) 93 personas
   b) 89 personas
   c) 95 personas

e) 94 personas

d) 98 personas

4. El valor de reventa una cierta maquinaria industrial decrece durante un periodo de 10 años a un ritmo que cambia con el tiempo. ¿Cuándo la maquinaria tiene x años, el ritmo al que está cambiando su valor es de 220(x – 10) dólares por año. ¿En cuánto tiempo se deprecia la maquinaria durante el segundo año?

   a. $ 1,875.00 dólares

   b. $ 1,870.00 dólares

   c. $ 1,880.00 dólares

   d. $ 1,860.00 dólares

   e. $ 1,850.00 dólares

5. En una cierta fábrica, el costo marginal es de $6(q - 5)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es de q unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción aumenta de 10 a 13 unidades?

   a) $ 770.00 dólares

   b) $ 777.00 dólares

   c) $ 779.00 dólares

   d) $ 775.00 dólares

   e) $ 774.00 dólares

VI. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Se estima que dentro de t días la cosecha de un agricultor estará aumentando a un ritmo de $0.3t^2 + 0.6t + 1$ búshels por día. ¿En cuánto aumentará el valor de la cosecha durante los próximos 5 días si el precio de mercado permanece fijo en 3 dólares por bushel?
   a) $ 75.00 dólares
   b) $ 73.00 dólares
   c) $ 78.00 dólares
   d) $ 77.00 dólares
   e) $ 70.00 dólares

2. Se calcula que la "Demanda" de un producto industrial está creciendo exponencialmente a un ritmo de 2 por 100 por año. Si la "Demanda Actual" es de 5,000 unidades por año y el precio permanece fijo en 400 dólares por unidad. ¿Qué "Ingresos" recibirá el fabricante de la venta del producto en los próximos 2 años?
   a) $ 3,881,077.40 dólares
   b) $ 4,281,077.40 dólares
   c) $ 3,981,077.40 dólares
   d) $ 4,181,077.40 dólares
   e) $ 4,081,077.40 dólares

3. La función de densidad de probabilidad para el intervalo de tiempo entre las llegadas de aviones sucesivos en un cierto aeropuerto es $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$, donde x es el tiempo en minutos entre las llegadas en un par de aviones sucesivos seleccionados aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que dos aviones sucesivos seleccionados al azar lleguen dentro de un periodo de 5 minutos el uno al otro?

a) 63.00 %

b) 63.12 %

c) 63.30 %

d) 63.21 %

e) 63.24 %

4. La función de densidad de probabilidad para el intervalo de tiempo entre las llegadas de aviones sucesivos en un cierto aeropuerto es $f(x) = 0.2e^{-0.2x}$, donde x es el tiempo en minutos entre las llegadas en un par de aviones sucesivos seleccionados aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que dos aviones sucesivos seleccionados al azar lleguen con una separación de más de 6 minutos?

   a) 30.23 %

   b) 30.12 %

   c) 30.08 %

   d) 30.45 %

   e) 30.03 %

5. Halla el área de la región que está bajo la curva $y = x^2 + 4$ y está acotada por esta curva la recta $y = -x + 10$, y los ejes de coordenadas.

   a) 119/3

   b) 123/3

   c) 128/3

   d) 127/3

   e) 133/3

VIII. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. La integral de X^3 es igual a:

   a) $X^4/4+c$

   b) $X^2/3+c$

   c) $X^3/3+c$

   d) X^2+c

   e) $X/3+c$

2. La integral de 5 X^5 es igual a:

   a) 5 $X^3/3+c$

   b) 5 $X^2/3+c$

   c) 5 $X^6/6+c$

   d) 5 X^6+c

   e) 5X/3+c

3. La integral de ln x es igual a:

   a) xln(x)-x+c

   b) –xln(x)-x+c

   c) xln(x)+x+c

   d) – xln(x)+x+c

   e) xln (x) –x-c

4. La integral de exp (x/2) es igual a:

   a) -Exp(x/2)/2+c

   b) Exp(x/2)+c

   c) -Exp(x/2)+c

   d) 2Exp(x/2)/2+c

   e) (–2) Exp(x/2)/2+c

5. La integral de -5exp(-x/2) es igual a:

a) (–5)exp(-x/2)+c

b) (2)exp(-x/2)+c

c) (5)exp(-x/2)+c

d) (–2)exp(-x/2)+c

e) 10exp(-x/2)+c

6. La integral de sen 4x es igual a:

a) (cos (4x))/4 +c

b) –cos (4x)/4+c

c) (sen (4x))/4+c

d) –(sen (4x))/4+c

e) –cos (4x)+c

7. La integral de 3sen 6x es igual a:

a) 6(cos (6x))/3 +c

b) –cos (6x)/2+c

c) (sen (6x))/2+c

d) –(sen (6x))/3+c

e) –cos (6x)+c

8. La integral de cos 3x es igual a:

a) (cos (3x))/3+c

b) –cos (3x)/3+c

c) (sen (3x))/3+c

d) –(sen (3x))/3+c

e) –cos (3x)+c

9. La integral de 3 cos 4x es igual a:

a) (3)(Cos (4x))/2 +c

b) (–3)cos (4x)/2+c

c) (3)(sen (4x))/4+c

d) (–3)(sen (4x))/2+c

e) (–3)cos (4x)+c

10. La integral de (x+3)(x+2) es igual a:

a) $X^3/4+ 5\ X^2/2+6x+c$

b) $X^3/3+ 5X^2/2+6x+c$

c) $X^3/3+ 5\ X^2/2+6x+c$

d) $X^3/3+ X^3/2+x+c$

e) $X^3/3+ X^3/2+x+c$

MESOGRAFÍA

Bibliografía sugerida

Autor	Capítulo	Páginas
Leithold (1985)	6. La Diferencial y la Antidiferenciación.	252-283
	7. La Integral Definida.	286-361
	9. Técnicas de Integración.	450-505
Leithold (1982)	5. La Diferencial y la Antidiferencial.	342-388
	6. La Integral Definida.	392-455
	7. Aplicación de la Integral Definida.	456-498
	8. Técnicas de Integración.	631-675
Hoffman y Bradley (1995)	5. Antiderivación.	309-342
	6. Temas adicionales de Integración.	345-403

Haeussler y Paul (1997)	16. Integración.	722-794
	17. Métodos y aplicaciones de la Integración.	797-849
Granville (1985)	12. Integración.	227-274
	13. Constante de Integración.	277-281
	14. Integral Definida.	287-305

Bibliografía básica

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Swokowsky, Earl W. (1983). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica.

Bibliografía complementaria

Bruegge, Bernd. (2001). *Ingeniería de software orientada a objetos*. México: Prentice Hall.

Joyanes, Luis. (2003). *Fundamentos de programación Algoritmos Estructuras de datos y objetos*. (3ª ed.) Madrid: McGraw-Hill.

Pfleeger, Shari Lawrence. (2002). *Ingeniería de software, Teoría y práctica*. México: Prentice Hall.

Piattini, Mario y Félix García (coord.) (2003). *Calidad en el desarrollo y mantenimiento de software*. México: Alfaomega / Ra-Ma.

Piattini, M. et al. (2007). *Análisis y diseño de aplicaciones informáticas de gestión*. México: Alfaomega / Ra-Ma.

Pressman, Roger S. (2002). *Ingeniería de software*. (5ª ed.) México: McGraw-Hill.

Sommerville, Ian (2001). *Ingeniería de software.* (6ª ed.) México: Addison Wesley.

Weitzenfield, Alfredo. (2003). *Ingeniería de software orientada a objetos con UML, Java e Internet*. México: Thomson.

Sitios de Internet

Sitio	Descripción
http://www.inetor.com	Integrales.
http://math2.org/math/integrals/es-tableof.htm	Tabla de Integrales.
http://www.vitutor.com/integrales/metodos/integrales_ejercicios.html	Ejercicios resueltos de Integrales.
http://www.aulafacil.com/matematicas-integrales/curso/Temario.htm	Curso Gratis de Cálculo Integral.

UNIDAD 5

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER GRADO

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá los conceptos, métodos de resolución y aplicación de las ecuaciones diferenciales.

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de esta unidad se muestra el concepto de “Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Grado”. De igual forma los diferentes “Métodos” para la obtención de la “Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Grado” para una “Función”.

LO QUE SÉ

¿Qué nociones tienes de los “Métodos Básicos” para resolver “Derivadas” e “Integrales”?

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

5.1. Concepto de ecuación diferencial

5.2. Soluciones general y particular

5.3. Ecuaciones diferenciales separables

5.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

5.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

5.1. Concepto de ecuación diferencial

Dada una función y = f(*x*), la derivada es: $dy / dx = f'(x)$.

Es también una función de (x) y se encuentra mediante alguna regla apropiada. Por ejemplo, si $y = e^{x^2}$ entonces $dy / dx = 2xe^{x^2}$ o bien $dy / dx = 2xy$

El problema que se desea resolver es $dy / dx = 2xy$, de tal forma que se encuentre de alguna manera una función $y = f(x)$ que satisfaga la ecuación. En una palabra, se desea resolver “Ecuaciones Diferenciales”.

Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales se dividen de acuerdo a lo siguiente:

- Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una “Ecuación Diferencial Ordinaria”.

- Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama “Ecuación Diferencial Parcial”.

El orden de la más alta derivada en una “Ecuación Diferencial” se llama “Orden de la Ecuación”.

5.2. Soluciones general y particular

- Una “Solución General” de una “Ecuación Diferencial de Primer Orden” es de la forma: $y' + ky = 0$, en la cual k es una constante.
- Esta ecuación diferencial tiene como solución la siguiente expresión matemática: $y = ce^{-kx}$

- Donde c es una constante cualquiera que esta sea, y así la expresión matemática anterior representa una “Solución General”.
- Una “Solución Particular” es aquella donde las constantes c y k están determinadas por un valor en particular para cada una de ellas.
- Dándole un valor a k=2 y c=4 tenemos que la “Ecuación Diferencial de Primer Orden” es: $y' + 2y = 0$. Y su “Solución Particular” es $y = 4e^{-2x}$

5.3. Ecuaciones diferenciales separables

Una “Ecuación Diferenciable Separable” es una “Ecuación Diferenciable” que puede describirse de la forma siguiente:

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dx}{dy} = 0 \qquad \text{Ec. (1)}$$

En forma análoga la “Ec. (1)” que representa a una “Ecuación Diferenciable Separable”, se puede describir de la siguiente manera:

$$M(x,y)\,\frac{dx}{dy} = -N(x, y) \qquad \text{Ec. (2)}$$

Y la “Ec. (2)” a su vez se puede simplificar en la siguiente expresión:

$$M(x,y)\,dx = -N(x,y)\,dy \qquad \text{Ec. (3)}$$

Integrando la “Ec. (3)” se tiene como resultado la “Ec. 4”, de la siguiente forma:

$$\int M(x,y)\,dx + \int (n(x,y)\,dy = c \qquad \text{Ec. (4)}$$

Ejemplo

Resolver la siguiente "Ecuación Diferencial" $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2+y^2}$, por "separación de Variables".

Solución

Despejando el término x^2 tenemos lo siguiente:

$$\boxed{-x^2 + (2+y^2)\frac{dy}{dx} = 0}$$

Como sí se pudo despejar, es una ecuación diferencial separable su solución está dada por:

$$(2+y^2)dy = x^2 dx$$

Integrando la expresión en ambos lados de la igualdad:

$$\int (2+y^2)dy = \int x^2 dx$$

$$\int (2+y^2)dy = 2y + \frac{y^3}{3} + a$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + b$$

Con a, b constantes, se tiene lo siguiente:

$$2y+\frac{y^3}{3}+a=\frac{x^3}{3}+b$$

Multiplicando la expresión matemática por 3 obtenemos (para eliminar el valor de 3 que divide a algunos de los elementos):

$$6y+y^3+3a=x^3+3b$$

Despejando a x en función de y

$$\boxed{\begin{aligned} x^3+3b&=y^3+6y+3a\\ x^3&=y^3+6y+3a-3b\\ x&=\sqrt[3]{y^3+6y+3a-3b}\end{aligned}}$$

Que es la solución buscada.

5.4. Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden

Una "Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden" se representa matemáticamente de la siguiente manera:

$$y' + f(x)y = h(x)$$

Considerando que h(*x*) y f(*x*) son dos funciones continuas dadas en un intervalo a< x< b, su solución se encuentra dada por:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \left(\mu(x)h(x)dx\right)\right] + c$$

Donde:

$$\mu(x) = e^{\left[\int f(x)dx\right]}$$

Ejemplo

Determine la "Solución General" de la siguiente "Ecuación Diferencial":

y`+4xy =x

Solución

Sea: f(x)=4x y h(x)=x

Primero encontramos μ(x); resultando:

$$\mu(x) = e^{\int 4x dx}$$

$$\mu(x) = e^{2X^2}$$

$$Y = \frac{1}{e^{2x^2}}\left[\int xe^{2x^2}dx\right] + c = \frac{1}{e^{2x^2}}\left[\frac{1}{4}\int 4xe^{2x^2}dx + c\right] = \frac{1}{4e^{2x^2}}\left[e^{2x^2} + c\right] = \frac{1}{4} + \frac{c}{e^{2x^2}}$$

5.5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

En este punto se muestra cómo las “Ecuaciones Diferenciales de Primer Grado” tienen diversos tipos de aplicaciones en los diferentes campos profesionales.

Problema de mezclas: A veces, el mezclar dos líquidos da lugar a una “Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden”.

En el siguiente ejemplo se considera la mezcla de dos soluciones salinas de concentraciones diferentes:

Se disuelven inicialmente 50 libras (lb) de sal en un tanque que contiene 300 galones (gal) de agua. Posteriormente se bombea salmuera al tanque a razón de 3 galones por minuto; luego la solución, adecuadamente mezclada, se bombea fuera del tanque, también a razón de 3 galones / minuto. Si la concentración de la solución que entra es de 2 lb / gal, determine la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 50 min? ¿Cuánta después de un tiempo largo?

Solución

Sea A(t) la cantidad de sal (en libras) que hay en el tanque en un instante cualquiera. En problemas de esta clase, la rapidez neta con que A(t) cambia está dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix}\textbf{rapidez con que}\\ \textbf{la sustancia entra}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\textbf{rapidez con que}\\ \textbf{la sustancia sale}\end{pmatrix} = R_1 - R_2$$

En consecuencia, la primera ecuación se transforma en

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}$$

La resolvemos sujeta a la condición inicial $A(0) = 50$.

Puesto que el factor integrante es $e^{t/100}$, puede escribirse como:

$$d/dt\,[e^{t/100}A] = 6\,e^{t/100}$$

Por lo tanto:

$$e^{t/100}A = 600\,e^{t/100} + c$$

$$A = 600 + ce^{-t/100}$$

Cuando $t = 0$ se tiene $A = 50$; se halla así que $c = -550$. Finalmente, se obtiene:

$$A(t) = 600 - 550\,e^{-t/100} = 600 - 550\,e^{-50/100} = 600 - 550e^{-.5} = 600 - 550\,(0{,}6065306597) = 600 - 333.5918628 = 266.408$$

Para $t = 50$ *se tiene que* $A(50) = 266.41$ lb. Además, cuando $t \to \infty$, de la ecuación anterior y en la siguiente tabla se puede ver que $A \to 600$. Por supuesto, esto es lo que se esperaría; después de un periodo largo, entonces el número de libras de sal presente en la solución debe ser:

(300 gal)(2lb / gal) = 600 lb	
t (minutos)	**A (libras)**
50	266.41
100	397.67
150	477.27
200	525.57
300	572.62
400	589.93

En el ejemplo anterior se supuso que la rapidez con que la solución se bombea al tanque es igual a la rapidez con que la solución se bombeó hacia fuera. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así; la salmuera mezclada podría ser bombeada hacia fuera con una rapidez mayor o menor que la rapidez con que la otra solución se bombea hacia el interior. La ecuación diferencial que resulta en este caso es lineal con un coeficiente variable.

RESUMEN

Hoy en día existen muchas situaciones en el campo profesional en las cuales se requiere calcular valores para diferentes tipos de “Problemas Diversos” cuya resolución involucra a las “Ecuaciones Diferenciales”, a fin de que satisfaga una “Toma de Decisión” que beneficie por consiguiente a la sociedad en cualquier entorno de la “Ciencia y la Investigación”.

Además, las “Empresas” requieren hacer uso muy frecuente de estas metodologías, dado que están conformadas por diversas áreas funcionales en donde se toman de manera constante decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

GLOSARIO

Ecuación Diferencial

Es una ecuación que contiene diferenciales o derivadas.

Solución de una Ecuación Diferencial

Es una función de las variables que sustituida ella y las derivadas en la ecuación diferencial la satisfacen.

Solución General

Es la solución completa o integral general de una ecuación diferencial de n-ésimo orden con dos variables contiene n constantes arbitrarias.

Solución Particular

Es aquella que resulta de asignar valores particulares a una o a todas las constantes al ser sustituidos en la “Solución General”.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Encuentra la "Solución General" correspondiente y enuncia una "Solución Particular" para cada una de las siguientes "Ecuaciones Diferenciales":

1. $3y'' - y' = 0$
2. $y'' - 16y = 0$
3. $y'' + 9y = 0$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $y'' + 3y' - 5y = 0$

ACTIVIDAD 2

Encuentra la "Solución General" correspondiente y enuncia una "Solución Particular" para cada una de las siguientes "Ecuaciones Diferenciales":

1. $12y'' - 5y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = 0$
3. $3y'' + 2y' + y = 0$
4. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
5. $y''' - y = 0$

ACTIVIDAD 3

Encuentra la “Solución General” correspondiente y enuncia una “Solución Particular” para cada una de las siguientes “Ecuaciones Diferenciales”:

1. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$
2. $y''' + y'' - 2y = 0$
3. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
4. $2y'' + 5y' = 0$
5. $y'' - 8y = 0$

ACTIVIDAD 4

Resuelve las siguientes “Ecuaciones Diferenciales” dadas por “Separación de Variables”:

1. $y' = \cos 2x$
2. $dx - x^2 dy = 0$
3. $(x + 1)y' = x$
4. $xy' = 4y$
5. $y' = (y^3/x^2)$

ACTIVIDAD 5

Resuelve las siguientes “Ecuaciones Diferenciales” dadas por “Separación de Variables”:

1. $y' = ((x^2y^2)/(1 + x))$
2. $y' = e^{(3x + 2y)}$
3. $e^x y dy – (e^{-y} + e^{(-2x – y)})dx = 0$
4. $(4y + yx^2)dy – (2x + xy^2)dx = 0$
5. $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$

ACTIVIDAD 6

Resuelve las siguientes “Ecuaciones Diferenciales” dadas por “Separación de Variables”:

1. $2y(x + 1)dy = xdx$
2. $(yx^2 – y)dy + (y + 1)^2dx = 0$
3. $\operatorname{sen} 3x\, dx + 2y\cos^3 3x\, dy = 0$
4. $e^y \operatorname{sen} x\, dx + \cos x(e^{2y} – y)dy = 0$
5. $y(4 – x^2)^{(1/2)}dy = (4 + y)^{(1/2)}dx$

ACTIVIDAD 7

Dadas las siguientes “Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden” obtén la “Solución General” y propón una “Solución Particular” en cada uno de los siguientes casos:

1. $y' = 4y$
2. $2y' + 10y = 1$
3. $y' + y = e^{3x}$
4. $y' + 3x^2y = x^2$
5. $x^2y' + xy = 1$

ACTIVIDAD 8

Dadas las siguientes “Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden” obtén la “Solución General” y propón una “Solución Particular” en cada uno de los casos que a continuación se presentan:

1. $(x + 4y^2)dy + 2ydx = 0$
2. $xdy = (x\text{sen } x - y)dx$
3. $(1 + x^2)dy + (xy + x^3 + x)dx = 0$
4. $(1 + e^x)y' + e^xy = 0$
5. $\cos x\, y' + y\text{sen } x = 1$

ACTIVIDAD 9

Dadas las siguientes "Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden" obtén la "Solución General" y propón una "Solución Particular" en cada uno de los casos que a continuación se presentan:

1. $xy' + 4y = x^3 - x$
2. $x^2y' + x(x + 2)y = e^x$
3. $ydx + (xy + 2x – ye^y)dy = 0$
4. $(x + 1)y' + (x + 2)y = 2xe^{-x}$
5. $ydx – 4(x + y^6)dy = 0$

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

Contesta el siguiente cuestionario.

1. Define el concepto de “Ecuación Diferencial”.
2. Define el concepto de “Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden”.
3. Define el concepto de “Ecuación Diferencial en General”.
4. Define el concepto de “Ecuación Diferencial en Particular”.
5. Define el concepto de “Ecuación Diferencial Separable”.
6. Da un ejemplo teórico de una “Ecuación Diferencial Separable”.
7. Da un ejemplo teórico de una “Ecuación Diferencial en Particular”.
8. Da un ejemplo teórico de una “Ecuación Diferencial en General”.
9. Da un ejemplo teórico de una “Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer Orden”.
10. Da un ejemplo teórico de una “Ecuación Diferencial n”.

LO QUE APRENDÍ

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $y(1 + xy)dx – xdy = 0)$
2. $(\ln y – 2x)dx + ((x/y) – 2y)dy = 0$
3. $(2x – y)dx + (4y – x)dy = 0$
4. $y´+ (2/x)y = x^3$
5. $x^2dy + 2xydx = x^5dx$

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. En los siguientes problemas indica si las "Ecuaciones Diferenciales" dadas son "Lineales" o "No Lineales"; según sea el caso:

1. $(1 – x)y'' – 4xy' + 5y = \cos x$.
   a) Lineal
   b) No Lineal

2. $yy' + 2y = 1 + x^2$.
   a) Lineal
   b) No Lineal

3. $x^3y^{(4)} – x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$.
   a) Lineal
   b) No Lineal

4. $(dy/dx) = \sqrt{(1 + (d^2y/dx^2)^2)}$.
   a) Lineal
   b) No Lineal

5. $(\text{sen } x)y'' - (\cos x)y' = 2$.
   a) Lineal
   b) No Lineal

II. Relaciona ambas columnas indicando el "Orden de la Ecuación Diferencial"; de las que a continuación se te muestran:

☐	1. $(1 – x)y´´ – 4xy´ + 5y = \cos x$ (4)	1 Segundo Orden
☐	2. $yy´ + 2y = 1 + x^2$	2 Tercer Orden
☐	3. $x^3y^{(4)} – x^2y´´ + 4xy´ - 3y = 0$	3 Primer Orden
☐	4. $(dy/dx) = \sqrt{(1 + (d^2y/dx^2)^2)}$	4 Cuarto Orden
☐	5. $(\text{sen } x)y´´ - (\cos x)y´ = 2$	5 Segundo Orden

III. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

	Verdadera	Falsa
1. Si una "ecuación" contiene sólo "Derivadas Ordinarias" de una o más "Variables Dependientes" con respecto a una "Variable Dependiente" entonces se dice que es una "Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales".	( )	( )
2. Una de las propiedades que caracterizan a las "Ecuaciones Diferenciales Lineales" es: "que la variable dependiente "y" junto con todas sus derivadas son de "Primer Grado", esto es, la potencia de cada término en "y" es 1.	( )	( )
3. Para resolver las "Ecuaciones Diferenciales"; existen dos tipos de soluciones que son: las "Explícitas" y las "Implícitas".	( )	( )
4. Una "Solución" de una "Ecuación Diferencial" no puede definirse en trozos.	( )	( )
5. Existen "Ecuaciones Diferenciales No Lineales" que son generalmente difíciles de resolver o imposibles de resolver en términos de las funciones elementales corrientes.	( )	( )

IV. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Un cultivo tiene inicialmente un número N_o de bacterias. Para t = 1 hora, el número de bacterias medido es $(3/2)N_o$. Si la rapidez de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determina el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.
   a) 2.78 horas
   b) 2.68 horas
   c) 2.71 horas
   d) 2.64 horas
   e) 2.73 horas

2. Un reactor transforma el uranio 238, que es relativamente estable, en el isótopo plutonio 239. Después de 15 años se determina que 0.043 % de la cantidad inicial A_o de plutonio se ha desintegrado. Encuentra la vida media de este isótopo si la rapidez de desintegración es proporcional a la cantidad restante.
   a) 24,180 años
   b) 24,175 años
   c) 24,205 años
   d) 24,190 años
   e) 24,165 años

3. Se encuentra que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de Carbono 14. Determina la edad del fósil.
   a) 55,700 años
   b) 55,900 años
   c) 55,300 años

d) 55,600 años

e) 55,800 años

4. Al sacar un bizcocho del horno, su temperatura es de 300^{o} F. Tres minutos después, su temperatura es de 200^{o} F. ¿Cuánto demorará en enfriarse hasta una temperatura de 70^{o} F?

   a) 32.00 minutos

   b) 32.30 minutos

   c) 31.00 minutos

   d) 29,67 minutos

   e) 32.67 minutos

5. Una batería de 12 Voltios se conecta a un circuito simple en serie en el cual la inductancia es de ½ Henrio y la resistencia es 10 Ohms. Determina la corriente i si la corriente inicial es cero.

   a) $i(t) = (3/5) – (3/5)e^{-20t}$

   b) $i(t) = (4/5) – (4/5)e^{-20t}$

   c) $i(t) = (2/5) – (2/5)e^{-20t}$

   d) $i(t) = (6/5) – (6/5)e^{-20t}$

   e) $i(t) = (7/5) – (7/5)e^{-20t}$

V. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta en un instante cualquiera, con rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años ¿cuánto demorará en triplicarse?
   a) 11 años
   b) 13 años
   c) 09 años
   d) 06 años
   e) 12 años

2. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta en un instante cualquiera, con rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años ¿cuánto demorará en cuadruplicarse?
   a) 10 años
   b) 12 años
   c) 08 años
   d) 14 años
   e) 11 años

3. Inicialmente había 100 miligramos presentes de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó 3 %. Si la rapidez de desintegración es, en un instante cualquiera, proporcional a la cantidad de sustancia presente en dicho instante, encuentra la vida media de la sustancia radiactiva.
   a) 156)5 horas
   b) 116)5 horas

c) 126)5 horas

d) 146)5 horas

e) 136)5 horas

4. Cuando un rayo vertical de luz pasa a través de una sustancia transparente la rapidez con que su intensidad I disminuye es proporcional a I(t), donde t representa el espesor del medio, expresado en pies. En agua de mar límpida, la intensidad a 3 pies bajo la superficie es un 25 % de la intensidad inicial I_o del rayo incidente. ¿Cuánta es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

   a) $I(t = 15) = 0.00198I_o$

   b) $I(t = 15) = 0.00098I_o$

   c) $I(t = 15) = 0.00298I_o$

   d) $I(t = 15) = 0.00598I_o$

   e) $I(t = 15) = 0.00398I_o$

5. En un trozo de madera quemada o de carbón, se encontró que el 85 % del Carbono 14 se había desintegrado. ¿Qué edad tenía aproximadamente la madera?

   a) 15,900 años

   b) 15,700 años

   c) 16,000 años)

   d) 15,600 años)

   e) 15,300 años)

VI. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es de 70^{o} F, al exterior, donde la temperatura es de 10^{o} F. Después de medio minuto el termómetro marca 50^{o} F. ¿Cuánto marca el termómetro después de t = 1 minuto?
   a) T(t = 1) = 30.67^{o} F
   b) T(t = 1) = 38.67^{o} F
   c) T(t = 1) = 37.67^{o} F
   d) T(t = 1) = 35.67^{o} F
   e) T(t = 1) = 36.67^{o} F

2. Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es de 70° F, al exterior, donde la temperatura es de 10^{o} F. Después de medio minuto el termómetro marca 50^{o} F. ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar los 15^{o} F?
   a) t = 3.06 minutos
   b) t = 3.09 minutos
   c) t = 3.16 minutos
   d) t = 2.96 minutos
   e) t = 2.90 minutos

3. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 Henrios y la resistencia es de 50 Ohms, se le aplica una fuerza electromotriz de 30 Volts. Encuentra la corriente i(t) si i(0) = 0.
   a) $i(t) = (8/5) – (8/5)e^{-500t}$
   b) $i(t) = (2/5) – (2/5)e^{-500t}$
   c) $i(t) = (3/5) – (3/5)e^{-500t}$
   d) $i(t) = (7/5) – (7/5)e^{-500t}$

e) $i(t) = (4/5) - (4/5)e^{-500t}$

4. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 Henrios y la resistencia es de 50 Ohms, se le aplica una fuerza electromotriz de 30 Volts. Determina el comportamiento de la corriente para valores grandes del tiempo.
   a) $t \rightarrow (6/5)$ cuando $t \rightarrow \infty$
   b) $t \rightarrow (3/5)$ cuando $t \rightarrow \infty$
   c) $t \rightarrow (4/5)$ cuando $t \rightarrow \infty$
   d) $t \rightarrow (8/5)$ cuando $t \rightarrow$
   e) $t \rightarrow (2/5)$ cuando $t \rightarrow$

5. Un tanque contiene 200 litros de fluido en los cuales se disuelven 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene 1 gramo de sal por litro se bombea dentro del tanque con una rapidez de 4 litros por minuto; la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con la misma rapidez. Encuentra el número de gramos A(t) de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.
   a) $A(t) = 600 - 170e^{-t/50}$
   b) $A(t) = 700 - 170e^{-t/50}$
   c) $A(t) = 500 - 170e^{-t/50}$
   d) $A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$
   e) $A(t) = 400 - 170e^{-t/50}$

VII. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Un gran tanque parcialmente lleno con 100 galones de fluido en los cuales se disuelven 10 libras de sal. Una salmuera que contiene media libra de sal por galón se bombea dentro del tanque con una rapidez de 6 galones por minuto; la solución adecuadamente mezclada se bombea enseguida hacia fuera del tanque con una rapidez menor de 4 galones por minuto. Encuentra el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.
   a) A(t = 30) = 64.38 lb
   b) A(t = 30) = 74.38 lb
   c) A(t = 30) = 54.38 lb
   d) A(t = 30) = 44.38 lb
   e) A(t = 30) = 84.38 lb

2. El valor de reventa de una cierta maquinaria industrial decrece durante un periodo de 10 años a ritmo que depende de la edad de la maquinaria. Cuando la maquinaria tiene x años, el ritmo al que está cambiando su valor es de 220(x – 10) dólares por año. Si la maquinaria valía originalmente $ 12,000,00 dólares, ¿cuánto valdrá cuando tenga 10 años?
   a) V(x = 10) = $ 6,000.00 dólares
   b) V(x = 10) = $ 1,000.00 dólares
   c) V(x = 10) = $ 4,000.00 dólares
   d) V(x = 10) = $ 3,000.00 dólares
   e) V(x = 10) = $ 5,000.00 dólares

3. Un pozo de petróleo que produce 300 barriles de petróleo crudo por mes se secará en 3 años. Se estima que dentro de t meses el precio del petróleo crudo será de $P(t) = 18 + 0.3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo. ¿Cuál será el "Ingreso Total" obtenido del pozo?
   a) R(t = 36) = $ 507,360.00 dólares
   b) R(t = 36) = $ 607,360.00 dólares
   c) R(t = 36) = $ 107,360.00 dólares
   d) R(t = 36) = $ 407,360.00 dólares
   e) R(t = 36) = $ 207,360.00 dólares

4. Una inversión de $ 1,000.00 dólares crece a un ritmo igual a 7 por 100 de su tamaño. Expresa el valor de la inversión como una función del tiempo.
   a. $Q(t) = 4{,}000e^{-0.7t}$
   b. $Q(t) = 5{,}000e^{-0.7t}$
   c. $Q(t) = 3{,}000e^{-0.7t}$
   d. $Q(t) = 1{,}000e^{-0.7t}$
   e. $Q(t) = 2{,}000e^{-0.7t}$

5. El ritmo al que se propaga un rumor por una comunidad es conjuntamente proporcional al número de residentes que han oído el rumor y al número que no lo han oído. Si 1/10 de los residentes oyen inicialmente el rumor y ¼ lo han oído pasadas 2 horas, ¿qué fracción lo habrá oído pasadas 4 horas?
   a) 1/2
   b) 1/3
   c) 1/7
   d) 1/9

e) 1/4

VIII. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Resolver $2xy\,dx+(x^2-1)\,dy=0$

- **a**. $x^2y^2-y=c$
- **b**. $xy-y^2=c$
- **c**. $x^2y-y=c$
- **d**. $y-x^2y=c$
- **e**. $x^2y-xy=c$

2. Resolver $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0$

- **a**. $x^2-x+\frac{3}{2}y^2+7y=c$
- **b**. $x^2-x^3+\frac{2}{3}y^2+9y=c$
- **c**. $2x^2-x+y^2+7y=c$
- **d**. $3x^2-x+\frac{5}{2}y^2+7y^2=c$
- **e**. $x^2-2x+\frac{3}{2}y^2-8y=c$

3. Resolver $(5x+4y)\,dx+(4x-8y^3)\,dy=0$

- **a**. $2x^2+4xy^3-2y^4=c$
- **b**. $\frac{5}{3}x^2-3xy-2y^4=c$
- **c**. $\frac{5}{2}x^2y+3xy+3y^4=c$
- **d**. $4x^2+4xy^2-2y=c$
- **e**. $\frac{5}{2}x^2+4xy-2y^4=c$

4. Resolver $(2xy^2-3)dx+(2x^2y+4)dy=0$

- **a**. $xy-4x+3y=c$
- **b**. $x^2y^2-3x+4y=c$
- **c**. $x^2y^2-4x+3y=c$
- **d**. $xy^2+5x+4y=c$
- **e**. $x^2y-3x+4xy=c$

5. Resolver $\left(1-\dfrac{3}{x}+y\right)dx+\left(1-\dfrac{3}{y}+x\right)dy$

- **a.** $2x+3y+3\ln|xy|=c$
- **d.** $x+y-3\ln|xy|=c$
- **b.** $x+5y-3\ln|x+y|=2c$
- **e.** $x+y-5\ln|xy|=3c$
- **c.** $6x+2y-4\ln|xy|=c$

6. Resolver $(x^3+y^3)dx+3xy^2\,dy=0$

- **a.** $\dfrac{x^4}{4}+xy^4-c=0$
- **d.** $\dfrac{x^4}{4}+x^3y^3-c=0$
- **b.** $\dfrac{x^4}{4}+xy^3=c$
- **e.** $\dfrac{3x^4}{4}+4xy^3=c$
- **c.** $\dfrac{x^4}{4}+4xy^3=c$

7. Resolver $(x^3+y^3)dx+3xy^2\,dy=0$

- **a.** $\dfrac{3x^2}{y}+2x\ln 2y=c$
- **d.** $\dfrac{2x^2}{y}+3x\ln 3y=2c$
- **b.** $\dfrac{2x^2}{y}-2x\ln y-c=0$
- **e.** $\dfrac{2x^2}{y}+2x\ln y=c$
- **c.** $\dfrac{2x^2}{3y}+2x\ln y=2c$

8. Resolver $(x+y)^2 dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$

- ❍ **a.** $\frac{x^3}{3} + x^2y^2 + 3xy^2 - 2y = c$
- ❍ **d.** $\frac{x^3}{3} - 3x^2y - 3xy^2 - 3y = c$
- ❍ **b.** $\frac{x^3}{3} - x^2y - 2x^2y^2 - y = c$
- ❍ **e.** $x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + 3y = c$
- ❍ **c.** $\frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - y = c$

9. Resolver $(5x - y^3)dx + (x^2 - 3xy^2)dy = 0$

- ❍ **a.** $\frac{5}{2}x^2 + 3xy^3 + \frac{4x^3}{3} = c$
- ❍ **d.** $\frac{5}{2}x^2 - 3xy^3 + \frac{5x^3}{3} = c$
- ❍ **b.** $\frac{5}{3}x^2 - xy^3 + \frac{x^3}{3} = c$
- ❍ **e.** $\frac{5}{2}x^2 - xy^3 + \frac{x^3}{3} = c$
- ❍ **c.** $\frac{5}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{x^3}{3} = c$

10. Resolver $(1 - 2x^2 - 2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$

- ❍ **a.** $x^4 - 3x^2y + 3y - y^2 = c$
- ❍ **d.** $x^4 - 2x^2y + y - 3y^2 = 2c$
- ❍ **b.** $-x^4 - 2x^2y + y - y^2 = c$
- ❍ **e.** $-x^4 - 4x^2y - 3y - y^2 = c$
- ❍ **c.** $-x^4 + 3x^2y + y^2 + 3y = c$

MESOGRAFÍA

Bibliografía sugerida

Autor	Capítulo	Páginas
Leithold(1988)	10. Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables.	508-590
Leithold (1982)	18. Cálculo Diferencial de Funciones de Varias Variables.	1102-1176
Hoffman y Bradley (1995)	7. Ecuaciones Diferenciales	407-435 617-643
Haeussler y Paul (1997)	19. Cálculo de Varias Variables.	873-936
Granville (1985)	21. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.	458-496

Bibliografía básica

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Swokowsky, Earl W. (1983). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica.

Bibliografía complementaria

Ayres Frank. (2010). *Cálculo.* (5ª ed.) México: McGraw-Hill.

Oteyza, Elena, de. (2006). *Conocimientos fundamentales de matemáticas, Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación.

Krantz, Steven. (2006). *Cálculo*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Larson, Ron. (2010). *Cálculo.* (9ª ed.) México: McGraw-Hill (2 vols.)

Purcell Edwin. (2007). *Cálculo*. (9ª ed.) México: Pearson Educación.

Stewart, James. (2006). *Cálculo diferencial e integral.* (2ª ed.) México: Cengage Learning.

Sitios de Internet

Sitio	**Descripción**
http://www.unirioja.es/cu/jvarona/downloads/LibroED.pdf	Métodos Clásicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
http://canek.uam.mx/Ecuaciones/Ecuaciones.php	Ecuaciones Diferenciales.
http://www.freelibros.com/category/ecuaciones-diferenciales	Biblioteca Virtual de Ecuaciones Diferenciales.
http://www.slideshare.net/rosacdepena/resumen-ecuaciones-diferenciales	Resumen de Ecuaciones Diferenciales. Por Rosa de la Peña. 21/06/2009.

UNIDAD 6

PRÁCTICAS DE LABORATORIO

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno resolverá problemas de cálculo utilizando software.

INTRODUCCIÓN

El alumno utilizará los conceptos y propiedades de función, límite, derivada, integral y ecuaciones diferenciales para desarrollar modelos matemáticos con el uso de la hoja Excel y de esta manera resolver problemas de la vida real.

LO QUE SÉ

Basándonos en tus estudios de formación básica de educación secundaria y de educación media superior; se te fórmula la siguiente pregunta: ¿Qué aprendiste cuando en la materia de “Informática”; del “Nivel Medio Superior” te enseñaron el manejo y aplicación de distintos tipos de “Software” básicos para poder programar diversos tipos de problemas y aplicaciones referidos a casos enfocados a las áreas “Económicos-Administrativas”?

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

6.1. Prácticas de laboratorio

6.1. Prácticas de laboratorio

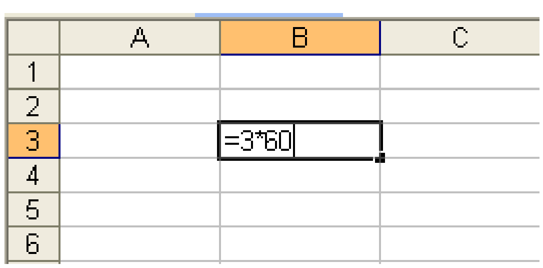
El Departamento de Biología estima que una bacteria se reproduce siguiendo el comportamiento de la siguiente función

$$f(t) = -0.26t^2 + 440t + 80.$$

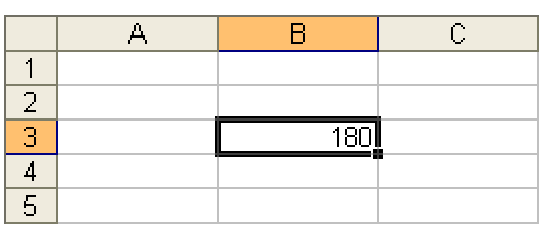
Si el tiempo t está dado en segundos, cuántas existirán en la colonia durante un periodo de tres minutos.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel:

1. Colocamos en un renglón y celda el valor de los segundos totales.



Resultando:



2. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5		-0.26	440	80	
6					

3. Multiplicamos la celda del paso uno por cada uno de los coeficientes de la función, en este caso la celda del paso uno al cuadrado por la primera celda del paso dos, más la celda del paso uno por la segunda celda del paso dos más la tercera celda del paso dos.

	A	B	C
6			
7		=B5*B3^2	
8			

	C	D
6		
7	=C5*B3	
8		

Resultado de las operaciones anteriores lo siguiente:

	A	B	C	D
6				
7		-8424	79200	
8				

Posteriormente se obtiene la Suma

	A	B	C
8			
9		=B7+C7+D5	
10			

Resultando de la suma la siguiente cantidad:

	A	B	C
8			
9		70,856	
10			

Finalmente: Los valores obtenidos en el paso tres es el resultado buscado en el ejemplo mostrado.

Caso práctico de "Límite"

El tanque de aire de una gasolinera soporta una presión máxima dada por la siguiente función f(t) = $(x^2 + 248t - 500)/(x-2)$ Si la presión a que se le somete en un momento dado es de 2 psi, ¿cuál será la presión total soportada por el tanque?

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel:

1. En una celda de un renglón se coloca el valor de 2.0001 y enseguida el valor de 1.9999.

	A	B	C	D
1				
2		2.0001	1.9999	
3				
4				

2. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la primera celda del paso uno.

	A	B	C	D
3				
4		=(B2^2+248*B2-500)/(B2-2)		
5				

Resultando del cálculo anterior lo siguiente:

	A	B	C
3			
4		252.0001	
5			

3. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la segunda celda del paso uno.

	A	B	C	D
5				
6		=(C2^2+248*C2-500)/(C2-2)		
7				

Resultado del cálculo anterior la siguiente cantidad:

	A	B	C
5			
6		251.9999	
7			

4. Ambos valores (paso dos y tres) deben ser muy parecidos a número entero el cual es el resultado buscado. Se calcula el valor de la función sustituyendo el valor de la segunda celda del paso uno.

Vemos que los valores anteriores tienden al valor de 252 que es el valor buscado.

Caso práctico de “Derivada”

El Departamento de Biología estima que una bacteria se reproduce siguiendo el comportamiento de la siguiente función

$f(t) = -0.26t^2 + 1640t + 80$. Maximizar el número de bacterias en una colonia.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función.

	A	B	C	D	E
1					
2		-0.26	1640	80	
3					
4					

2. Multiplicamos la primera celda por 2 y se guarda en una celda de otro renglón.

	A	B	C
3			
4		=B2*2	
5			

Resultando lo siguiente:

	A	B	C
3			
4		- 0.5200	
5			

3. Se le cambia el signo a la cantidad resultante del paso 2, el resultado se coloca en una celda distinta.

	A	B	C
3			
4		=B2*2*-1	
5			

Resultando lo siguiente:

	A	B	C
3			
4		0.5200	
5			

4. A continuación el valor de la segunda celda del paso uno se divide entre valor del paso tres, la resultante es el resultado buscado.

	A	B	C
5			
6		=C2/B4	
7			

Resultando lo siguiente:

	A	B	C
5			
6		3,153.85	
7			

Finalmente: Los valores obtenidos en el paso cuatro es el resultado buscado en el ejemplo mostrado.

Caso práctico "Integral"

La función que describe el ingreso marginal de un producto es:

Ingreso marginal = -0.08 x + 26.

Obtenga el ingreso total a obtener con la venta de 440 unidades del producto, integrando la función del ingreso marginal, y tomando como límites de integración 0 y 440.

Para resolver este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la función.

	A	B	C	D
1				
2		-0.08	26	
3				

2. Colocamos en otro renglón los límites de integración.

	A	B	C	D
3				
4		-	400	
5				

3. Se coloca en una celda de otro renglón la primera celda del paso uno dividida entre dos y multiplicada por el cuadrado de la segunda celda del paso dos.

	A	B	C
5			
6		=B2/2*C4^2	
7			

Resultando:

	A	B	C
5			
6		- 6,400	
7			

4. Se coloca en una celda de otro renglón la segunda celda del paso uno y se multiplica por la segunda celda del paso dos.

	A	B	C
7			
8		=C2*C4	
9			

Resultando:

	A	B	C
7			
8		10,400	
9			

5. El resultado de los pasos tres y cuatro se suman dando como resultado la cantidad buscada.

	A	B	C
9			
10		=B6+B8	
11			

Resultando lo siguiente:

	A	B	C
9			
10		4,000	
11			

Finalmente: Los valores obtenidos en el paso cinco es el resultado buscado en el ejemplo mostrado.

Caso Práctico de “Ecuaciones Diferenciales”

Se disuelven inicialmente 50 libras (lb) de sal en un tanque que contiene 300 galones (gal) de agua. Se bombea salmuera al tanque a razón de 3 galones por minuto; luego la solución, mezclada adecuadamente, se bombea fuera del tanque, también a razón de 3 galones/minuto. Si la concentración de la solución que entra es de 2 lb/gal, determina la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánta sal hay después de 44 min? ¿Cuánta después de un tiempo más largo?

Para resolver este ejercicio utilizaremos una hoja de Excel

1. Colocamos en un renglón y celdas diferentes los valores de los coeficientes de la ecuación diferencial $A = 600 - 550\, e^{-t/100}$

	A	B	C	D	E
1					
2		600	-550	100	
3					

2. Colocamos en otro renglón el valor de los 44 minutos que transcurrirán.

	A	B	C
3			
4		44	
5			

3. Se sustituye el valor del paso 2 en la función del paso 1

	A	B	C
5			
6		=B2+C2*EXP(-B4/D2)	
7			

Dando como resultado, lo siguiente:

	A	B	C
5			
6		245.78	
7			

Finalmente: Los valores obtenidos en el paso tres es el resultado buscado en el ejemplo mostrado.

RESUMEN

De acuerdo con la pregunta que se te formuló al principio de ésta unidad; se presupone que tu respuesta con respecto a qué sabes de los softwares; seguramente habrás contestado que sí has tenido contacto con ellos; específicamente con el “Excel”.

La idea del “software para la resolución de problemas matemáticos diversos” proviene del “Siglo XX” en donde el hombre se preocupó por entender y comprender el desarrollo tecnológico con que este iba evolucionando de una forma acelerada hasta nuestros días.

La “Resolución de Problemas Matemáticos Por Medio Del Uso De Los Softwares” se ha hecho más presente hoy en día (2009) ante el constante cambio que el hombre ha tenido en su relación con el medio en el cual se desenvuelve dentro de este “Planeta llamado Tierra” en donde su desarrollo comprende muchas áreas que el mismo ha descrito y definido con el fin de tener un mejor bienestar y seguir sobreviviendo.

En esta unidad veremos lo que se refiere a las “Aplicaciones a través de los Softwares (Excel) de los diversos Temas vistos a los largo de las Unidades anteriores”; a fin de poder dar solución de una manera más rápida a todo tipo de “Problemas Diversos” en el campo profesional de la “Licenciatura en Informática” y su relación con las áreas “Contables-Administrativas”.

GLOSARIO

Derivada

Se define como el límite de la razón de incrementos x; f(x)/□ cuando el □x tiende a cero. Esto significa una rapidez o razón de cambio.

Ecuación Diferencial

Es una ecuación que contiene diferenciales o derivadas.

Función

Es una regla que asocia a cada objeto de un conjunto A, uno y sólo un objeto de un conjunto B.

Integrar

Es la operación que consiste en hallar una función que tenga una diferencial determinada.

Límite

Se dice que una constante a es el "Límite" de una variable x cuando esta se aproxima a aquella, de modo que la diferencia x – a, en valor absoluto puede hacerse tan pequeña como se quiera. Esto es:

$$\lim f(x) = a \text{ cuando } x \to a.$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen.

1. Halla el dominio de la función: f(x)= x/(x2 – x – 2).

2. Determina $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, si $f(x)=x^2$.

3. Determina 5! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5

4. Si $F(p) = p^2 + 4p - 3$ y $G(p) = 2p + 1$. Determina a) $F(G(p))$ y $G(F(1))$.

5. Si $f(x)= x + 1$ y $g(x)= x + 4$, *encuentra lo siguiente:* $(f - g)(x)$

ACTIVIDAD 2

Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos:

1. Expresa el dominio de la función: $F(t) = 3t^2 + 5$

2. Un negocio con Capital original de $10,000.00 tiene ingresos y gastos semanales de $2,000.00 y $1,600.00, respectivamente. Si se tienen en el negocio todas las utilidades, expresa el valor de *V* en el negocio al final de *t* semanas como función de *t.*

3. Expresa el dominio de la siguiente función $h(s) = (4 – s^2)/(2s^2 - 7s – 4)$.

4. Determina los valores funcionales para la función:
   $g(u) = u^2 + u$; $g(-2)$, $g(2v)$, $g(-x^2)$.

5. Determina las intersecciones *x*, *y;* de la ecuación y trazar la gráfica:
   $x = -3y^2$.

ACTIVIDAD 3

Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos:

1. $\lim_{q \to -1} (q^3 - q + 1)$

2. $\lim_{x \to -3} (x^3 + 4x^2 - 7)$

3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4}$

4. $\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2} + 7$

5. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

ACTIVIDAD 4

Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos:

1. Halla el límite de $\lim_{p \to 4} \sqrt{p^2 + p + 5}$.

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

3. Halla el $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$; cuando $f(x) = x^2 - 3$.

4. $\lim_{x \to -\infty} 5x$

5. $\lim_{x \to 1} x (x - 1)^{-1}$.

ACTIVIDAD 5

Utilizando como herramienta de trabajo al “Excel”, resuelve los siguientes casos prácticos:

1. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

2. dy; si $y = 3x + 7$

3. df(x)/dx si $f(x) = (5 - 4x)$.

4. df(z)/dz; si $f(z) = (x^4 /4) - (5/z^{1/3})$

5. Halla la derivada de $f(x) = 2x(x^2 - 5x + 2)$ cuando $x = 2$.

ACTIVIDAD 6

Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen.

1. Determina una ecuación de la recta tangente a la curva $y = (3x^2 - 2)/x$;
cuando $x = 1$.

2. Diferencia la función. $f(x) = 8x^4$.

3. $f(x) = 4x^{-14/5}$..

4. $f(x) = (x + 1)(x + 3)$.

5. $f(x) = (x^2 + x^3)/x^2$.

ACTIVIDAD 7

Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos:

1. Halla la integral indefinida: $\int y^2 (y + 2/3)\, dy$

2. $\int (y^5 - 5y)\, dy$.

3. $\int (3r^2 - 4r + 5)\, dr$.

4. $\int (x^{8.3} - 9x^6 + 3x^{-4} + x^{-3})\, dx$.

5. $\int \frac{-2\sqrt{x}}{3}\, dx$.

ACTIVIDAD 8

Utilizando como herramienta de trabajo al “Excel”, resuelve los siguientes casos prácticos:

1. $\int \frac{1}{4\sqrt[8]{x^7}}\,dx.$

2. $\int (x^3/3 - 3/x^3)\,dx.$

3. $\int (3w^2/2 - 2/3w^{2)}\,dw.$

4: $\int \frac{2z-5}{7}\,dz.$

5: $\int \frac{(e^u+1)}{4}\,du.$

ACTIVIDAD 9

Utilizando como herramienta de trabajo al “Excel”, resuelve los siguientes casos prácticos:

1. $y' = -y/x$ si $x, y > 0$.

2. resuelva la ecuación diferencial. $y' = 2xy^2$.

3. $\underline{dy/dx} = y$, para $y > 0$.

4. $y' = y/x'$ $x, y > 0$.

5. $y' = 1/y$; $y > 0$, $y(2) = 2$.

ACTIVIDAD 10

Utilizando como herramienta de trabajo al “Excel”, resuelve los siguientes casos prácticos:

1. $dy/dx – x \sqrt{x^2} + 1 = 0$.

2. $e^y y' – x^2 = 0$; $y = 0$ cuando $x = 0$.

3. Supóngase que el número máximo de miembros de un nuevo club campestre será de 800 personas debido a limitaciones de las instalaciones. Hace un año el número de miembros era 50 y ahora existen 200. Suponiendo que las inscripciones siguen en una función lógica, ¿cuántos miembros habrá dentro de tres años?

4. Se encontró asesinado en su hogar un rico industrial. La policía llegó al lugar del crimen a las 11:00 P. M. en ese momento la temperatura del cuerpo era de 31° C, y una hora después era de 30° C. Determinar la hora en que ocurrió el asesinato.

5. La población de una ciudad tiene un crecimiento logístico y esté limitada a 40000 personas. Si la población era de 20000 en 1984 y de 25000 en 1989, ¿Cuál será la población en 1994? Proporcione la respuesta al centenar más cercano.

ACTIVIDAD 11

Utilizando como herramienta de trabajo al “Excel”, resuelve los siguientes casos prácticos:

1. Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es de 70^o F, al exterior, donde la temperatura es de 10^o F. Después de medio minuto el termómetro marca 50^o F. ¿Cuánto marca el termómetro después de t = 1 minuto?

2. Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es de 70^o F, al exterior, donde la temperatura es de 10^o F. Después de medio minuto el termómetro marca 50^o F. ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar los 15^o F?

3. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 Henrios y la resistencia es de 50 Ohms, se le aplica una fuerza electromotriz de 30 Volts. Encuentra la corriente i(t) si i(0) = 0.

4. A un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 Henrios y la resistencia es de 50 Ohms, se le aplica una fuerza electromotriz de 30 Volts. Determina el comportamiento de la corriente para valores grandes del tiempo.

5. Un tanque contiene 200 litros de fluido en los cuales se disuelven 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene 1 gramo de sal por litro se bombea dentro del tanque con una rapidez de 4 litros por minuto; la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con la misma rapidez. Encuentra el número de gramos A(t) de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

ACTIVIDAD 12

Aplicando las “Propiedades de los Límites” demuestra los “Límites de las siguientes Funciones” que a continuación se mencionan. Emplea la herramienta de trabajo Excel para resolver los ejercicios.

1. $f(x) = (x^3 – 27)/(x – 3)$; entonces el lim $f(x) = 27$ cuando $x \rightarrow 3$.

2. $f(s) = (3s^2 – 8s – 16)/(2s^2 – 9s –+4)$; entonces el lim $f(s) = (16/7)$ cuando $s \rightarrow 4$.

3. $f(x) = (3 - \sqrt{x})/(9 – x)$; entonces el lim $f(x) = (1/6)$ cuando $x \rightarrow 9$.

4. $f(x) = (2x^2 – x – 3)/(x^3 + 2x^2 +6x + 5)$; entonces el lim $f(x) = -1$ cuando $x \rightarrow -1$.

5. Si $f(x) = x^2 + 5x – 3$; demuestre que el lim $f(x) = f(2)$ cuando $x \rightarrow 2$.

6. $f(x) = (\sqrt{(x + 2)} - \sqrt{2})/x$; entonces el lim $f(x) =(1/4)\sqrt{2}$ cuando $x \rightarrow 0$.

7. $f(y) = (y^3 + 8)/(y + 2)$; entonces el lím $f(y) = 12$ cuando $y \rightarrow -2$.

8. $f(y) = (y^3 – 2y^2 + 3y – 4)$; entonces el lim $f(y) = -10$ cuando $y \rightarrow -1$.

9. $f(x) = (5x + 2)$; entonces el lim $f(x) = -18$ cuando $x \rightarrow -4$.

10. $f(x) = (3x – 7)$; entonces el lim $f(x) = 8$ cuando $x \rightarrow 5$.

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

Contesta el siguiente cuestionario.

1. Define el concepto de “Función”.
2. Define el concepto de “Límite”.
3. Define el concepto de “Derivada”.
4. Define el concepto de “Integral”.
5. Define el concepto de “Ecuación Diferencial”.
6. Define el concepto de “Software”.
7. Define el concepto de “Aplicaciones”.
8. Explica la importancia de los “Softwares”.
9. Explica la importancia de la “Toma de Decisiones” a través de los “Softwares”.
10. Define el concepto de “Aplicación en el Campo Profesional”.

LO QUE APRENDÍ

Utilizando como herramienta de trabajo al “Excel”, resuelve los siguientes casos prácticos:

1. Por cada cargamento de materiales en bruto un fabricante debe pagar unos honorarios de solicitud para cubrir embalaje y transporte. Después de haberlos recibido, los materiales en bruto deben ser almacenados hasta su utilización y se originan “Costos de Almacenaje”. Si cada cargamento de materiales en bruto es grande, los “Costos de Solicitud” serán bajos, ya que se requieren pocos cargamentos, pero los “Costos de Almacenaje” serán altos. Si cada cargamento es pequeño, los “Costos de Solicitud” serán altos porque se requerirán muchos cargamentos, pero los “Costos de Almacenaje” bajarán. Un fabricante estima que si cada cargamento contiene x unidades, el “Costo Total” de pedir y almacenar el suministro del año de materiales en bruto será
   $C(x) = x + (160{,}000/x)$ dólares. Determina el “Costo Total” para un cargamento de 400 unidades.

2. Encuentra el límite de la función definida por la expresión
   $f(x) = (2x^2 + x - 3) / (x - 1)$ cuando (x) tiende a 1.

3. Supón que el “Costo Total” en dólares de fabricar q unidades de un cierto artículo viene dado por la función $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$.

Calcula el “Costo Total” de fabricación de 10 unidades del artículo.

4. Supón que el “Costo Total” en dólares de fabricar q unidades de un cierto artículo viene dado por la función $C(q) = q^3 – 30q^2 + 500q + 200$. Calcula el “Costo de Fabricación” de la décima unidad del artículo.

5. Un fabricante puede producir radios a un “Costo” de 10 dólares cada una y estima que si son vendidas por x dólares cada una, los usuarios comprarán aproximadamente 80 menos x radios cada mes. Determina el “Beneficio Mensual” esperado si el fabricante vendiese 50 radios.

6. Encuentra: límite de $f(x) = (x^3 - 27) / (x – 3)$ cuando $x \rightarrow 3$.

7. Encuentra: límite de $X / (- 7X + 1)$ cuando $X \rightarrow 4$.

8. Supón que cierto proceso químico produce un líquido y que la función del “Costo Total” C está dada por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$; donde c(x) dólares es el “Costo Total” de producción de x litros del líquido; determina el valor del “Costo Marginal” cuando se producen 16 litros.

9. La función de probabilidad de la duración de las llamadas telefónicas en una cierta ciudad es $f(x) = 0.4e^{-0.4x}$, donde x representa la duración en minutos de una llamada seleccionada aleatoriamente. ¿Qué porcentaje de las llamadas duran más de 2 minutos?

10. Un pozo de petróleo que produce 300 barriles de petróleo crudo por mes se secará en 3 años. Se estima que dentro de t meses el precio del petróleo crudo será de $P(t) = 18 + 0.3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo. ¿Cuál será el “Ingreso Total” obtenido del pozo?

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. *Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta*.

1. Desde el principio del año el precio de una hogaza de pan integral en un supermercado local ha estado subiendo a un ritmo constante de 2 centavos por mes. El día uno de noviembre, el precio alcanzó los 64 centavos por hogaza. Determina el precio al principio del año.
   a) p(t) = 46 centavos
   b) p(t) = 44 centavos
   c) p(t) = 42 centavos
   d) p(t) = 48 centavos
   e) p(t) = 40 centavos

2. El Índice Medio de estudiantes que empiezan en una escuela de artes liberales orientales ha ido disminuyendo a un ritmo constante en los últimos años. En 2003, este índice era de 582 mientras que el en el 2008 fue del 552. ¿Cuál será el Índice Medio de estudiantes que empiecen en 2013?
   a) y = 500
   b) y = 512
   c) y = 552

d) y = 530

e) y = 522

3. Un fabricante puede vender un cierto producto por 110 dólares cada unidad. El “Costo Total” está formado por unos gastos generales de $ 7,500.00 dólares más los “Costes de Producción” de $ 60.00 dólares por unidad. ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para llegar al punto de beneficio nulo?

    a) x = 150 unidades

    b) x = 160 unidades

    c) x = 130 unidades

    d) x = 170 unidades

    e) x = 120 unidades

4. Un fabricante puede vender un cierto producto por 110 dólares cada unidad. El “Costo Total” está formado por unos gastos generales de $ 7,500.00 dólares más los “Costos de Producción” de $ 60.00 dólares por unidad. ¿Cuál es el beneficio o pérdida del fabricante si vende 100 unidades?

    a) - $ 3,000)00 dólares

    b) $ 1,000)00 dólares

    c) $ 3,000)00 dólares

    d) - $ 2,500)00 dólares

    e) $ 2,700)00 dólares

5. Un fabricante puede vender un cierto producto por 110 dólares cada unidad. El “Costo Total” está formado por unos gastos generales de $ 7,500.00 dólares más los “Costos de Producción” de $ 60.00 dólares por unidad. ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para obtener un beneficio de $ 1,250.00 dólares?
    a) x = 185
    b) x = 175
    c) x = 155
    d) x = 165
    e) x = 205

II. Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos y elige la respuesta correcta.

1. Un sociólogo está estudiando varios programas que se sugiere pueden ayudar en la educación de los niños en edad preescolar de cierta ciudad. El sociólogo considera que después de x años de iniciado el programa específico, f(x) millares de preescolares se inscribirán. Se tiene que: $f\ (x) = \underline{10}\ (12\ x - x^2),\ 0 \leq x \leq 12$. ¿A qué cambiará la inscripción después de 3 años del inicio de ese programa?
   a) 6 2/3 millares de preescolares
   b) 7 millares de preescolares
   c) 8 millares de preescolares
   d) 7 1/2 millares de preescolares
   e) 18 1/2 millares de preescolares

2. Supón que un fabricante vende un producto en $2 (dólares) por unidad. Si se venden q unidades, los ingresos están dados por r = 2q. La función de ingreso marginal, ¿De cuánto es?
   a) 2q
   b) 3
   c) 2
   d) 4
   e) Q

3. Determina la tasa relativa y porcentual de variación de $y = f\ (x) = 3x^2 - 5x + 25$, cuando x = 5.
   a) R = 1.333; P = 133.33%
   b) R = 1.430; P = 143.00%
   c) R = 0.250; P = 25.00%

d) R = 0.750; P = 75.00%

e) R = 0.333; P = 33.30%

4. Fernando estimó la función de costo total para una fábrica de calcetas y calcetines de la siguiente manera:

$$c = -10{,}484.69 + 6.750q - 0.000328q^2,$$

en donde q es la producción en docenas de pares y c son los costos totales en dólares. Halla la función de costo marginal cuando q = 5,000.

a) dr /dq = 7.500 – 656q; 47

b) dr /dq = 6.750 – 0.000656q; 3.47

c) dr /dq = 5.900 – 0.0656q; 4.73

d) dr /dq = 0.069 – 5.6q; 3.47

e) dr /dq = 75.910 – 0.00076q; 13.47

5. Para la función de costos $c = 0.2q^2 + 1.2q + 4$, ¿Con qué rapidez varía c con respecto a q cuando q = 5? Determina la tasa porcentual de cambio de c con respecto a q cuando q = 5.

a) 32; 2. 13%

b) 20.4; 8%

c) 22.12; 25.5%

d) 3.2; 21.3%

e) 29.5; 22%

III. Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta.

1. Para un grupo urbano específico algunos sociólogos estudiaron los ingresos anuales promedio en esos momentos, y, (en dólares) que una persona puede esperar recibir con x años de educación antes de buscar empleo regular. Estimaron que la tasa a la cual el ingreso varía con respecto a la educación está dada por: $\underline{dy/dx} = 10x^{2/3}$, $4 \le x \le 16$, en donde y = 5872 cuando x = 9. Determina y.
   a) $y = 4x^{5/2} + 2350$
   b) $y = 4x^{3/2} + 3431$
   c) $y = 4x^{2/3} + 5800$
   d) $y = 4x^{5/2} + 2450$
   e) $y = 4x^{5/2} + 4900$

2. En la fabricación de un producto los costos fijos por semana son $4,000.00. Los costos fijos son costos como la renta y seguros que permanecen constantes con cualquier nivel de producción en un periodo dado. Si la función de costos marginales
   $dc/dq = [0.000001\ (0.002q^2 – 25q) + 0.2]\ dq$; en donde c es el costo total (en dólares) de fabricar q libras de un producto por semana, calcula el costo de fabricar 10,000 libras en una semana.
   a) $c = 0.0001\ (0.02q^3/3 – 25q^2/2) + 0.2q + 400$
   b) $c = 0.000001\ (0.002q/3 – 25q/2) + 0.2q^2 + 4000$
   c) $c = 0.1\ (2q^3/3 – 25q^2/2) + 0.2q + 8000$
   d) $c = 0.001\ (0.2q^2/3 – 25q^2/2) + 0.2q + 200$
   e) $c = 0.000001\ (0.002q^3/3 – 25q^2/2) + 0.2q + 4000$

3. Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales observados en las ratas a las que se alimentó con una dieta que contenía el 10% de proteínas. La proteína estaba formada por yema de huevo y harina de maíz. Durante cierto tiempo el grupo descubrió que la tasa de cambio (aproximada) en el aumento promedio en peso G (en gramos) de una rata con respecto al porcentaje P de yema que contenía la mezcla de proteínas es: $dG/dP = -(P/25) + 2$; donde $0 \leq P \leq 100$. Si $G = 38$ cuando $P = 10$, evalúa G.
   a) $G = P^2/50 + 2P + 20$
   b) $G = - P^4/25 + 4P + 20$
   c) $G = - P^2/60 + P + 25$
   d) $G = - P^2/50 + 2P + 20$
   e) $G = - P^2/30 + P + 20$

4. Un fabricante ha decidido que la función de costo marginal es $dc/dq = 0.003q^2 – 0.4 + 40$, en donde q es el número de unidades que se fabrican. Si el costo marginal es \$27.50 cuando q= 50 y los costos fijos son \$5000, ¿Cuál es costo promedio de elaborar 100 unidades?
   a) \$ 75
   b) \$ 80
   c) \$ 50
   d) \$100
   e) \$160

5. En un estudio de la difusión de oxígeno en vasos capilares, se utilizaron cilindros concéntricos de radio r como modelo de vaso capilar. La concentración C de oxígeno en los vasos capilares está dada por

$$C = \int \frac{(Rr + B_1)}{(2K + r)} dr,$$

En donde R es la rapidez constante a la cual el oxigeno se difunde desde el vaso, y K y B_1 son constante de integración como B_2.)

a) $Rr/K + B_2 \ln (r)^2 + B_2$

b) $Rr^2/4 + B (r) + B^2$

c) $Rr/4K + B_2 (r) + B_2$

d) $Rr^2/4K + B_2 + B_1$

e) $Rr^2/4K + B_1 \ln (r) + B_2$

IV. Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta.

1. En cierta ciudad la tasa a la cual crece su población en cualquier momento es proporcional al tamaño de esta última. Si la población era de 125000 en 1960 de 140000 en 1980, ¿Cuál es la población esperada para el año 2000? Si:

$$N = N_0e^{kt}$$

   a) $N \approx 125000e^{0.0057t}$
   b) $N \approx 195000e^{kt}$
   c) $N \approx 180000e^{kt}$
   d) $N \approx 125000e^{0.57t}$
   e) $N \approx 125000e^{0.0057t}$

2. Si después de 50 días se tiene una sustancia radioactiva, determina la constante de decrecimiento y la semivida de la sustancia. De la ecuación

$$N = N_0e^{-\lambda t}$$

   a) 67.82 días
   b) 62.82 días
   c) 72.90 días
   d) 75 días
   e) 80 días

3. Se descubre que una herramienta de madera encontrada en una excavación en el Medio Oriente tiene una razón de C^{14} a C^{12} de 0.6 de la razón correspondiente en un árbol actual. Estima la antigüedad de la herramienta redondeando al centenar de años.
   a) 3500 años
   b) 4000 años
   c) 3600 años
   d) 4500 años
   e) 4100 años

4. En cierto pueblo la población en cualquier instante cambia a una tasa que es proporcional al valor de la población. Si los habitantes eran 20000 en 1975 y 24000 en 1985, obtén una ecuación para la población en el tiempo t, en donde t es el número de años después de 1975. ¿Cuál es la población esperada en 1995?
   a) $N = 28800e^{30t}$; $N=28800\ (1.2)^{t-10}$;28800
   b) $N = 28000e^{t}$; $N=28000\ (1.2)^{30}$;28800
   c) $N = 20000e^{18}$; $N=20000\ (1.2)^{t-10}$;28800
   d) $N = 20000e^{9t}$; $N=20000\ (1.2)^{t-10}$;28800
   e) $N = 20000e^{0.018t}$; $N=20000\ (1.2)^{t-10}$;28800

5. Si después de 100 segundos se tiene el 30% de la cantidad inicial de una muestra radioactiva, evalúa la constante de decrecimiento y la semivida del elemento.
   a) 30; 57.57 s
   b) 0.01204; 60 s
   c) 12.04; 57.57 s
   d) 1.204; 55 s
   e) 0.01204; 57.57 s

V. Utilizando como herramienta de trabajo al "Excel", resuelve los siguientes casos prácticos y elige la respuesta correcta.

1. El "Costo Total" de producción de x relojes en una cierta planta está dada $C(x) = 1500 + 30x + x^2$; determina la función del "Costo Marginal".
   a) C´(x) = -30 + 2x
   b) C´(x) = 30 + 2x
   c) C´(x) = 30 - 2x
   d) C´(x) = $30 + 2x^2$
   e) C´(x) = -30 - 2x

2. De acuerdo a la "Respuesta Obtenida" en el "Reactivo 1" determina el valor del "Costo Marginal" si x = 40.
   a) 125
   b) 120
   c) 110
   d) 115
   e) 105

3. El "Costo Total" de producción de x relojes en una cierta planta está dada $C(x) = 1500 + 30x + x^2$; determina el "Costo Real" de fabricación de la unidad 41.
   a) 108
   b) 110
   c) 130
   d) 126
   e) 111

4. La función de probabilidad de la duración de las llamadas telefónicas en una cierta ciudad es $f(x) = 0.4e^{-0.4x}$, donde x representa la duración en minutos de una llamada seleccionada aleatoriamente. ¿Qué porcentaje de las llamadas duran entre 1 y 2 minutos?

   a) 22.20 %
   b) 22.05%
   c) 22.10 %
   d) 22.00 %
   e) 22.25 %

5. La función de probabilidad de la duración de las llamadas telefónicas en una cierta ciudad es $f(x) = 0.4e^{-0.4x}$, donde x representa la duración en minutos de una llamada seleccionada aleatoriamente. ¿Qué porcentaje de las llamadas duran 2 minutos o menos?

   a) 55.07 %
   b) 55.19 %
   c) 54.90 %
   d) 55.00 %
   e) 55.14 %

6. Un gran tanque parcialmente lleno con 100 galones de fluido en los cuales se disuelven 10 libras de sal. Una salmuera que contiene media libra de sal por galón se bombea dentro del tanque con una rapidez de 6 galones por minuto; la solución adecuadamente mezclada se bombea enseguida hacia fuera del tanque con una rapidez menor de 4 galones por minuto. Encuentra el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.
    a) A(t = 30) = 64.38 lb
    b) A(t = 30) = 74.38 lb
    c) A(t = 30) = 54.38 lb
    d) A(t = 30) = 44.38 lb
    e) A(t = 30) = 84.38 lb

7. El valor de reventa de una cierta maquinaria industrial decrece durante un periodo de 10 años a ritmo que depende de la edad de la maquinaria. Cuando la maquinaria tiene x años, el ritmo al que está cambiando su valor es de 220(x – 10) dólares por año. Si la maquinaria valía originalmente $ 12,000,00 dólares, ¿cuánto valdrá cuando tenga 10 años?
    a) V(x = 10) = $ 6,000.00 dólares
    b) V(x = 10) = $ 1,000.00 dólares
    c) V(x = 10) = $ 4,000.00 dólares
    d) V(x = 10) = $ 3,000.00 dólares
    e) V(x = 10) = $ 5,000.00 dólares

8. Una compañía constructora renta cada departamento en p dólares al mes cuando se rentan x de ellos, y 30√(300 – 2x). ¿Cuántos departamentos deben rentarse antes de que el “Ingreso Marginal” sea cero?
   a) 103
   b) 109
   c) 110
   d) 105
   e) 100

9. En un bosque, un depredador se alimenta de las presas y la población de depredadores en cualquier instante es función del número de presas que hay en el bosque en ese momento. Supóngase que cuando hay x presas en el bosque, la población de depredadores es y, donde
   $y = (x^2/6) + 90$; además si han transcurrido t semanas desde que terminó la temporada de cacería donde $x = 7t + 85$. Determina a qué rapidez crece la población de depredadores a las 8 semanas de haber finalizado la temporada de cacería.
   a) 329 depredadores/semana
   b) 319 depredadores/semana
   c) 309 depredadores/semana
   d) 299 depredadores/semana
   e) 339 depredadores/semana

10. La ecuación de “Demanda” de cierta mercancía es px = 36,000, donde se demandarán x unidades por semana cuando el precio por unidad es p dólares. Se espera que a la t semanas, donde t ☐ {0, 10}, el precio del artículo sea p, donde $30p = 146 + 2t^{(1/3)}$. Calcula la intensidad de

cambio anticipada de la demanda con respecto al tiempo en 8 semanas.

a) 8 unidades por semana

b) 5 unidades por semana

c) -3 unidades por semana

d) -8 unidades por semana

e) -7 unidades por semana

MESOGRAFÍA

Bibliografía sugerida

Autor	
Haeussler y Paul (1997)	Ver todos los indicados anteriormente
Hoffman y Bradley (1995)	
Leithold (1982)	
Leithold (1988)	
Swokowsky (1983)	

Bibliografía básica

Granville, William Anthony. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Haeussler Jr. Ernest; Paul Richard S. (1997). *Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida*. México: Prentice Hall.

Hoffman, Laurence y Bradley, Gerald. (1995). *Cálculo Aplicado a Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Leithold, Louis. (1982). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Harla.

------------. (1988). *Cálculo para Ciencias Administrativas, Biológicas y Sociales*. México: Harla.

Swokowsky, Earl W. (1983). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica.

Bibliografía complementaria

Ayres Frank. (2010). *Cálculo.* (5ª ed.) México: McGraw-Hill.

Oteyza, Elena, de. (2006). *Conocimientos fundamentales de matemáticas, Cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación.

Krantz, Steven. (2006). *Cálculo*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Larson, Ron. (2010). *Cálculo.* (9ª ed.) México: McGraw-Hill (2 vols.)

Purcell Edwin. (2007). *Cálculo*. (9ª ed.) México: Pearson Educación.

Stewart, James. (2006). *Cálculo diferencial e integral.* (2ª ed.) México: Cengage Learning.

Sitios de Internet

Sitio	**Descripción**
http://office.microsoft.com/es-es/excel/	Paquete de Excel: Manejo y Uso
http://www.mathworks.com/products/matlab	Programa MATLAB: Manejo y Uso
http://www.chartwellyorke.com/derive.html	Programa Derive: Manejo y Uso
	Paquete del Solver: Manejo y Uso

RESPUESTAS DE LOS EXÁMENES DE AUTOEVALUACIÓN

Unidad 1				
Autoevaluación I	Autoevaluación II	Autoevaluación III	Autoevaluación IV	
1. b	1.a	1.b	1.e	6.a
2.e	2.d	2.d	2.e	7.b
3.a	3.e	3.a	3.c	8.e
4.d	4.b	4.c	4.c	9.a
5.b	5.c	5.e	5.a	10.e

Unidad 2
Autoevaluación I
1. e
2. c
3.b
4.c
5.e
6.e
7.b
8.c
9.b
10.b

Unidad 3			
Autoevaluación I	**Autoevaluación II**	**Autoevaluación III**	**Autoevaluación IV**
1. b 2. c 3. e 4. a 5. d	1. c 2. e 3. b 4. d 5. a	1. a 2. b 3.c 4.d 5.e	1. b 2. c 3. e 4. a 5. d
Autoevaluación V	**Autoevaluación VI**	**Autoevaluación VII**	**Autoevaluación VIII**
1. b 2.c 3. e 4. a 5. d	1. b. 2. c 3. e 4. e 5. d	1. b 2. c 3. e 4. a 5. d	1. a 2. c 3. e 4. b 5. d
Autoevaluación IX	**Autoevaluación X**	**Autoevaluación XI**	**Autoevaluación XII**
1. b 2. c 3. e 4. a 5. d 6. c	1. b 2. c 3. e 4. a 5. d	1. b 2. c 3. e 4. a 5. d	1. b 2. c 3. e 4. a 5. d 6. c
Autoevaluación XIII			
1. a 2. a 3. d 4. a			

<table>
<tr><td colspan="6">5. b
6. c
7. e
8. b
9. b
10. e</td></tr>
<tr><th colspan="6">Unidad 4</th></tr>
<tr><th>Autoevaluación I</th><th>Autoevaluación II</th><th colspan="2">Autoevaluación III</th><th colspan="2">Autoevaluación IV</th></tr>
<tr><td>1. b
2. c
3. e
4. a
5. d</td><td>1. e
2. c
3. a
4. d
5. b</td><td colspan="2">1.c
2. a
3. e
4. b
5. d</td><td colspan="2">1. a
2. e
3. c
4. b
5. d</td></tr>
<tr><th>Autoevaluación V</th><th>Autoevaluación VI</th><th colspan="2">Autoevaluación VII</th><th colspan="2">Autoevaluación VIII</th></tr>
<tr><td>1. c
2. a
3. d
4. b
5. d</td><td>1. a
2. e
3. d
4. b
5. c</td><td>1. a
2. c
3. a
4. d
5. e</td><td>6. b
7. b
8. c
9. c
10. b</td><td>1. a
2. c
3. a
4. d
5. e</td><td>6. b
7. b
8. c
9. c
10. b</td></tr>
<tr><th colspan="6">Unidad 5</th></tr>
<tr><th>Autoevaluación I</th><th>Autoevaluación II</th><th colspan="2">Autoevaluación III</th><th colspan="2">Autoevaluación IV</th></tr>
<tr><td>1. a
2. b
3. a
4. b
5. a</td><td>(4) Segundo Orden
(5) Tercer Orden
(2) Primer Orden
(3) Cuarto Orden</td><td colspan="2">1. Falso
2. Verdadero
3. Falso
4. Falso
5. Verdadero</td><td colspan="2">1. c
2. a
3. e
4. b
5. d</td></tr>
</table>

	(2) Segundo Orden			
Autoevaluación V	**Autoevaluación VI**	**Autoevaluación VII**	**Autoevaluación VIII**	
1. c 2. a 3. e 4. b 5. d	1. e 2. a 3. c 4. b 5. d	1. e 2. b 3. c 4. d 5. a	1. c 2. a 3. e 4. b 5. d	6. b 7. e 8. e 9. e 10. b
Unidad 6				
Autoevaluación I	**Autoevaluación II**	**Autoevaluación III**	**Autoevaluación IV**	
1. b 2. e 3. a 4. d 5. b	1. a 2. c 3. e 4. b 5. d	1. e 2. e 3. d 4. b 5. e	1. e 2. b 3. e 4. e 5. e	
Autoevaluación V				
1. b 2. c 3. e 4. c 5. a 6. e 7. b 8. c 9. a 10. d				