UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

DIVISIÓN SISTEMA UNIVERSIDAD ABIERTA Y
EDUCACIÓN A DISTANCIA

L I C E N C I A T U R A en

INFORMÁTICA

APUNTES DIGITALES
PLAN 2012

SUAYED UNA OPCIÓN PARA TI

MATEMÁTICAS

ALGEBRA LINEAL

Plan: 2012

MATEMÁTICAS I ÁLGEBRA LINEAL		Clave:
Plan: 2012		Créditos: 8
Licenciatura: INFORMÁTICA		Semestre: 1º
Área: Matemáticas		Horas. Asesoría:
Requisitos: Ninguno		Horas. por semana: 4
Tipo de asignatura:	Obligatoria (x)	Optativa ( )

AUTOR (ES):

ALBERTO DE LA ROSA ELIZALDE

ADAPTADO A DISTANCIA:

JUAN CARLOS LUNA SÁNCHEZ

ACTUALIZACIÓN AL PLAN DE ESTUDIOS 2012

JUAN CARLOS LUNA SÁNCHEZ

INTRODUCCIÓN AL MATERIAL DE ESTUDIO

Las modalidades abierta y a distancia (SUAYED) son alternativas que pretenden responder a la demanda creciente de educación superior, sobre todo, de quienes no pueden estudiar en un sistema presencial. Actualmente, “con la incorporación de las nuevas tecnologías de información y comunicación a los sistemas abierto y a distancia, se empieza a fortalecer y consolidar el paradigma educativo de éstas, centrado en el estudiante y su aprendizaje autónomo, para que tenga lugar el diálogo educativo que establece de manera semipresencial (modalidad abierta) o vía Internet (modalidad a distancia) con su asesor y condiscípulos, apoyándose en materiales preparados ex profeso”[1].

Un rasgo fundamental de la educación abierta y a distancia es que no exige presencia diaria. El estudiante SUAYED aprende y organiza sus actividades escolares de acuerdo con su ritmo y necesidades; y suele hacerlo en momentos adicionales a su jornada laboral, por lo que requiere flexibilidad de espacios y tiempos. En consecuencia, debe contar con las habilidades siguientes.

- Saber estudiar, organizando sus metas educativas de manera realista según su disponibilidad de tiempo, y estableciendo una secuencia de objetivos parciales a corto, mediano y largo plazos.

[1] Sandra Rocha, *Documento de Trabajo. Modalidad Abierta y a Distancia en el SUA-FCA*, 2006.

- Mantener la motivación y superar las dificultades inherentes a la licenciatura.
- Asumir su nuevo papel de estudiante y compaginarlo con otros roles familiares o laborales.
- Afrontar los cambios que puedan producirse como consecuencia de las modificaciones de sus actitudes y valores, en la medida que se adentre en las situaciones y oportunidades propias de su nueva situación de estudiante.
- Desarrollar estrategias de aprendizaje independientes para que pueda controlar sus avances.
- Ser autodidacta. Aunque apoyado en asesorías, su aprendizaje es individual y requiere dedicación y estudio. Acompañado en todo momento por su asesor, debe organizar y construir su aprendizaje.
- Administrar el tiempo y distribuirlo adecuadamente entre las tareas cotidianas y el estudio.
- Tener disciplina, perseverancia y orden.
- Ser capaz de tomar decisiones y establecer metas y objetivos.
- Mostrar interés real por la disciplina que se estudia, estar motivado para alcanzar las metas y mantener una actitud dinámica y crítica, pero abierta y flexible.
- Aplicar diversas técnicas de estudio. Atender la retroalimentación del asesor; cultivar al máximo el hábito de lectura; elaborar resúmenes, mapas conceptuales, cuestionarios, cuadros sinópticos, etcétera; presentar trabajos escritos de calidad en contenido, análisis y reflexión; hacer guías de estudio; preparar exámenes~~;~~ y aprovechar los diversos recursos de la modalidad.
- Además de lo anterior, un estudiante de la modalidad a distancia debe dominar las herramientas tecnológicas. Conocer sus bases y metodología; tener habilidad en la búsqueda de información en

bibliotecas virtuales; y manejar el sistema operativo Windows, paquetería, correo electrónico, foros de discusión, chats, blogs, wikis, etcétera.

También se cuenta con materiales didácticos como éste elaborados para el SUAYED, que son la base del estudio independiente. En específico, este documento electrónico ha sido preparado por docentes de la Facultad para cada una de las asignaturas, con bibliografía adicional que te permitirá consultar las fuentes de información originales.
El recurso comprende referencias básicas sobre los temas y subtemas de cada unidad de la materia, y te introduce en su aprendizaje, de lo concreto a lo abstracto y de lo sencillo a lo complejo, por medio de ejemplos, ejercicios y casos, u otras actividades que te posibilitarán aplicarlos y vincularlos con la realidad laboral. Es decir, te induce al "saber teórico" y al "saber hacer" de la asignatura, y te encauza a encontrar respuestas a preguntas reflexivas que te formules acerca de los contenidos, su relación con otras disciplinas, utilidad y aplicación en el trabajo. Finalmente, el material te da información suficiente para autoevaluarte sobre el conocimiento básico de la asignatura, motivarte a profundizarlo, ampliarlo con otras fuentes bibliográficas y prepararte adecuadamente para tus exámenes. Su estructura presenta los siguientes apartados.

1. *Información general de la asignatura.* Incluye elementos introductorios como portada, identificación del material, colaboradores, datos oficiales de la asignatura, orientaciones para el estudio, contenido y programa oficial de la asignatura, esquema general de contenido, introducción general a la asignatura y objetivo general.
2. *Desarrollo de cada unidad didáctica.* Cada unidad está conformada por los siguientes elementos.

- Introducción a la unidad.
- Objetivo particular de la unidad.
- Contenidos.
- Actividades de aprendizaje y/o evaluación. Tienen como propósito contribuir en el proceso enseñanza-aprendizaje facilitando el afianzamiento de los contenidos esenciales. Una función importante de estas actividades es la retroalimentación: el asesor no se limita a valorar el trabajo realizado, sino que además añade comentarios, explicaciones y orientación.
- Ejercicios y cuestionarios complementarios o de reforzamiento. Su finalidad es consolidar el aprendizaje del estudiante.
- Ejercicios de autoevaluación. Al término de cada unidad hay ejercicios de autoevaluación cuya utilidad, al igual que las actividades de aprendizaje, es afianzar los contenidos principales. También le permiten al estudiante calificarse él mismo cotejando su resultado con las respuestas que vienen al final, y así podrá valorar si ya aprendió lo suficiente para presentar el examen correspondiente. Para que la autoevaluación cumpla su objeto, es importante no adelantarse a revisar las respuestas antes de realizar la autoevaluación; y no reducir su resolución a una mera actividad mental, sino que debe registrarse por escrito, labor que facilita aún más el aprendizaje. Por último, la diferencia entre las actividades de autoevaluación y las de aprendizaje es que éstas, como son corregidas por el asesor, fomentan la creatividad, reflexión y valoración crítica, ya que suponen mayor elaboración y conllevan respuestas abiertas.

3. *Resumen por unidad*.
4. *Glosario de términos.*

5. *Fuentes de consulta básica y complementaria*. Mesografía, bibliografía, hemerografía y sitios web, considerados tanto en el programa oficial de la asignatura como los sugeridos por los profesores.

Esperamos que este material cumpla con su cometido, te apoye y oriente en el avance de tu aprendizaje.

Recomendaciones (orientación para el estudio independiente)

- Lee cuidadosamente la introducción a la asignatura, en ella se explica la importancia del curso.
- Revisa detenidamente los objetivos de aprendizaje (general y específico por unidad), en donde se te indican los conocimientos y habilidades que deberás adquirir al finalizar el curso.
- Estudia cada tema siguiendo los contenidos y lecturas sugeridos por tu asesor, y desarrolla las actividades de aprendizaje. Así podrás aplicar la teoría y ejercitarás tu capacidad crítica, reflexiva y analítica.
- Al iniciar la lectura de los temas, identifica las ideas, conceptos, argumentos, hechos y conclusiones, esto facilitará la comprensión de los contenidos y la realización de las actividades de aprendizaje.
- Lee de manera atenta los textos y mantén una actitud activa y de diálogo respecto a su contenido. Elabora una síntesis que te ayude a fijar los conceptos esenciales de lo que vas aprendiendo.

- Debido a que la educación abierta y a distancia está sustentada en un principio de autoenseñanza (autodisciplina), es recomendable diseñar desde el inicio un plan de trabajo para puntualizar tiempos, ritmos, horarios, alcance y avance de cada asignatura, y recursos.
- Escribe tus dudas, comentarios u observaciones para aclararlas en la asesoría presencial o a distancia (foro, chat, correo electrónico, etcétera).
- Consulta al asesor sobre cualquier interrogante por mínima que sea.
- Revisa detenidamente el plan de trabajo elaborado por tu asesor y sigue las indicaciones del mismo.

Otras sugerencias de apoyo

- Trata de compartir tus experiencias y comentarios sobre la asignatura con tus compañeros, a fin de formar grupos de estudio presenciales o a distancia (comunidades virtuales de aprendizaje, a través de foros de discusión y correo electrónico, etcétera), y puedan apoyarse entre sí.
- Programa un horario propicio para estudiar, en el que te encuentres menos cansado, ello facilitará tu aprendizaje.
- Dispón de periodos extensos para al estudio, con tiempos breves de descanso por lo menos entre cada hora si lo consideras necesario.
- Busca espacios adecuados donde puedas concentrarte y aprovechar al máximo el tiempo de estudio.

TEMARIO OFICIAL

(horas 64)

	Horas
1. Sistemas de Ecuaciones Lineales	10
2. Espacios Vectoriales	8
3. Transformaciones Lineales	8
4. Producto interno	10
5. Matrices	8
6. Determinantes	8
7. Practicas en laboratorio	12
Horas Sugeridas	64

INTRODUCCIÓN
A LA ASIGNATURA

Las matemáticas constituyen una parte fundamental en la formación académica de los estudiantes y profesionales de las Ciencias Sociales y más aun para los que se encuentran en aéreas en donde es necesario resolver problemas relacionados con la producción, la organización, la toma de decisiones, etc.

El álgebra lineal es la rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y en un enfoque más formal, espacios vectoriales, y sus transformaciones lineales.

Es un área que tiene conexiones con muchas áreas dentro y fuera de las matemáticas como análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, etc.

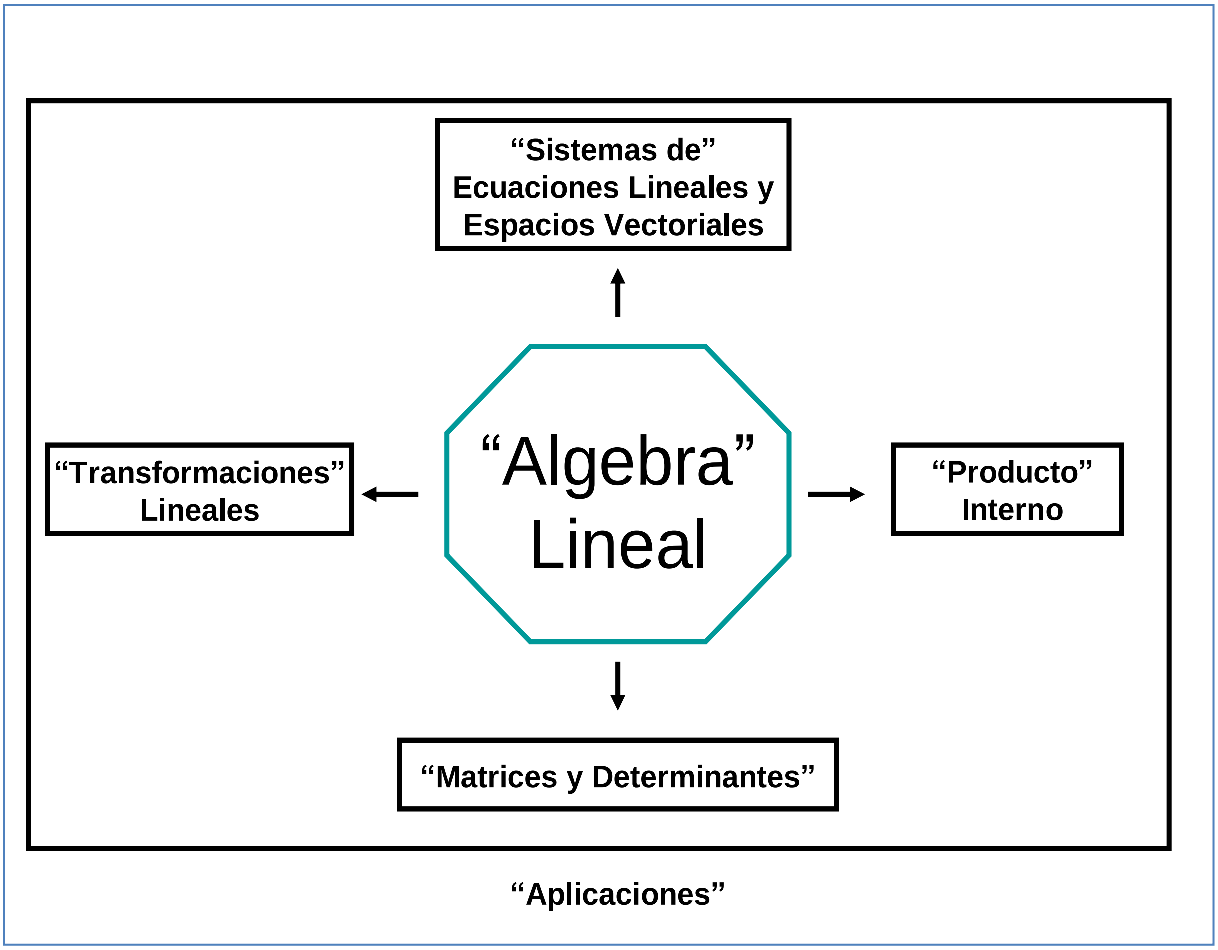
La historia del álgebra lineal se remonta a los años de 1843 cuando William Rowan Hamilton (de quien proviene el uso del término *vector*) creó los cuaterniones; y en 1844 fue cuando Hermann Grassmann publicó su libro *Die lineale Ausdehnungslehre* (*La teoría lineal de extensión*).

En la actualidad la herramienta fundamental de todo estudiante, académico y científico así como investigador es la computadora, producto final (hasta ahora) de las matemáticas junto al desarrollo informático.

OBJETIVO GENERAL

Al término del curso el alumno aplicará la teoría del álgebra lineal en el planteamiento y resolución de modelos matemáticos afines al área informática.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL



UNIDAD 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno identificara los diferentes elementos que intervienen en el planteamiento y solución de ecuaciones lineales.

INTRODUCCIÓN

La importancia del algebra lineal para las aplicaciones se ha elevado en proporción directa al aumento del poder de las computadoras, cada nueva generación de equipo y programas de computo dispara una demanda de capacidades aun mayores .Por lo tanto, la ciencia de las computadoras esta sólidamente ligada al algebra lineal mediante el crecimiento explosivo de los procesamientos paralelos de datos y los cálculos a gran escala

Aplicación en Programación lineal. En la actualidad muchas decisiones administrativas, importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. Por ejemplo, la industria de las aerolíneas emplea programas lineales para crear los itinerarios de las tripulaciones de vuelo, monitorear las ubicaciones de los aviones, o planear los diversos programas de servicios de apoyo como mantenimiento, y operaciones en terminal.

Por tanto el álgebra lineal es una herramienta muy importante que utilizan los profesionales egresados de la Licenciatura en Informática. En este caso, el punto de vista de esta unidad se concreta a que el estudiante en Informática debe saber lo siguiente:

a) Tener una noción fundamental para definir y conceptualizar qué son los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

b) Reconocer las diversas formas y los diferentes tipos de Sistemas de Ecuaciones Lineales

c) Reconocer los diferentes tipos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales

d) Utilizar los diferentes métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales con la finalidad de utilizarlos en distintas aplicaciones de los temas subsecuentes que comprenden la asignatura

LO QUE SÉ

Dentro de tus estudios de formación básica de educación secundaria y de educación media superior; se te formula la siguiente pregunta: ¿Qué aprendiste cuando en la materia de Algebra; te enseñaron los métodos básicos para resolver un sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas; así cómo de tres incógnitas?.

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

1.1.1 Concepto de ecuación Lineal

1.1.2 Ecuaciones lineales con 2 o mas incógnitas

1.1.3 Sistemas de m Ecuaciones en n incógnitas

1.1.4 Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan

1.1.5 Sistemas homogéneos

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Concepto de ecuación lineal

Una gran cantidad de problemas que se presentan en las ciencias naturales, en las ciencias sociales así como en ingeniería y en ciencias físicas, tienen que ver con ecuaciones que relacionan dos conjuntos de variables.

Una ecuación del tipo $ax=b$ que expresa la variable (variable independiente) en términos de la variable (variable dependiente), se denomina ecuación lineal. El término lineal expresa que la grafica de la ecuación anterior es una línea recta.

Ejemplo:

$\mathbf{4x = 2y}$

$\mathbf{-3x_1 + 9 = 12x_2}$

$\mathbf{2x + 3y = 5}$

Ecuaciones lineales con 2 o más incógnitas

De manera análoga existen muchas situaciones en las cuales se requiere relacionar más de dos variables independientes con los cuales poder satisfacer infinidad de procesos y de esta manera obtener solución a diferentes actividades en algún área específica de una empresa.

En este caso la representación de ecuaciones con más de dos incógnitas es la siguiente:

Forma general de una ecuación en varias variables

$$a_1x_1+a_2x_2+ \dots + a_nx_n = b$$

Ejemplo**:**

$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5$ ó

$5z + 8w - 9k = 12$

Donde

X_1, X_2, X_3, Y, Z, W, K

Son las incógnitas de la ecuación, las cuales encontramos a través de métodos algebraicos que estudiaremos más adelante.

Se sugiere revisar la gráfica de sistemas de 2x2.

Sistemas de m Ecuaciones en n incógnitas

A un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas lo podemos representar como:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+ a_{12}x_2+ \dots + a_{1n}x_n = Z_1 \dots (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2+ \dots + a_{2n}x_n = Z_2 \dots (2) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+ a_{m2}x_2+ \dots + a_{mn}x_n = Z_m \ \dots (m) \end{array}$$

Dónde:

1, 2, 3,…, *m* son las ecuaciones

1, 2, 3,…, n El número de variables

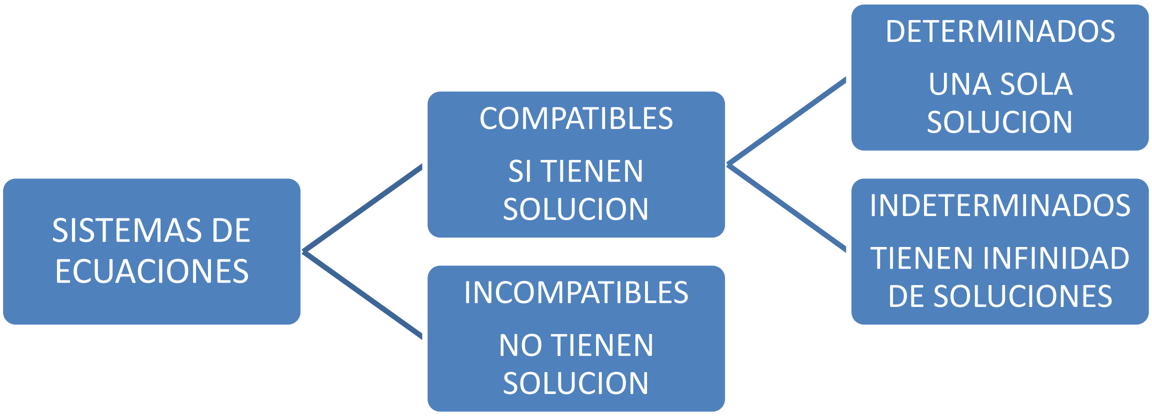
$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \dots a_{m1}, a_{mn}$ Son los coeficientes de las variables.

$b_1, b_2, b_3, \dots b_n$ Son los términos independientes de las ecuaciones

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ Son las variables de las ecuaciones.

1,2,3,…,n El número de variables y $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \ldots a_{m1}, a_{mn}$ son los coeficientes de las variables.

TIPOS DE SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan

La eliminación Gauss-Jordan de un sistema de *m* ecuaciones y *n* incógnitas es una metodología que permite calcular los valores $X_1, X_2, \ldots, X_n$, para los cuales existe una solución del sistema de ecuaciones.

A un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas lo podemos representar como

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = Z_1 \ldots (1) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = Z_2 \ldots (2) \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = Z_m \ldots (m)
\end{array}
$$

Donde 1, 2, 3,…, *m* son las ecuaciones y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables de las ecuaciones.

El método Gauss-Jordan

El método de eliminación Gauss-Jordan consiste en representar primeramente el sistema de ecuaciones por medio de una matriz y obtener la matriz escalonada eliminando las incógnitas de una manera consecutiva, con el propósito de llegar a una matriz escalonada equivalente para obtener la solución de la ecuación, mediante la aplicación de tres operaciones principales.

Una matriz escalonada es de la forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerda las tres operaciones permitidas para este método

1.- Intercambio de renglones
2.- Multiplicar un renglón por cualquier número real, diferente de cero 3.- Multiplicar un renglón por un número real y luego sumar con otro.

Nota: no es válido multiplicar o sumar entre columnas.

Ejemplo 1:

Determine si el siguiente sistema es consistente:

$$\begin{array}{lccl} & x_2 & +4x_3 & = 8 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = 1 \\ 5x_1 & -8x_2 & +7x_3 & = 1 \end{array}$$

Solución:

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener un pivote con x_1 en la primera ecuación, se intercambian las filas 1 y 2

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar el término 5 en la tercera ecuación, se multiplica la primera fila por -5/2 y se suma con la tercera:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \frac{-5}{2}R_1 + R_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Se acostumbra indicar con R: renglón, las operaciones realizadas pero no son obligatorias.

Tomando como pivote el renglón 2, multiplicarlo por 1/2 y sumar con la fila tres, para eliminar -1/2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Tomando el renglón 2 multiplicar por 3 y sumar con el renglón 1 para eliminar -3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 13 & 25 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicar el renglón 1 por ½ para obtener 1 en lugar de 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos el reglón tres por -1 y la sumamos al renglón 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos el reglón tres por $-\frac{8}{13}$ y la sumamos al renglón 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{84}{13} \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos el reglón tres por $\frac{2}{13}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{84}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones homogéneos se representan como:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{matrix}$$

En forma matricial se escribe como Ax=0

Todo sistema homogéneo tiene la solución trivial:

$$x_1 = x_2 = x_3 \cdots = x_n = 0$$

Pero puede tener soluciones diferentes a la trivial, $x_1 = x_2 = x_3 \cdots = x_n \neq 0$

Por ello un sistema homogéneo siempre es homogéneo.

Ejemplo 3:

Obtener la solución del sistema homogéneo

$$\begin{matrix} x+ & 2y+ & 3z & =0 \\ -x+ & 3y+ & 2z & =0 \\ 2x+ & y- & 2z & =0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{x=0, y=0, z=0}$$

RESUMEN

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requieren calcular valores para diferentes incógnitas que conforman los “Sistemas de Ecuaciones Lineales” a fin de que satisfagan al sistema. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales son generados de acuerdo las condiciones en que se dan variables experimentales de un problema o proceso en estudio. Para la obtención de estos valores existen diversas metodologías que permiten realizarlo y en esta variedad de metodologías es donde tiene su mayor importancia del “Algebra Lineal”.

Además las empresas requieren hacer uso muy frecuente de estas metodologías; dado que está conformada por diversas áreas funcionales en donde se toman de manera constante decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

GLOSARIO

Consistente

Indica que un sistema de ecuaciones lineales si tiene solución.

Compatible

Indica que un sistema de ecuaciones lineales si tiene solución, este término es equivalente al anterior (consistente).

Incompatible

Indica que un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.

Coeficiente

Es el valor numérico que acompaña a una literal o letra llamada variable.

ACTIVIDADES
DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Resuelve el siguiente sistema

$X - 3Y = 4$

$2X + Y = 2$

Usando el método de:

a) Igualación

b) Sustitución

c) Eliminación

d) Grafico

ACTIVIDAD 2

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss Jordan, e indica el tipo de solución que tienen.

1) $x-2y-3z=3$
$2x-y-4z=7$
$3x-3y-5z=8$

2) $x+y=2$
$2x-y=1$
$3x+6y=6$

3) $2x + y - 3z = 12$
$5x - 4y + 7z = 27$
$10x + 3y - z = 40$

4) $x + y + z = 4$
$2x - 3y + 5z = -5$
$3x + 4y + 7z = 10$

5) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$
$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$

Si $x_2 = a = -2$

6) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1$
$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1$
$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -2$

Si $x_2 = a = 1$; $x_3 = b = (1/3)$

7) $x - 2y + 3z - 2w = 0$
$3x - 7y - 2z + 4w = 0$
$4x + 3y + 5z + 2w = 0$

8) $x + y + z = 0$
$2x - 3y + 5z = 0$
$3x + 4y + 7z = 0$

ACTIVIDAD 3

De los siguientes sistemas de ecuaciones lineales elige 5 y resuelve, indicando que tipo de solución tiene el sistema así como su grafica.

1.– $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$ $sol : (3,2)$

2.– $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ $sol : (2,3)$

3.– $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ $sol : (3,-4)$

4.– $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 5x - 6y = 3 \end{cases}$ $sol : \left(1, \frac{1}{3}\right)$

5.– $\begin{cases} \frac{x}{2} + 3y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ $sol : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

6.– $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \end{cases}$ $sol : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

7.– $\begin{cases} \frac{5x}{2} + 3y = 1 \\ \frac{3x}{2} - 3y = 15 \end{cases}$ $sol : (4,-3)$

8.– $\begin{cases} 2(x - y) + \frac{x - y}{3} = 3x - 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ $sol : \left(\frac{8}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

9.– $\begin{cases} \frac{8x - 3y}{4} = -9 \\ 3y = 12 \end{cases}$ $sol : (-3,4)$

10.– $\begin{cases} \frac{2x - y}{5} = x - 1 \\ 3x - \frac{2x - y}{5} = 5 \end{cases}$ $sol : (2,-1)$

11.– $\begin{cases} y = \frac{4x}{3} + 3 \\ y = \frac{2x}{3} + \frac{7}{3} \end{cases}$ $sol : \left(-1, \frac{5}{3}\right)$

12.– $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{5x}{4} + \frac{2y}{3} = \frac{3}{4} \end{cases}$ $sol : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

13.– $\begin{cases} 4x + 3(y - 1) = 5 \\ 3(y - 1) = 2x - 7 \end{cases}$ $sol : (2,0)$

CUESTIONARIO
DE REFORZAMIENTO

1. ¿Cómo es la ecuación de una línea recta en el plano xy?
2. Escribe la forma general de una ecuación lineal en varias variables.
3. Anota una ecuación lineal y menciona por qué es lineal.
4. ¿Qué se entiende por solución de una ecuación lineal?
5. ¿Qué significa resolver una ecuación?
6. ¿A qué se le llama sistema de ecuaciones?
7. ¿Cuándo un sistema es inconsistente? ¿Cuándo es consistente?
8. ¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones?
9. ¿Qué significa que un sistema está en forma triangular o forma escalonada?

LO QUE APRENDÍ

En esta unidad has aprendido el sistema de ecuaciones lineales, una forma de corroborarlo, es resolviendo los siguientes problemas:

1. La diferencia de dos números A y B es 14; además se tiene que un cuarto de su suma da como resultado 13. Determina los valores de dichos números.

2. Durante una aventura ecoturística un bote navega por un río recorre 15 km en un tiempo de una hora y media a favor de la corriente en la ida y luego 12 km en 2 horas contra la corriente en la vuelta. Determina la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.

3. Se tiene que la suma de tres números A, B y C es 160. Donde un cuarto de la suma del mayor y el mediano equivale al menor disminuido en 20, y si a un medio de la diferencia entre el mayor y el menor se suma el número de en medio, el resultado es 57.

4. Hace 8 años la edad de J era el triple que la edad de P; y dentro de cuatro años la edad de J será los 5/9 de la edad de P. Determine los valores de las edades actuales de J y P. Se tiene que la suma de tres números A, B y C es 160.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I.- Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas.

1).Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan.

$2x + 3y = 9$

$4x + 2y = 18$

Respuestas:

a) x = 4.5; y = 1

b) x = 4.5; y = 0

c) x = 0; y = 4

d) x = 0; y = 4.5

e) x = 5; y = 4

2). Al resolver el sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas por el método de Gauss-Jordan, se obtiene:

$3x_1 + 2x_2 = 7$

$4x_1 – 2x_2 = 0$

Respuestas:

a) x1=1 ; x2 = 2

b) $x_1 = 0; x_2 = 1$

c) $x_1 = 2; x_2 = 0.5$

d. $x_1 =-1; x_2 = 5$

e) $x_1 = 0; x_2 = 3.5$

3). Al resolver el sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución, se obtiene:

$3x_1 + 4x_2 = 12$

$2x_1 + 2x_2 = 2$

Respuestas:

a. $x_1 = 0;\ x_2=10$

b. $x_1 = -10;\ x_2=10$

c. $x_1 = -8;\ x_2=9$

d. $x_1 = -9; x_2=8$

e. $x_1 = 8;\ x_2=9$

4) Resuelva el sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss y elige la respuesta correcta:

$$
\begin{aligned}
4x+8y+z&=2\\
x+7y-3z&=-14\\
2x-3y+2z&=3
\end{aligned}
$$

Respuestas:

a) x=3, y=-1, z=-6

b) x=-3, y=1, z=6

c) x=-3, y=-1, z=-6

d) x=-3, y=-1, z=6

5) Encuentre la solución general con el método de Gauss para el siguiente sistema:

$$2x+3y-z=0$$
$$-x+5y+2z=0$$

Respuestas:

a) $(3w,-3w,w)$

b) $\left(\frac{1}{3}w,-3w,w\right)$

c) $\left(\frac{11}{13}w,-\frac{3}{13}w,w\right)$

d) $\left(\frac{11}{13}w,-\frac{3}{13}w,-w\right)$

e) $\left(\frac{11}{5}w,-\frac{3}{5}w,w\right)$

6.- Cruceros Arco Iris cobra 800 dólares por adulto y 400 dólares por niño por un boleto de viaje redondo. Los registros muestran que cierto fin de semana, 1000 personas abordaron el crucero el sábado y 800 personas el domingo. Los ingresos totales del sábado fueron de $640,000 y $480,000 el domingo. ¿Cuántos adultos y niños abordaron el crucero esos días?

a) **adultos = 1200 ; niños = 800**

b) **adultos = 1000 ; niños = 700**

c) **adultos = 1000 ; niños = 900**

d) **adultos = 1200 ; niños = 900**

e) **adultos = 1000 ; niños = 800**

7.- Para el estreno de teatro se vendieron 1000 boletos. Los asientos de platea costaron $80, los de orquesta, $60, y los de galería, $50. El número combinado de boletos vendidos para platea y orquesta excedían por 400 el doble de los boletos vendidos de galería. El total de ingresos para esa función fue de $62800. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada uno?

a) platea = 200 ; orquesta = 250; galería=550
b) platea = 210 ; orquesta = 240; galería=550
c) platea = 210 ; orquesta = 250; galería=550
d) platea = 200 ; orquesta = 240; galería=560
e) platea = 200 ; orquesta = 250; galería=560

8.- Elige la respuesta correcta al siguiente problema
Se tiene 6 lb de café 5 lb de azúcar cuyo coste fue de 2.27 dólares y posteriormente 5lb de café y 4 de azúcar a los mismos precios costaron 1.88 dólares. Hallar el precio de cada libra de café y cada libra de azúcar.

a) café = 0.40; Azúcar = 0.08
b) café = 0.32; Azúcar = 0.07
c) café = 0.35; Azúcar = 0.06
d) café = 0.40; Azúcar = 0.07
e) café = 0.32; Azúcar = 0.06

9.- Una Compañía de artículos varios quiere producir 3 tipos de recuerdos: los tipos A, B y C. Para fabricar un recuerdo tipo A se necesitan dos minutos en la maquina I, un minuto en la maquina II y dos minutos en la maquina III; un recuerdo o souvenir tipo B, un minuto en la maquina I, tres minutos en la maquina II y uno en la III; y un recuerdo de tipo C, un minuto en la maquina I y dos minutos en cada una da las maquinas II y III. Hay tres horas disponibles en la maquina I, cinco horas disponibles en la maquina II y cuatro horas en la maquina III para procesar un pedido. ¿Cuántos recuerdos de cada tipo debe fabricar la compañía ahora utilizar todo el tiempo disponible?

a) recuerdo A = 35 ; recuerdo B = 49; recuerdo C=60

b) recuerdo A = 35 ; recuerdo B = 48; recuerdo C=60

c) recuerdo A = 36 ; recuerdo B = 48; recuerdo C=60

d) recuerdo A = 36 ; recuerdo B = 49; recuerdo C=60

e) recuerdo A = 36 ; recuerdo B = 49; recuerdo C=80

MESOGRAFÍA

Bibliografía recomendada

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard; Hill, David R. "Algebra Lineal"	1	1-9, 62-90
Poole David, Algebra Lineal: Una introducción Moderna	2	57-88

Bibliografía

1. Kolman, Bernard; Hill, David R. "*Algebra Lineal*", Pearson. Prentice Hall, Octava Edición, 648pp.

2. Poole David, *Algebra Lineal: Una introducción Moderna*, Thomson, Primera Edición, 2004, 763pp.

Bibliografía complementaria

1. David C. Lay, Algebra Lineal y sus aplicaciones, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.

2. Grossman, Stanley Y, Algebra Lineal, Mc Graw Hill, 1996, México, 634pp.

Sitios electrónicos

http://www.es.wikipedia.org/wiki/algebra_lineal

http://www.vitutor.com/algebralineal.html

UNIDAD 2

ESPACIOS VECTORIALES

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno identificará los elementos y propiedades de los espacios vectoriales.

INTRODUCCIÓN

Los fundamentos matemáticos de la ingeniería de sistemas descansan sobre los espacios vectoriales y las funciones, en este capítulo se tratara la teoría de vectores en R^n y su relación con los espacios vectoriales. Por ejemplo los sistemas de control de una terminal aérea están basados en operaciones con vectores o matrices, existen muchas otras aplicaciones de los espacios vectoriales, en el mundo real. Para empezar el mundo en el que vivimos es un espacio vectorial, si queremos la posición de cualquier punto necesitamos coordenadas, o cambiar de base para obtener unas coordenadas mas sencillas. Cuando te miras a un espejo estás haciendo una simetría que no es más que una aplicación lineal. Cuando proyectas algo también tienes una aplicación lineal. Luego también aplicas cambios de base para diagonalizar matrices cuando quieres resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, y ese sería un ejemplo aplicable a infinidad de sistemas, ya que las ecuaciones diferenciales aparecen en todas partes.

En esta unidad, se iniciará con las definiciones básicas de vectores, distancia entre dos puntos, para después desarrollar el marco general de los espacios vectoriales conocerás y aplicara teorías de vectores y se adentrara a los espacios vectoriales, combinación lineal e independencia lineal

LO QUE SÉ

Retomando tus conocimientos previos, define con tus propias palabras el término vector y lo que sabes sobre las dimensiones vectoriales, responde también cuál es su utilidad.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

2.1 Vectores en el plano

2.2 El productor vectorial y las proyecciones en R^2

2.3 Vectores en el espacio

2.4 Subespacio vectorial

2.5 Combinaciones lineales

2.6 Independencia lineal

2.7 Bases y dimensión

2.1 Vectores en el plano

En muchas aplicaciones tratamos con cantidades mensurables, tales como la presión, la masa, la temperatura y la rapidez, que pueden describirse por completo mediante su magnitud (un solo número), ejemplo 10 psi, 3Kg, 35°C etc.. Por otro lado existen otras cantidades mensurables, como la velocidad, la fuerza y la aceleración, para cuya descripción es necesario plantear no solo una magnitud sino también una dirección (ejemplo un auto recorre 10 Km en dirección este) . Estas cantidades que deben indicar una dirección de denominan vectores. Los vectores se denotaran con una letra minúscula en negrita, u, v, w, t, z etc.

En el contexto de los vectores, las constantes (es decir los números reales) son conocidas como escalares y se simbolizan con letras minúsculas cursivas *a, b, c, k* etc.

Para empezar nuestro estudio de espacios vectoriales necesitamos la definición de vector, el cual podemos definir como:

> El segmento de recta dirigido de un punto U a otro punto V.

Sea uv el segmento o vector; se conoce a u como punto inicial y a v como punto terminal. Cualquier vector en el plano tiene las siguientes propiedades: magnitud, dirección y sentido.

La magnitud de cualquier vector *v* se define de la siguiente manera: $\lvert v \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$ 1. La dirección se puede definir como el ángulo θ (respecto al eje *x*) de tal forma que si v= (a, b) y $0<\theta<2\pi$ entonces. $\tan\theta = \frac{b}{a}$
Sea a = (x, y) el cual representa una matriz de 2 x 1 de modo que : a= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde *x* e *y* son números reales y se denominan componentes del vector. 3.- Los vectores en el plano tienen las siguientes características. Sea a= $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y b= $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ a y b son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Se define la suma de vectores como a + b= $\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ 4.- Si a= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa un vector y α es un escalar, entonces: αa= $\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$

Multiplicación por escalar

Ejemplo

Si a= $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ representa un vector y 3 es un escalar, entonces

3a= $\begin{bmatrix} 3(-5) \\ 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 9 \end{bmatrix}$

Magnitud

Ejemplo

Si u= (2,-5), encuentra su magnitud y dirección.

Magnitud: |u| $\sqrt{(2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

Dirección: que corresponde al cuarto cuadrante.

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{-5}{2}\right) = -68.19^0 = 291^0$$

Encuentra la distancia entre los puntos P (3,2) y Q (-1,5), o la longitud del segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$.

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

2.2 El productor vectorial y las proyecciones en R^2

Se define el producto vectorial entre ***a*** y ***b*** donde a = (x_1, y_1) y b = (x_2, y_2) como:

= $x_1x_2 + y_1y_2$, donde es un escalar.

Ejemplo:

Sean ***x*** y ***z*** dos vectores ***x*** = (1,2) y ***z*** = (3,4); entonces, su producto vectorial es:

(1,2) (3,4) = 1(3) + 2(4) = 3 + 8 = 11

Proyección de vectores:

Se define una proyección en R^2 entre *a* y *b* y, considerándolos como dos vectores diferentes de cero, entonces la proyección de *a* sobre *b* es un vector que se define como:

$$Proy_b a = \left[\frac{a \cdot b}{|b|^2}\right] b$$

Donde se cumple que:

La $proy_b a$ es paralela a **b**

La diferencia a - $Proy_b a$ es ortogonal a **b**

a=(b-$Proy_b a$) + $Proy_b a$

Ejemplo:

Calcular la $proy_b a$ considerando los vectores a=(1,2) y b=(2,3)

Calculamos a b=(1,2)(2,3)=1(2)+2(3)= 2 + 6 = 8

$$|b| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Al cuadrado, el término anterior es igual a 13.

$$Proy_b a = \frac{8}{\sqrt{13}^2}(2,3) = \left(\frac{16}{13}, \frac{24}{13}\right)$$

Ejemplo:

Calcular el vector a- proy$_b$a considerando los vectores a=(1,1) y b=(2,3)

Calculamos a b= (1,1)(2,3)=1(2)+1(3)= 2 + 3 = 5

|*b*| $= (2^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (4+9)^{\frac{1}{2}} = (13)^{\frac{1}{2}}$

Al cuadrado, el término anterior es igual a 13.

proy$_b$a $= \frac{5}{13}(2,3) = \left(\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$;

$a - Proy_b a = (1,1) - \left(\frac{10}{13}, \frac{15}{13)}\right) = (\frac{3}{13}, -\frac{2}{13})$

2.3 Vectores en el espacio

Los vectores en el espacio son todas las ternas ordenadas de números reales, es decir,

R^3 = (x, y, z)

Así, un vector en el espacio es:

$a = (a_1, a_2, a_3)$ $b = (b_1\ b_2, b_3)$

Y cumple con las siguientes propiedades:

1. a + b es único y a + b $\in R^3$
2. a + (b + c) = (a + b) +c
3. 0+ a = a, donde 0 = (0,0,0)
4. –a + a = 0 donde –a = $(-a_1,-a_2,-a_3)$
5. a + b = b + a
6. αa es único y αa $\in$ R3
7. α (a+b) = αa + αb
8. (α+β)a = αa + βa
9. α(βa) = ($\alpha\beta$)a
10. a=a

Donde la **magnitud** de cualquier vector será:

$$|a| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$

Y la distancia entre dos puntos a y b estará representada por:

$$|ab| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Angulo entre vectores:

Como en R^2, también podemos encontrar en el espacio el ángulo entre dos vectores a=(x_1, y_1, z_1) y b=(x_2, y_2, z_2) de la siguiente manera:

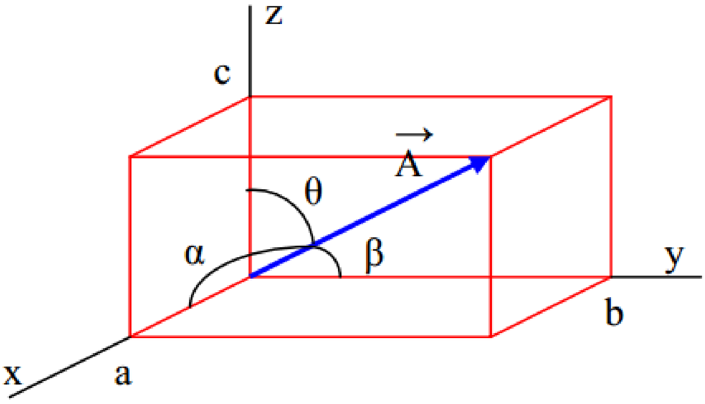
$$\cos\theta = \frac{a\cdot b}{|a||b|} \quad ; \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{a\cdot b}{|a||b|}\right)$$

Vectores en tres dimensiones

Expresando los vectores en función de sus coordenadas como

$\vec{A} = (a, b, c)$

También puede ser expresado como $\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son vectores unitarios que indican la dirección de los ejes x, y, z respectivamente.



Para calcular el modulo de es

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cosenos Directores

$$cos^2 \propto + cos^2\beta + cos^2\theta = 1$$

$$cos\alpha = \frac{a}{A} \longrightarrow a = Acos\alpha$$

$$cos\beta = \frac{b}{A} \longrightarrow b = Acos\beta$$

$$cos\theta = \frac{c}{A} \longrightarrow c = Acos\theta$$

Donde:

α: *es el ángulo que forma el vetor* $\vec{A}$ *con el eje* x

β: *es el ángulo que forma el vetor* $\vec{A}$ *con el eje* y

θ: *es el ángulo que forma el vetor* $\vec{A}$ *con el eje* z

$$\alpha = cos^{-1}\frac{a}{A}$$

$$\beta = cos^{-1}\frac{b}{A}$$

$$\theta = cos^{-1}\frac{c}{A}$$

Se deja como ejercicio los siguientes vectores

Si u_1= (4, 5, 1) y u_2= (2, 3,0) Determine:

a) $u_1 + u_2$

b) $2u_1 - u_2$

El Ángulo que forman los Vectores A = (3, 0, 1) y B = (6, 0, 0) es igual a:

2.4 Sub-espacio Vectorial

Iniciaremos definiendo qué es un espacio vectorial.

Un espacio vectorial es un **conjunto de vectores** ($V_1, V_2 \ldots V_n$) que cumplen con las siguientes propiedades:

Si *x* y *w* son dos vectores de un espacio vectorial V, entonces existen operaciones *x + y* tal que:

a) x + w= w+x.

b) x+ (w+t)=(x+w)+t.

c) Existe un único elemento 0, tal que x+0=0+x=x.

d) Para cada *x* existe un *w,* tal que x+w=w+x=0.

e) Si *k* es cualquier número real, entonces k (x+w)=kx+kw.

f) Si *k* y *d* son dos números reales, entonces (k+d)x=kx+dx.

g) Si *k* y *d* son dos números reales, entonces k(dx)=(kd)x.

h) Existe un número 1, tal que 1 (x)= x.

Ejemplo:

Sean x=(1,2), w=(1,1), t=(0,1) y números reales k=2 y d=3

1. **x+w=w+x** (1, 2)+(1,1) =(1+1, 2+1) =(1+1,1+2) = (1,1)+(1, 2)
2. **x+(w+t)=(x+w)+t** (1, 2)+{(1,1)+(0,1)} = (1,2)+{(1+0, 1+1)} ={1+1+0, 2+1+1} = {(1,2)+(1,1)}+(0,1) = {(1+1, 2+1)}+(0,1) = {1+1+0, 2+1+1}
3. **x+0=0+x=x** (1,2)+(0, 0)=(1+0, 2+0) =(1, 2)
4**. x+w=w+x=0** (1,2)+(-1,-2) = (1-1, 2-2) = (-1+1,-2+2) = (0,0)
5. **k (x+w)=kx+kw** 2{(1, 2)+(1,1)} =2{(1+1,2+1)} = {2(1)+2(1), 2(2)+2(1)} = {2(1),2(2))+(2(1),2(1)} = 2(1,2)+2(1,1)
6. **(k+d)x=kx+dx** (2+3)(1, 2) = {(2+3)(1),(2+3)(2)} = {2(1),2(2)+(3(1),3(2)} = 2(1,2)+3(1,2)
7. k(dx)=(kd)x 2{3(1,2)} = 2{3(1),3(2)} = {2(3)(1),2(3)(2)} = {(2)(3)}(1,2) = {(2)(3)(1), (2)(3)(2)}
8. **1 (x)= x** 1x=1(1,2)=((1)1,(1)2)= (1,2)

Un sub-espacio vectorial de V, si S es un subconjunto de V y en sí, es un espacio vectorial respecto a la adición y multiplicación definidas en V. Además, deberá cumplir las siguientes condiciones:

$$\forall\ u, v \in S: u+v \in S$$
$$\forall\ \alpha \in k, v \in S: \alpha v \in S$$

Ejemplo:

Determine los “Sub-espacios Vectoriales” dados los “Espacios Vectoriales” siguientes:

1. Sea V el Espacio Vectorial R^3. Entonces, el conjunto W formado por los vectores cuya tercera componente es cero, es el siguiente sub-espacio:

Respuesta:

W = { (a, b, 0) : a, b ∈R }

2.- Sea V el conjunto de todos los polinomios $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \text{---} + a_n t^n$ con coeficientes a_i, en un cuerpo K en R; entonces, el conjunto W formado por los polinomios menor o igual que *n* está dado por el sub-espacio siguiente:

Respuesta:

W = {Polinomios <= n: para un n fijo}

2.5 Combinaciones Lineales

Un vector es una combinación lineal de los vectores $V_1, V_2 \ldots \; V_n$ y puede ser expresado de la forma:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

Donde $a_1, a_2 ... a_n$ son escalares.

Ejemplo:

Se tienen dos vectores cualesquiera (2,-1, 0) y (3, 8, 8), y escalares 4 y 6, respectivamente.

Entonces, la combinación se representa por la suma de los vectores multiplicados por sus respectivos escalares.

4(2,-1, 0) + 6(3, 8, 8) = (8,-4, 0) + (18, 48, 48) = (26, 44, 48)
Sea V un espacio vectorial sobre *k*, y sea

$$G = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

Un conjunto de vectores de V. Se dice que G es un generador de V si para todo vector $x \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m,$ tales que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

El espacio generado es el conjunto de combinaciones lineales de $v_1, v_2 \dots v_m$, es decir,

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \{ v{:}v = a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_mv_m\}$$

Ejemplo.

Sean {(1, 2), (3, 4), (6, 7)} un conjunto de vectores y 2, 3 y 6 tres escalares, respectivamente.

Entonces, si existe una *x* tal que

x= 2 (1, 2) + 3 (3, 4) + 6 (6, 7)

Entonces es un generador de V
x= (2, 4) + (9, 12) + (36, 42) = (2+9+36, 4+12+42) = (47,58)

2.6 Independencia Lineal

Un conjunto de vectores v_1, v_2, v_3 y v_n, *n vectores es un espacio vectorial V,* es linealmente independiente si existen escalares c_1, c_2, c_3 y c_n que una combinación lineal de dichos vectores con los anteriores escalares, respectivamente; si esta última operación da cero y los escalares son todos iguales a cero, entonces se trata de una combinación lineal, linealmente independiente.

1. Independencia Lineal: Sea S = { v_1, v_2, v_3 …. v_n} un conjunto de “Vectores”, entonces: **S es linealmente independiente si la igualdad** $a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n = 0$ Sólo se satisface con $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$
2. Dependencia lineal: Sea S = {v_1, v_2,…, v_n} un conjunto de “Vectores”, entonces: S es linealmente dependiente si existen escalares a_1, a_2, … , a_n, no todos iguales a cero, tales que: $a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n = 0$
Nota: a) Todo conjunto que contiene al vector 0 es linealmente dependiente. b) Si S es un conjunto linealmente independiente entonces cualquier subconjunto de S es linealmente independiente.

2.7 Bases y Dimensión

Un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial V si:

I) Genera a V

II) Es linealmente independiente

Si B = { $V_1, V_2 \ldots V_n$} es una base de V, entonces cualquier otra base de dicho espacio está formada por *n* vectores, es decir, dos bases cualesquiera de V tienen igual número de vectores.

DIMENSIÓN

Si B = { $V_1, V_2 \ldots V_n$} es una base de V, se dice que V es de dimensión *n*, es decir, es el número de elementos en una base de V.

Si V es un espacio vectorial de dimensión *n*, cualquier conjunto linealmente independiente formado por *n* Vectores de V es una base de dicho espacio.

Si V es un espacio vectorial de dimensión *n* y S es un sub-espacio de V, entonces:

Por lo que, si dimS=n, entonces S = V.

Ejemplo:

Sean *a* y *b* dos vectores que generan a R^2 , *a* = (1,2) y *b* = (1,3), entonces consideremos a todos los vectores del espacio vectorial como x=(x, y), y escalares a_1 y b_1.

$$X=a_1\ a + b_1\ b = a_1\ (1,2) + b_1\ (1,3) = (\ a_1 + b_1,\ \ 2\ a_1 + 3b_1) = (x,y)$$

$$b_1 = y-2x$$
$$a_1 = 3x-y$$

Como *x* e *y* pueden tomar cualquier valor, los vectores *a* y *b* generan R^2 y su dimensión es igual al número de vectores, y como son 2, su dimensión es dos.

RESUMEN

En forma cotidiana podemos definir al “Vector” como una cantidad que tiene: “Magnitud”, Dirección” y “Sentido”; y esto se debe a partir de conceptos físicos cuya descripción se refiere a algo más que un número. Los conceptos físicos han encontrado una adecuada representación geométrica los cuales pueden ser caracterizados y manejados analíticamente mediante parejas o ternas ordenadas de números.

En muchas ramas de las “Matemáticas” se presentan frecuentemente conjuntos, con elementos de muy distinta naturaleza donde se emplea con frecuencia el concepto de “Combinación Lineal”. Estos conjuntos con las leyes de la adición y la multiplicación por un escalar definidas en forma usual, tienen en común un gran número de propiedades algebraicas la cual se conoce como “Espacio Vectorial”. De manera general, a los elementos de un “Espacio Vectorial” se les llama “Vectores” y en toda la unidad es el concepto básico y fundamental para poder desarrollarlo y aplicarlo.

GLOSARIO

Mensurable

Una variable con características medibles

Escalar

Cantidad numérica o número real

Vector

Herramienta geométrica utilizada para representar una magnitud física del cual depende únicamente un módulo y dirección

Espacio Vectorial

Estructura matemática creada a partir de un conjunto no vacío con una operación suma interna al conjunto

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Para los siguientes ejercicios determine si es “Linealmente Independiente” o es “Linealmente Dependiente” de acuerdo a lo que se pide en cada uno de las siguientes afirmaciones:

1. El Conjunto de Vectores de R^3 B = {(1, 0, -2), (-4, 2, 0), (0, 2, -4)} es Linealmente Independiente o Linealmente Dependiente.
2. El Conjunto de Vectores de R^3 A = {(1, 2, 1), (3, 1, 5)} es Linealmente Independiente o Linealmente Dependiente.
3. El Conjunto de Vectores de R^3 B = {(1, 2, 1), (3, 1, 5), (3, -4, 7)} es Linealmente Independiente o Linealmente Dependiente.
4. El Conjunto de Vectores de R^3 C = {(0, 0, 0), (1, 1, 1)} es Linealmente Independiente o Linealmente Dependiente.

ACTIVIDAD 2

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. El Conjunto de Vectores de R^3 B = {(1, -2, -3), (3, 2, 1)}, entonces su dimensión es:
2. El Conjunto de Vectores de R^3 A = {(0, 1, -2), (1, -1, 1); (1, 2, 1)}, entonces su dimensión es:

ACTIVIDAD 3

Responde los siguientes ejercicios:

1. Probar si el conjunto de vectores u =(-2,3,-3), v =(3,-1,9) w =(3,5,10) es una base de R^3.

2) Considérense los Vectores a = (3, 0, -2) y b = (4, 1, -1); entonces, la Combinación Lineal de a y b está dada por el Vector c = -a + 2b; por lo tanto, es: (5, 2, 0)

3) Considérense los Vectores a = (3, 0) y b = (4, 1), y los Escalares 2 y 4, respectivamente; entonces, un Generador del conjunto de V es: (22, -4).

4) Considérense los Vectores a = (3, 0, 1) y b = (4, 1, 2), y los Escalares 2 y 4, respectivamente; entonces, un Generador del conjunto de V es: (22, 4, 10)

5) Considérense los Vectores a = (3, 0, -2) y b = (4, 1, -1), entonces la Combinación Lineal de a y b está dada por el Vector c = a + 2b; por lo tanto, es: (11, -2, 4)

6) Considérense los Vectores a = (3, 0, -2) y b = (4, 1, -1), entonces la Combinación Lineal de a y b está dada por el Vector c = 2a + 2b; por lo tanto, es: (14, 2, -6)

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

1. Explica el concepto de vector.
2. ¿Qué es el producto vectorial?
3. Explica con un ejemplo a qué valor se llega cuando los vectores son paralelos al aplicar el producto cruz.
4. ¿Qué es la proyección *a* en dirección *b*?
5. ¿En qué consiste la última propiedad de los espacios vectoriales?
6. ¿Qué es la dimensión de un espacio vectorial?
7. ¿Qué es un espacio vectorial?
8. ¿Qué es un sub-espacio vectorial?
9. ¿Qué es la independencia lineal?
10. ¿Qué es la dependencia lineal?

LO QUE APRENDÍ

Resuelve los siguientes ejercicios:

1). En el siguiente caso: sean los “Vectores” a = (-5, 8) y b = (1, 1); determinar la Comp. Esc.$_b$ a y la Comp. Vect. $_b$ a:

2). El Ángulo entre dos “Vectores” es de 120 o. Si │a│= 3 y │b│= 4. Calcular: a ▪ a; a ▪ b y b ▪ b.

3). En el siguiente caso: sean los “Vectores” a = (1, 2, -3) y b = (0, 0, 1); determinar la Comp. Esc.$_b$ a y la Comp. Vect. $_b$ a.

4). Un “Vector” c tiene como módulo 52 y es perpendicular común a los “Vectores” a = 4i + 3j y b = -4i + 6j + k; entonces las componentes de dicho “Vector” son:

5). Usando el “Producto Vectorial” son paralelos los “Vectores” a = 3i – j – 2k y b = -9i + 3j + 6k.

6). Determina si el “Conjunto A”; donde A = {(1, y) │y $\in$ R} es un “Subespacio” del “espacio Vectorial” R^2.

7). Del siguiente “Conjunto” A = {(1, -3, 2), (2, 4, 1), (3, 1, 3), (1, 1, 1)}; una Base de R^3 es

8). Para qué valor de k el “Vector” u = (1, k, 5) de R^3. será una “Combinación Lineal” de los “Vectores” v = (1, -3, 2) y w = 2, -1, 1)

9). Sea S = {$ax^3 + 2ax^2 + 3bx + b$ │a, b $\in$ R}; un “Espacio Vectorial” sobre el campo de los “Números Reales”. Determinar una Base y la Dimensión de dicho “Espacio Vectorial.

10). Considera a G = {(1, t^2, t)}; como una Base del “Espacio Vectorial” P = {$at^2 + bt + c$ │a, b, c $\in$ R} definido sobre R. Entonces el “Vector de Coordenadas” de p(t) = $3t^2 + 2$ en la Base G es.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas.

Para los siguientes casos determinen la “Magnitud” de los siguientes “Vectores en el Plano”.

1) Sea el “Vector” A = (1,5); entonces su “Magnitud” es:

- a) $2\sqrt{12}$
- b) $\sqrt{24}$
- c) $\sqrt{26}$
- d) $2\sqrt{13}$
- e) 26

2) Sea el “Vector” B = (1,-7); entonces su “Magnitud” es:

- a) $7\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{47}$
- c) $5\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{48}$
- e) $5\sqrt{2}$

3) Sean los “Vectores” C = (2,3); D = (6, 7); y E = (7, 5). Los cuales los lados de un “Triangulo”; entonces la “Magnitud” de cada “vector” es:

- a) $C = \sqrt{29}$; $D = \sqrt{116}$; $E = \sqrt{145}$
- b) $C = \sqrt{28}$; $D = \sqrt{117}$; $E = \sqrt{145}$
- c) $C = \sqrt{27}$; $D = \sqrt{119}$; $E = \sqrt{146}$
- d) $C = \sqrt{30}$; $D = \sqrt{120}$; $E = \sqrt{148}$
- e) $C = \sqrt{31}$; $D = \sqrt{125}$; $E = \sqrt{150}$

4) Determine si los “Vectores” del “Reactivo 3” conforman un “Triangulo Rectángulo”:

- a) si
- b) no

5) Sea el “Vector” F = (-9, 8); entonces su “Magnitud” es:

- a) 14
- b) 12
- c) 11
- d) 10
- e) 13

6) El “Ángulo” que forman los “Vectores” A = (3, 0, 1) y B = (6, -2, 0); es igual a:

- *a.* θ = ang cos (9/10).
- *b.* θ = ang cos (9/11).
- *c.* θ = ang cos (9/12).
- *d.* θ = ang cos (9/13).
- *e.* θ = ang cos (9/14).

7) Sean los Vectores A = (2, 3, 6) y B = (-4, -2, -3), entonces la Proyección de A sobre B es igual a:

- a. $-32/\sqrt{29}$
- b. $-31/\sqrt{28}$
- c. $-33/\sqrt{29}$
- d. $-34/\sqrt{27}$
- e. $-32/\sqrt{26}$

8) Un conjunto no vacío U de un Espacio Vectorial V sobre F es un Sub-espacio de V si, y sólo si U es cerrado con respecto a la multiplicación escalar y a la adición vectorial definidas sobre V.

- **a. Sí**
- **b. No**

9) En el Espacio Vectorial V3 (R) sobre R, sean U generado por A = (1, 2, -1) y B = (2, -3, 2) y W generado C = (4, 1, 3) y D = (-3, 1, 2). ¿Son U y W idénticos sub-espacios de V?

- **a. Sí**
- **b. No**

II. Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1) El Conjunto de Vectores de R^3 A = {(1, -2, 3), (3, -6, 9)}, entonces su dimensión es:

- **a. 1**
- **b. 2**
- **c. 3**
- **d. 4**
- **e. 5**

2) El Conjunto de Vectores de R^3 B = {(1, -2, -3), (3, 2, 1)}, entonces su dimensión es:

- **a. 1**
- **b. 2**
- **c. 3**
- **d. 4**
- **e. 5**

3) Conjunto de Vectores de R^3 A = {(0, 1, -2), (1, -1, 1); (1, 2, 1)}, entonces su dimensión es:

- **a. 3**
- **b. 1**
- **c. 2**
- **d. 4**
- **e. 5-**

MESOGRAFÍA

Bibliografía básica

1. Kolman Bernard David, Pearson, Algebra Lineal, Prentice Hall, Octava Edición, 648pp.

2. David Poole, Algebra Lineal: Una introducción moderna, Thomson, Primera Edición, 2004, 763pp.

Bibliografía complementaria

1. David C. Lay, *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.

2. Grossman, Stanley Y, *Algebra Lineal*, Mc Graw Hill, 1996, México, 643pp.

Sitios electrónicos

http://www.es.wikipedia.org/wiki/algebra_lineal

http://depa.fquim.unam.mx/~jesusht/cvvalineal.pdf

http://www.matematicasbachiller.com/temario/algebra/index.html

UNIDAD 3

TRANSFORMACIÓN LINEAL

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá los elementos, propiedades y la representación matricial de las transformaciones lineales

INTRODUCCIÓN

En la vida actual es muy importante resolver problemas utilizando las matemáticas.

> Cuando se trabaja con espacios vectoriales surgen situaciones en las cuales es de utilidad usar las transformaciones lineales para la solución de problemas, una parte importante es la representación matricial de una transformación lineal. Kolman, (2006) pp. 272 y 521

Aplicaciones de las Transformaciones Lineales

> Se aplican en sistemas de ecuaciones lineales, en matrices y en un sin número de problemas, gracias a las transformaciones lineales sabemos el dominio e imagen y teniendo esto saber si es un espacio vectorial. Poole, D (2007 pag.201

LO QUE SÉ

Define sin recurrir a ninguna referencia el término “Transformación lineal”, posteriormente consulta textos en los que puedas enriquecer tu conceptualización, puedes usar la bibliografía recomendada para la materia.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

3.1.1 Definición y ejemplos

3.1.2 Propiedades: imagen y Kernel

3.1.3 Representación matricial de una transformación lineal

3.1.4 Isomorfismos

3.1. Definición y ejemplos

A continuación se tiene una simbología utilizada que se utilizará en las transformaciones lineales:

Una letra minúscula a, b,…… representa un “Vector”.

Una letra mayúscula A, B… un “Espacio Vectorial” y también “Sub-espacios Vectoriales”.

“Vectores” entre llaves {a, b…} una “Base Generadora”.

Representa una “Transformación Lineal” con su dominio y contra dominio “T: V→W”.

Representa la “Dimensión” de un “Espacio Vectorial” dim (V).

Transformación Lineal

Definimos una “Transformación Lineal” T de un espacio vectorial R sobre un espacio vectorial S a una función que asigna a cada vector r∊ R un único vector. Es decir, si R y S son espacios vectoriales una función T: R recive el nombre de transformación tal que :

Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal T de R en S es una función que asigna a cada vector u en V un único vector T(u) en S tal que :

a) T(u+v) =T(u)+T(v) cualesquiera sean u y v en V.
b) T(ku) = k T(u), para cada u en V y cada escalar K (Kolman, (2006), p. 502)

Ejemplo 1:

Definamos la función T: $R^3 \Rightarrow R^2$ definida bajo la regla T(*x, y, z*) = (*x, y*) así se tiene que:
Se sustituye la *x* por el 8 y la *y* por el 5.
T (8, 5, 9) = (8,5)

Ejemplo

Sea T: $R^3 \Rightarrow R^2$ definida por:

Del lado de la derecha de la igualdad, primero se sustituye la z por 2 y enseguida la z multiplicada por 2.

T (x, y, z) = (z, 2z), entonces cualquier transformación sería:
(2, 1, 4) = (4, 8)

Una transformación es lineal si cumple:

i. T (v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)
ii. (αv_1) = αT(v_1)

Propiedades de las transformaciones lineales:

- Si T: R $\Rightarrow$ S es una transformación lineal, entonces, T(0) = 0
- Sea T: R $\Rightarrow$ S una transformación lineal. Si C = $\{r_1, r_2\ldots r_n\}$ es una base de R, entonces el conjunto G = $\{T(r_1), T(r_2)\ldots T(r_n)\}$ es un generador.

3.2 Propiedades: Imagen y Kernel

Propiedades de las transformaciones lineales: *imagen y núcleo.*

Consideremos en primer lugar a la transformación de R^3 en R^2, definida por:
S (x, y, z) = (y, 3y)

La imagen de cualquier vector bajo esta transformación es una pareja ordenada cuya segunda coordenada es el triple de la primera.

Al conjunto de todos esos vectores se le conoce como "imagen" de la transformación S.

Una vez definida la imagen de una transformación, nos introduciremos a la definición de núcleo.

Se llama núcleo de una transformación al conjunto de vectores cuya imagen es el vector cero.

3.3 Representación matricial de una transformación lineal

La representación matricial de una transformación lineal nos indica la relación existente entre ambas para que una transformación lineal encontrar su representación matricial.

Consideremos la transformación T: R^3 a R^2 definida por:

T(x, y, z) = (x+2y, 3x-z)

Tratemos de encontrar una matriz A tal que el producto de ésta por cualquier vector del dominio nos proporcione la imagen de dicho vector bajo la transformación T, es decir, una matriz A que cumpla,

A**v** = T(v)

Como v es un vector de R^3 y T(v) es un vector de R^2 la igualdad anterior sólo podrá lograrse mediante una matriz A de 2x3. En consecuencia, la matriz a tendrá la forma Lay, (2004) p.75:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Y satisfacer la igualdad

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2x \\ 3x - z \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = x + 2y \quad \text{y} \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 3x - z$$

Lo cual es válido para los valores

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 0$$
$$a_{21} = 3,\ a_{22} = 0,\ a_{23} = -1$$

Por lo que nuestra matriz A es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A esta matriz se le conoce como matriz asociada a la transformación T.

Una vez calculada nuestra matriz asociada, estudiemos las imágenes de los vectores de la base canónica, es decir,

$$R = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

Bajo la transformación T definida con anterioridad tenemos que:

T (1, 0, 0) = (1, 3)

T (0, 1, 0) = (2, 0)

T (0, 0, 1) = (0, -1)

Éstos elementos no son más que los vectores columna que integran la matriz asociada T, por lo cual, podemos concluir que, para obtener la matriz asociada a una transformación basta con calcular las imágenes de los vectores que integran la base canónica del dominio.

Para toda transformación lineal de R_n en R_m, existe una matriz a de mxn que cumple Tx = Ax para toda $x \in R_n$.

Definición. Sea T: $R_n \to R_m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única A de mxn tal que Tx = Ax para toda x.

Ejemplos de Aplicaciones de las Transformaciones Lineales

1. Una casa editora publica un libro en tres ediciones diferentes: cubierta dura, cubierta blanda y cubierta de lujo. Cada libro requiere cierta cantidad de papel y de material para la cubierta. Los requisitos están dados en gramos por la siguiente matriz:

	Cubierta dura	**Cubierta blanda**	**Cubierta de Lujo**
Papel	300	500	800
Material para la cubierta	40	50	60

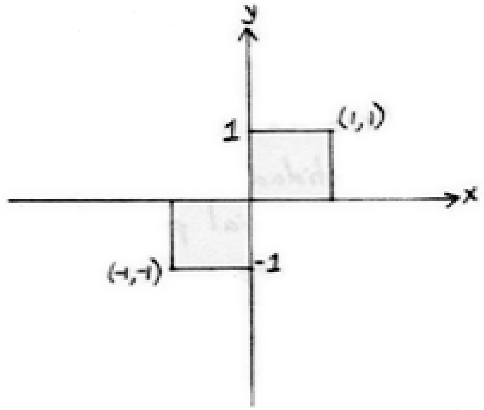
Deja que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ represente el vector producción, donde x_1, x_2, x_3 representan el número de libros con cubierta dura, cubierta blanda y cubierta de lujo respectivamente, que se publican. La transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por

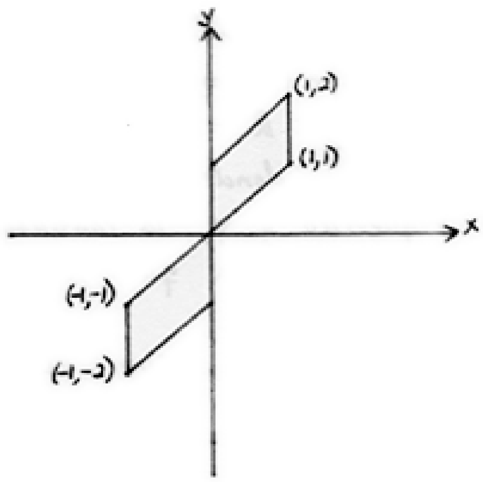
T(x) = Ax nos da el vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, donde y_1 representa la cantidad total de papel requerido y y_2 la cantidad de material para la cubierta. Suponga que $x = \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix}$, entonces,

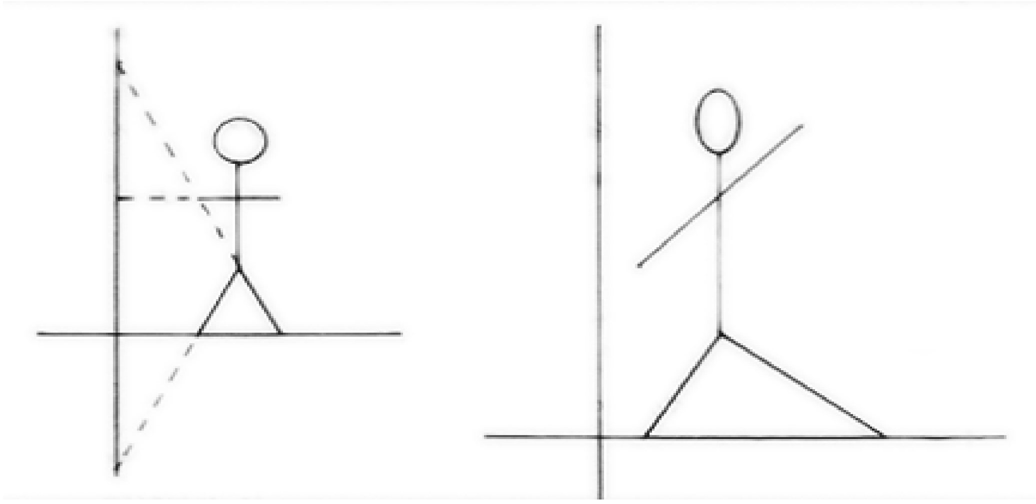
$$T(x) = Ax = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810{,}000 \\ 87{,}000 \end{pmatrix}$$

Por lo que se requiere 810,000 gramos en papel y 87,000 gramos en material para la cubierta.

2. ¿Puede una transformación lineal cambiar un dibujo por otro? Observa como la transformación T; $R^2 \rightarrow R^2$ definida por T(x, y) = (x, x+y) cambia los siguientes dibujos:







3.4. Isomorfismo

Para introducirnos en el estudio de los isomorfismos debemos tener claras algunas definiciones que se presentan a continuación.

Definición. Sea T: V $\Rightarrow$ W una transformación lineal, se dice que T es uno a uno (notación 1 - 1) si ocurre:

$$\mathbf{Tv_1 = Tv_2 \;\Rightarrow\; v_1 = v_2}$$

Es decir, si todo vector w en la imagen de T es de a lo sumo un vector en V.

Definición. Sea T: V $\Rightarrow$ W una transformación lineal. Se dice que T es sobre, si para toda w$\in$W existe al menos una v$\in$V tal que Tv = w. Es decir, T es sobre:

Si y sólo si la imagen de T = W.

Para dejar aún más claros estos conceptos, tomemos en cuenta la siguiente definición.

Sea T: V $\Rightarrow$ W una transformación lineal, supongamos que dimV = dimW = n, entonces

1. si T es 1 - 1, entonces T es sobre
2. si T es sobre, entonces T es 1 - 1.

Se dice que la transformación lineal T: V $\Rightarrow$ W es un isomorfismo si T es 1 - 1 y es sobre dos espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. (notación V $\cong$W).

Ejemplo: Sea T: R^3 $\Rightarrow$ P_2 definida por $\mathbf{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{a+bx+cx^2}$. Supongamos que $\mathbf{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathbf{0 = 0+0x+0x^2}$. Entonces a = b = c = 0. Es decir, núcleo de T = 0 y t es 1 - 1.

RESUMEN

En diversas ramas de las Matemáticas, la Física y las distintas Ciencias Sociales; se utilizan con frecuencia modelos que emplean en su estructura funciones vectoriales de variable vectorial; es decir, funciones de la forma w = f (v); donde w y v son “Vectores”. A tales funciones se denomina usualmente “Transformaciones”.

Por consiguiente esta unidad se refirió a una clase especial de “Transformaciones”; llamadas “Transformaciones Lineales”; las cuales son las más simples y también las de mayor aplicación.

En la práctica profesional, muchos problemas que involucran “Transformaciones” de tipo general suelen resolverse aproximando éstas a las “Transformaciones Lineales”.

GLOSARIO

Kernel

Núcleo

Isomorfismo

De la palabra griega iso (lo mismo), y morfos (de la palabra griega forma.

Subespacio

Subconjunto de un espacio vectorial, que debe cumplir ciertas características específicas.

Matriz

Una tabla bidimensional de números consistente en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Resuelve los siguientes ejercicios:

1) En "Geometría Analítica Plana" la conocida rotación de ejes de un ángulo α es una "Transformación Lineal" de V_2(R) en sí mismo. Analiza la siguiente relación, e indica si es Lineal o No lineal, justifica tu respuesta.

$$T: (x, y) \rightarrow (x\cos \alpha - y\,\text{sen}\, \alpha, x\,\text{sen} + y\cos \alpha)$$

2) Sea la siguiente Transformación T: $R_2 \rightarrow R_2$ definida por T(x, y) = (|x|, y). Es "Lineal" o es "No Lineal":

3) Sea la siguiente Transformación T: $R_3 \rightarrow R_3$ definida por T(x, y, z) = (2x, y+z, 0). Es "Lineal" o es "No Lineal":

4) Sea la siguiente Transformación S: $R_2 \rightarrow R_2$ definida por S(x, y) = (y, x2). Es "Lineal" o es "No Lineal":

5) Sea la siguiente Transformación S: $R_3 \rightarrow R_3$ definida por S(x, y, z) = (-x, y, 1). Es "Lineal" o es "No Lineal":

ACTIVIDAD 2

Resuelve los siguientes ejercicios.

1) Sea la siguiente Transformación Lineal T: $R^3 \rightarrow R^3$ definida por T(x, y, z) = (2x, y+z, 0). Determinar el “Recorrido” y su “Dimensión Correspondiente”.

2) Sea la siguiente Transformación Lineal S: $R^3 \rightarrow R^3$ definida por S(x, y, z) = (x+2y-z, y+3z, -x-y+4z). Determinar su “Recorrido” y su “Dimensión Correspondiente”.

3) Sea la siguiente “transformación Lineal” que comprende el siguiente “Espacio Vectorial” V = $\{ax^2 + bx + c \mid a = b, a, c \in R\}$. Aplíquese el “Operador Derivada” (d/dx) sobre los elementos de V y Determinar el “Recorrido” y su “Dimensión Correspondiente”.

4) Sea la siguiente “Transformación Lineal” S: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por S(x, y, z) = (y, 3y). Determinar el “Recorrido” y su “Dimensión Correspondiente”.

5) Sea la siguiente “Transformación Lineal” T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por T(x, y, z) = (x, y). Determinar el “Recorrido” y su “Dimensión Correspondiente”.

ACTIVIDAD 3

Resuelve los siguientes ejercicios.

1) Considérese a resolver la siguiente “Ecuación Matricial” 2BAX – 2CX = D; donde las “Matrices” A, B, C y D son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces la “Matriz X” vale:

2) Sean B = {b_1, b_2} y E = {e_1, e_2} dos Bases de R^2; relacionadas por: $b_1 = e_1 + 2e_2$ y $b_2 = -e_1 + e_2$ y sea la “Transformación Lineal” S: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que S (e_1) = b_1 y S(e_2) = b_2. Entonces las “Matrices” M_B^E(S) y M_E^B(S) son:

3) Elije la regla de correspondencia asociada a la transformación matricial dada la siguiente “Matriz Asociada” y justifica tu respuesta.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) T(x,y,z) ={ x-4y, y+x, 2x-2y+z,y-z}.

b) T(x,y,z) ={ x+4y, y-x, 2x+2y+z,y+z}.

c) T(x,y,z) ={ x+4y, y-x, 2x-2y+z,y-z}.

d) T(x,y,z) ={ x+4y, y+x, 2x-2y+z,y-z}.

e) T(x,y,z) ={ x+4y, y+x, 2x-2y+z,y-z}.

4) Indica cuál es el Núcleo y Recorrido que corresponde a la información presentada en la pregunta 3, justifica tu respuesta.

a) Dim T(R^3)=3; Dim N(T) =1

b) Dim $T(R^3)=4$; Dim $N(T)=2$

c) Dim $T(R^3)=4$; Dim $N(T)=1$

d) Dim $T(R^3)=3$; Dim $N(T)=0$

e) Dim $T(R^3)=4$; Dim $N(T)=1$

ACTIVIDAD 4

Resuelve los siguientes ejercicios.

1) Sea la siguiente Transformación $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por T (1, 0) = (0, -2). Es "Lineal" o es "No Lineal":

2) Sea la siguiente Transformación $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por T(1, 0) = (0, -3). Es "Lineal" o es "No Lineal":

3) De acuerdo a la "Transformación Lineal" $T: V \rightarrow W$ definida en el "Reactivo 3", si seleccionamos las siguientes "Bases" para V y W: A = $\{x^2, x, 1\}$ y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la "Matriz Asociada" a T es:

ACTIVIDAD 5

Para cada uno de los siguientes casos define si es Falso o Verdadero:

1) El término “Isomorfismo” significa “Etimológicamente”: “De Igual Forma”.

2) En general la sustitución de los elementos de un “Conjunto A” por los elementos de un “Conjunto B” puede hacerse mediante la función f: A ↔ B.

3) Cuando la función f: A → B es biyectiva entonces los elementos de A y B se encuentran en relación uno a uno.

4) Los Grupos (Z, +) y (S, *), donde s 0 {1, -1, i, -i}; entonces la función f(m) = im; constituye un “Isomorfismo”.

5) Un grupo constituido por el conjunto S de “Matrices Simétricas” de orden dos con elementos en R y el “Conjunto R^3 de las ternas ordenadas de números reales; es isomorfo.

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

1. ¿Cuál es el concepto transformación lineal?
2. ¿Qué es un isomorfismo?
3. ¿Qué es el Kernel de una transformación lineal?
4. ¿Qué es el núcleo de una transformación lineal?
5. Describe un ejemplo de una matriz que represente una transformación lineal.

LO QUE APRENDÍ

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Considera el "Espacio Vectorial" V sobre R formado por las "Matrices de Orden 3". Si se define la "Transformación" T: V → R donde T (A) = det (A) para todo A є V. Entonces la "Transformación" es lineal o no lineal:

2. Para la "Transformación Lineal" T: V → V donde V = {ax^2 + bx + c ⎢a, b, c є R}. Además se conoce que: T(2x^2 + 5x) = 3x^2; T(x^2 – 1) = -x^2 – 1; T(4) = 4. Entonces la "regla de Asociación de T es:

3. En el "Espacio C^2" donde C^2 = {(x, y) ⎢ x, y є C} definido sobre el campo de los números reales, y la "Transformación Lineal" T: C^2 → C^2 definida por: T(a + bi, c + di) = (a+ di, c + bi) para todo a, b, c, d є R. Entonces la "Matriz Asociada" a la "Transformación T referida a la "Base" B = {(2, 0), (1 – i, 0), (i, -2), (1, 2i +4)} es:

4. Para la "Transformación Lineal" T: P → P donde P = {ax^2 +bx + c ⎢a, b, c є R} y definida por: T (f) = f´ + f para todo f є P. Entonces la "Transformación Inversa de T" es:

5. Sea (S, ◘, ◙) un anillo, donde S = {(a, b) ⎢ a, b є Q} y (a, b) ◘ (c, d) = (a + c, b + d) para todo (a, b), (c, d) є S; así como (a, b) ◙ (c, d) = (ac, bd). Y sea (E, +, ▪) otro anillo donde E = {a + b√2 ⎢ a, b є Q}, donde (+) y (▪) son

la adición y la multiplicación comunes para números reales, respectivamente. Entonces la función biyectiva f: S → E definida por f (a, b) = b + a√2 para todo (a, b) є S es un isomorfismo sí o no:

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

Para cada uno de los siguientes casos seleccionar la solución correspondiente de acuerdo a lo que se pide en cada uno:

1) Considérese la "Transformación Lineal" T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por T(x, y, z) = {x+2y, 3x-z}. Entonces el valor de la "Matriz A" tal que el producto de esta por cualquier "vector" del dominio proporcione la imagen de dicho "Vector" bajo la "Transformación Lineal" {Av =T(v)} es:

❍ a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2) Sea la “Transformación Lineal” S: $R^3 \rightarrow R^3$ la cual está definida por: S(x, y, z) = {3x+y, 6x-z, 2y+z} y considerando las imágenes de la Base Canónica. Entonces el valor de la “Matriz Asociada” M(S) correspondiente es:

❍ a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

3) Sea el “Espacio Vectorial” V = {ax^2 + bx + c | a, b, c ϵ R} de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor que tres y el “Espacio Vectorial” definido por:

$$W = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \textbf{donde a, b, c } \in \textbf{ R}$$

Entonces la “Transformación Lineal” T: V → W; está definida por:

❍ a) $\begin{bmatrix} 2a + c & 3b \\ 4b & 2a + 2c \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} a + c & 3b \\ 4b & 2a + 2c \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} a + c & 4b \\ 4b & 2a + 2c \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} a + c & 4b \\ 3b & 2a + 2c \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} a + c & 3b \\ 3b & 2a + 2c \end{bmatrix}$

4) De acuerdo a la "Transformación Lineal" T: V → W definida en el "Reactivo 3", si seleccionamos las siguientes "Bases" para V y W: A = {x^2, x, 1} y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la "Matriz Asociada" a T es:

❍ a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5) De acuerdo a la “Matriz Asociada de T” obtenida en el “Reactivo 4” si se requiere utilizarla para obtener la imagen del “Vector” V = $3x^2 - 2x + 4$; entonces esta es:

- a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$

MESOGRAFÍA

Bibliografía recomendada

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard; Hill, David R. (2006)	1	214-219; 224-247; 272-360; 294-317
	10	502-521
Poole, David ; “Algebra Lineal , Una introducción moderna”	6	470-480; 481-495

Bibliografía básica

1. Kolman Bernard David, Pearson, Algebra Lineal, Prentice Hall, Octava Edición, 648pp.
2. David Poole, Algebra Lineal: Una introducción moderna, Thomson, Primera Edición, 2004, 763pp.

Bibliografía complementaria

1. David C. Lay, *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.

2. Grossman, Stanley Y, *Algebra Lineal*, Mc Graw Hill, 1996, México, 643pp.

Sitios electrónicos

http://depa.fquim.unam.mx/~jesusht/cvvalineal.pdf

UNIDAD 4

PRODUCTO INTERNO

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá las diferentes aplicaciones del producto interno.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día, la solución de problemas utilizando las matemáticas se realiza cada vez con más frecuencia. Por lo tanto, el uso de los conceptos de Producto Interno y Ortogonalidad para la solución de problemas, comprende una herramienta más eficiente para la solución de problemas reales.

LO QUE SÉ

Define el término Ortogonalidad y compártelo con tus compañeros, no olvides citar las referencias a las que recurras.

TEMARIO DETALLADO

(10 horas)

4.1 Ortogonalidad

4.2 Aplicaciones del producto interno

4.1 Ortogonalidad

Empezamos por definir Ortogonalidad, la cual se refiere a vectores perpendiculares, y Ortonormalidad, que se refiere a vectores perpendiculares y que tengan norma o longitud igual a uno.

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

Es una metodología que utiliza gran parte de los conceptos vistos en los temas 1, 2 y 3 del Álgebra Lineal, que permite calcular una nueva base de vectores a partir de la cual es más fácil realizar cálculos sobre estos vectores.

Nos sirve para obtener un conjunto de vectores que sea una base S de una base espacio vectorial V, tal que S sea Ortonormal, es decir Ortogonal y con una norma igual a uno. Sea V un Espacio Vectorial con Producto Interno y sea $G=\{v_1,\ldots v_n\}$ un generador de V. El conjunto $G_0 = \{w_1 \ldots w_1\}$ donde:

$$w_1 = v_1$$

$$w_1 = v_1 - \sum_{k=1}^{i=1} \frac{(v_i \cdot w_k)}{(w_k \cdot w_k)} w_k, para\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

es un generador de V.

Observaciones

- Si G es una base de V, entonces Go es una base ortogonal de V.
- Para obtener una base Ortonormal a partir de una base Ortogonal $B=\{w_1,..w_r\}$, bastará con multiplicar cada uno de los vectores $(w_i \text{ con } i=1,n)$, e B por el escalar $\frac{1}{\|wi\|}$

Una base Ortonormal es un conjunto de vectores que forman una base, éstos son ortogonales con una norma igual a uno.

Ejemplo:

Obtengamos una base Ortonormal del espacio V generado por:

$v_1 = (1, 0, -1)$
$v_2 = (-2, 1, 1)$
$v_3 = (-1, 1, 0)$,

Primero obtendremos un generador ortogonal de dicho espacio, para ello hacemos:

$w_1 = v_1 = (1, 0, -1)$

$w_2 = v_2 - \frac{v_2.w_1}{w_1.w_1} w_1 = (-2, 1, 1) - \frac{-3}{2} (1, 0, -1) = (-2, 1, 1)$

$\frac{-3}{2}$ (-1, 0, 1)= (-2, 1, 1) – (-3/2, 0, 3/2)= (-2+3/2,1-0,1-3/2)= (-1/2, 1, -1/2)=-1/2(1, -2,1)

$w_3=v_3- \frac{v_3.w_1}{w_1.w_1} w_1 = (-1, 1, 0) - \frac{-1}{2} (1, 0, -1) = (-1, 1, 0)+1/2(1, 0, -1)=$

$w_1 = v_1 = (1, 0, -1)$

$w_1 = v_1 = (1, 0, -1)$

$w_2 = v_2 - \frac{v_2.w_1}{w_1.w_1} w_1 = (-2, 1, 1) - \frac{-3}{2} (1, 0, -1) = (-2, 1, 1)$

$\frac{-3}{2}$ (-1, 0, 1)= (-2, 1, 1) – (-3/2, 0, 3/2)= (-2+3/2,1-0,1-3/2)= (-1/2, 1, -1/2)=-

1/2(1, -2,1)

$w_3 = v_3 - \frac{v_3.w_1}{w_1.w_1} w_1 = (-1, 1, 0) - \frac{-1}{2} (1, 0, -1) = (-1, 1, 0)+1/2(1, 0, -1)=$

(-1, 1,0)+ (1/2, 0,-1/2)= (-1+1/2,1+0, 0-1/2)= (-1/2, 1, -1/2)

Por lo tanto:

Go = $\{(1, 0, -1), (\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}), (\frac{-1}{2}, 1, -\frac{1}{2})\}$

Es un generador “Ortogonal” de V y el conjunto

4.2 Aplicaciones del producto interno

Producto interno de dos vectores

Supóngase para R^3 el producto interno entre dos vectores

$$\mathbf{a}= \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}= \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

Es representado como a b y está dado por:

$$\mathbf{a.b=a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.}$$

Generalizando:

$$\mathbf{a}= \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ \vdots \\ an \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b}= \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bn \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a.b= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots. +a_nb_n}$$

El producto interno es llamado también producto punto o producto escalar. Se puede ver que el producto interno entre dos vectores siempre tendrá como resultado un escalar, es decir, un número.

El producto interno frecuentemente se efectúa entre un vector renglón y un vector columna.

Ejemplo:

c= (1, 2,4) $\qquad \mathbf{d}= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad$ **c.d= 1(1)+2(2)+4(1) = 1 + 4 + 4 = 9**

RESUMEN

Como se ha visto a lo largo del curso, los elementos fundamentales que constituyen un Espacio Vectorial son los siguientes:

a) Un conjunto de Vectores
b) Un conjunto de escalares
c) Dos operaciones que son la adición y la multiplicación por un escalar

Por consiguiente, la definición del Espacio Vectorial, así como sus distintos Teoremas que se refieren a distintas Propiedades Algebraicas que aluden de manera concisa al comportamiento de Vectores y Escalares con respecto a las operaciones de la Adición y la Multiplicación.

También deben considerarse los conceptos métricos que son: la Magnitud, la Distancia y el Ángulo, los cuales pueden ser medidos sin ningún problema. Además de las nociones de Independencia Lineal, la Base y la Dimensión.

Ahora, con respecto al tema principal de la Unidad 4, existen diversas formas de introducir en un Espacio Vectorial dichos conceptos mencionados en los párrafos anteriores. Una de ellas consiste en definirlos a partir de una operación conocida como Producto Interno

GLOSARIO

Ortogonalidad

Generalización de la noción geométrica de perpendicularidad.

Ortonormal

Vector con un conjunto ortogonal y la norma de cada uno de sus vectores es igual a 1

Producto interno

Operación definida sobre dos vectores de un espacio euclídeo cuyo resultado es un número o escalar.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Resuelve los siguientes ejercicios.

1) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores:
   i = (1, 2, 3) y j = (3, 3, 3).
2) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores:
   i = (1, 2, 1) y j = (1, 2, 3).
3) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores:
   i = (2, 0, 3) y j = (3, 1, 0).
4) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores:
   i = (2, 2, 2) y j = (3, 1, 2).
5) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores:
   i = (2, 0, 1) y j = (2, 1, 1).

ACTIVIDAD 2

Resuelve los siguientes ejercicios.

1) Comprueba si los siguientes vectores son ortogonales :

   a) u=(5,10) y v=(3,6)
   b) u=(1,3,4) y v=(4,3,-1)
   c) u=((1,1,-2) y v=(3,1,2)

2) Determine todos los valores del escalar k para que los dos vectores sean ortogonales.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} k+1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

3) Proyecte **u** sobre **v** siendo:

   a) u = (4, 2), v = (3, 0)
   b) u = (3, 2, 5) v = (4, 2, 0)

4) Encuentre la proyección de $\overline{V} = (1,2,3)$ sobre $\bar{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

5) Encuentre el ángulo que forman los vectores:

   a) u = (4, 8) y v =(2,-3)
   b) u =(1,3,2) y v =(2,4,-4)
   c) A = (3, 0, 1) y B = (6, 0, 0)

6) Dados los siguientes puntos $A = (2,1)$, $B = (6,2)$, $C = (3,5)$ que forman un triángulo, calcule:

a) Los ángulos internos del triángulo

b) La longitud de los lados

c) El área del triángulo, usando la proyección de vectores para encontrar la altura del triángulo.

7) Utilice el proceso de Gram-Schmith para transformar la base $S = \{(1,2),(-3,4)\}$ de R^2 en una base ortonormal.

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

1. ¿Qué significa producto interno?
2. ¿Con qué otro nombre se conoce al producto interno?
3. ¿En qué consiste el proceso de Grand Smith?
4. ¿Qué se obtiene en el proceso de Grand Smith?
5. Da un ejemplo de vectores ortogonales de dos dimensiones.
6. Da un ejemplo de vectores ortogonales de tres dimensiones.
7. Da un ejemplo de vectores ortonormales de dos dimensiones.
8. Explica con un ejemplo de vectores ortonormales de tres
9. Explica el concepto de ortogonalidad.
10. Define el concepto de ortonormalidad.

LO QUE APRENDÍ

Aplicando el "Proceso de Gram-Schmidt" determina si la "Base Ortonormal" obtenida en cada uno de los casos es o no es:

1. Sean los "Vectores" $v_1 = (1, 0, -1)$; $v_2 = (-2, 1, 1)$ y $v_3 = (-1, 1, 0)$. La "Base Ortonormal" es:
$B = \{ (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{6}, \sqrt{2/3}, -1/\sqrt{6}) \}$

2. Sean los "Vectores" $v_1 = (1, i, 0)$; $v_2 = (1, 2, 1 - i)$.
La "Base Ortonormal" es:
$B = \{ (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}, 1), ((1 + 2i)/18, (2 – i)/18, 0 \}$

3. Considérese la Base usual del "Espacio Euclidiano" de Dimensión en R^3:
$W = \{ e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)\}$
Entonces una Base Ortonormal es:
$W = \{ (e_1, e_2, e_3) \text{ de } R^3 \}$

4. El "Vector Unitario Ortonormal" a $v_1 = (1, 1, 2)$; $v_2 = (0, 1, 3)$ es:
$v = \{ 1/\sqrt{11}, -3/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11})$

5. Sean $T_1: R^2 \rightarrow R$ y $T_2: R^2 \rightarrow R$; definidas por $T_1(x, y) = x + 2y$ y $T_2(x, y) = 3x – y$.
Entonces $2T_1 - 5T_2$ es igual a:
$2T_1 – 5T_2 = -13x + 9y$

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas.

1. Encuentra el valor de “m” de tal forma que los vectores a=(3,1,2) y b=(-2,m,1) sean ortogonales.

- a). 2
- b). 5
- c). 4
- d). 6
- e). 7

2. Dos vectores a y b son ortogonales si y solo si

- a) si
- b) no

3. Encuentra el producto interno a · b de los siguientes vectores: a = (2, 1, 1) y b = (3, -1, -2).

- a) 3
- b) 5
- c) 4
- d) 6
- e) 3

4. Encuentra el producto interno a · c de los siguientes vectores: a = (2, 1, 1) y c = (-1, 4, 5).

- a) 8
- b) 9
- c) 11
- d) 7
- e) 12

5. Encuentra el producto interno 3a · 2c de los siguientes vectores: a = (2, 1, 1) y c = (-1, 4, 5)

- a) -42
- b) -43
- c) -41
- d) -40
- e) 42

MESOGRAFÍA

Bibliografía recomendada

Autor	Capítulo	Páginas
Poole, David	1	16-29
Lay, David	5	375-383

Bibliografía básica

1. Kolman Bernard David, Pearson, Algebra Lineal, Prentice Hall, Octava Edicion, 648pp.

2. David Poole, Algebra Lineal: Una introducción moderna, Thomson, Primera Edicion, 2004, 763pp.

Bibliografía complementaria

1. David C. Lay, *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.

2. Grossman, Stanley Y, *Algebra Lineal*, Mc Graw Hill, 1996, México, 643pp.

Sitios electrónicos

http://depa.fquim.unam.mx/~jesusht/cvvalineal.pdf

UNIDAD 5

MATRICES

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno identificara las propiedades de una matriz y realizara operaciones con matrices

INTRODUCCIÓN

Las matrices, aunque parezcan al principio objetos extraños, son una herramienta muy importante para expresar y discutir problemas que surgen en la vida real. En los negocios a menudo es necesario calcular y combinar ciertos costos y cantidades de productos. Las tablas son una forma de representar estos datos. Sin embargo, agrupar los datos en un rectángulo nos muestra una representación más clara y fácil de los datos. Tal representación de los datos se denomina matriz.

Otras aplicaciones de las matrices directamente relacionadas con el área informática es en el uso del internet, por ejemplo los motores de búsqueda para localización y recuperación de información en internet, utilizan matrices para seguir el rastro de las ubicaciones en donde esta se encuentra, el tipo de información que se haya en cada ubicación, las palabras clave que aparecen en ellas, e incluso la manera en que los sitios web se vinculan entre si con otros, utilizan matrices. En gran medida, la eficacia de Google, estriba en la manera en que utiliza las matrices para determinar cuales sitios están referenciados en otros sitios. Esto es, en lugar de mantener de manera directa el rastro del contenido de la información de una pagina Web real o de un tema de búsqueda individual, la estructura de la matriz de Google determina las paginas Web que coinciden con el tema de búsqueda, y luego presenta una lista de tales paginas en un orden de importancia Kolman, (2006) pag. 13. La teoría de matrices es ampliamente utilizada en la informática. Las bibliotecas gráficas como por ejemplo OpenGL se valen de transformaciones espaciales y de las matrices para representar gráficos 3D a 2D que luego se traducen a imagen en los monitores.

Las transformaciones en las que intervienen las matrices. Comenzaron éstas su aplicación en 1850 y se han aplicado a multitud de campos: álgebra, geometría, cálculo, informática, física, etc. Recientemente han alcanzado un desarrollo sorprendente en aplicaciones de animación: en definitiva, transformación de figuras en espacios de dos y tres dimensiones.

Teoría de gráficas

La teoría de gráficas es una área relativamente nueva de las matemáticas, que se utiliza ampliamente para formular modelos de muchos problemas informáticos, en los negocios, las ciencias sociales y las ciencias físicas, en estas gráficas se involucra el concepto de grafo, que es una red de nodos y líneas, los cuales son representados por una matriz de adyacencia. Lay,David.(2004) Pag. 158

Son muchas las circunstancias, que se puedan describir usando matrices: suma de matrices, multiplicación escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices. También podemos aplicar estos cálculos dentro de esta área matemática del algebra lineal en temas como sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales, transformaciones lineales, etc.

LO QUE SÉ

Anota lo que sabes sobre las “Determinantes”, así como algunas aplicaciones básicas como antecedentes básicos para el conocimiento de las “Matrices”

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

5.1 Operaciones con Matrices

5.2 Inversa y traspuesta de una matriz cuadrada

5.1 Operaciones con matrices

Una matriz es un conjunto de renglones o columnas ordenadas de mxn, donde m es el número de renglones y n el número de columnas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Un arreglo horizontal es [a_{11} a_{12}..... a_{1n}] y un arreglo vertical es

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Dentro de las primeras operaciones tenemos las elementales, las cuales se llevan a cabo sobre los renglones o columnas de una matriz.

Las operaciones que se pueden ejecutar son las siguientes:

1. Suma y resta
2. Multiplicación por escalar
3. Multiplicación de matrices
4. Producto Cartesiano

1. Suma y Resta

Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

La suma estará representada por

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Y la sustracción se lleva a cabo restando a cada uno de los elementos de
la matriz

A, cada uno de los elementos de la matriz B de su misma posición, de ambas matrices, y colocando el resultado en la matriz resultante y en la misma posición de los elementos restados.

Sean A y B las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

La resta se realiza de la siguiente manera

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo calcular la resta de las matrices A y B siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{Y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-1 & 3-3 \\ 4-1 & 5-2 & 6-6 \\ 7-7 & 8-8 & 9-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicación por escalar

Y La resta es igual a la Multiplicación por un escalar. Supóngase que se tiene una matriz A y un escalar k constante, entonces, la multiplicación de una matriz por un escalar se representa con kA. La multiplicación se lleva a cabo multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el escalar y el resultado se pone en la misma posición de la matriz resultante.

Sean A una matriz y k un escalar, entonces el producto escalar de la matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y k el escalar

La multiplicación por un escalar se realiza de la siguiente manera:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo sea la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el escalar 4.

$$4A = \begin{bmatrix} 4(1) & 4(1) & 4(1) \\ 4(3) & 4(1) & 4(2) \\ 4(1) & 4(1) & 4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 12 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Multiplicación de Matrices

Supóngase que se tienen dos matrices A y B. Para poder realizar la multiplicación de estas dos matrices primero se debe comprobar que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de renglones de la matriz B.

Suponiendo que se tiene una matriz A con n renglones y m columnas, entonces la matriz B deberá tener m renglones y el número de columnas puede variar digamos k, entonces la matriz resultante será una matriz con n renglones y k columnas Poole, David. (2004) Pag.137-139.

Sean A una matriz de n x m y B una matriz de m x k

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de A por B se realiza de la siguiente manera:

$$AxB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}) + a_{12}(b_{21}) + \cdots + a_{1m}(b_{m1}) & \ldots a_{11}(b_{1k}) + a_{12}(b_{2k}) + \cdots + a_{1m}(b_{mk}) \\ a_{21}(b_{11}) + a_{22}(b_{21}) + \cdots + a_{2m}(b_{m1}) & \ldots a_{21}(b_{1k}) + a_{22}(b_{2k}) + \cdots + a_{2m}(b_{mk}) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}(b_{11}) + a_{n2}(b_{21}) + \cdots + a_{nm}(b_{m1}) & \ldots a_{n1}(b_{1k}) + a_{n2}(b_{2k}) + \cdots + a_{nm}(b_{mk}) \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo de la multiplicación de las matrices A y B que se muestran a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La multiplicación se realiza de la siguiente manera:

$$AxB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2)+1(2)+1(0) & 1(1)+1(1)+1(1) & 1(2)+1(2)+1(1) \\ 3(2)+1(2)+2(0) & 3(1)+1(1)+2(1) & 3(2)+1(2)+2(1) \\ 1(2)+1(2)+1(0) & 1(1)+1(1)+1(1) & 1(2)+1(2)+1(1) \end{bmatrix}$$

$$AxB = \begin{bmatrix} 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1 \\ 6+2+0 & 3+1+2 & 6+2+2 \\ 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 10 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Producto Cartesiano

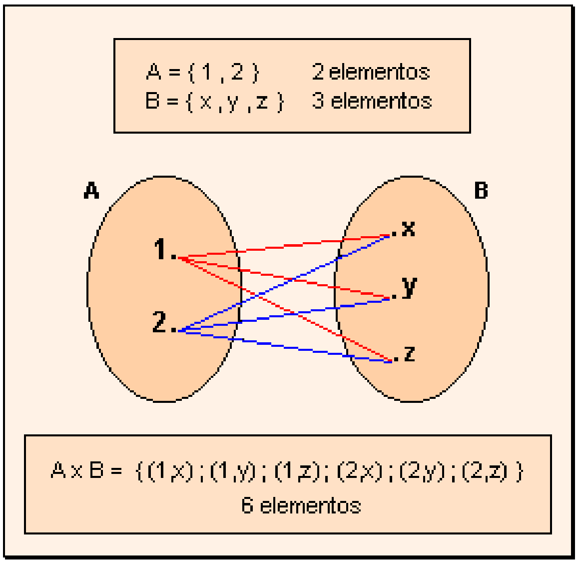
El producto cartesiano de dos conjuntos A x B es el conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar con un elemento perteneciente al conjunto A y un elemento del conjunto B.

A tiene **m** elementos
B tiene **n** elementos $\Rightarrow$ **A x B** tiene **m x n** elementos

Los elementos de A x B son pares ordenados. Cada par que se forma con un elemento del conjunto A y uno del conjunto B, en ese orden y recibe el nombre de par ordenado. Sus elementos se colocan entre paréntesis, separados por coma.

$$(x, y) \neq (y, x)$$

Ejemplo n° 1:



Ejemplo n° 2:

Si A = {1, 2} y B = {-1, 0, 1} entonces A x B = {(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)}. A tiene 2 elementos, B tiene 3, y A x B tiene 2 x 3 = 6

Ejemplo 3:

Para los conjuntos A = {2, 5, 9} y B = {p, q}, el producto Cartesiano de estos dos conjuntos contendrá los siguientes elementos:

A x B = {(2, p), (2, q), (5, p), (5, q), (9, p), (9, q)}

Es muy importante darse cuenta de que, en general, el producto Cartesiano no es conmutativo. Algunas veces lo es, pero otras no. En el ejemplo mostrado, el producto Cartesiano B X A de los dos conjuntos citados será:

B x A = {(p, 2), (p, 5), (p, 9), (q, 2), (q, 5), (q, 9)}

Esta definición de producto Cartesiano se puede extender fácilmente al producto Cartesiano de más de dos conjuntos, tales como los productos Cartesianos A x B x C y R x I x Q

5.2 Inversa y traspuesta de una matriz cuadrada

La matriz inversa es de suma importancia en el Álgebra Lineal y su aplicación en el área administrativa.

El cálculo de la inversa se hará utilizando el método de Gauss-Jordan.

Este método requiere de los siguientes procesos para su obtención:

- Encontrar en el extremo izquierdo de la matriz, la columna que no esté integrada de únicamente ceros.
- De ser necesario, se intercambiará el renglón superior con otro cualquiera, con el propósito de que el elemento localizado cumpla con la condición del paso anterior.
- Si el elemento diferente de cero, encontrado en el proceso 1, es un valor cualquiera a, entonces se deberá multiplicar todo ese renglón por 1/a a efecto de que el primer elemento tome un valor de uno.
- A continuación se suma o resta, múltiplos apropiados del primer renglón a los demás renglones de tal manera que la columna encontrada en el proceso 1, todos los elementos por abajo del primer uno tengan un valor de cero.
- Descartar por el momento al primer renglón, y volver a aplicar el proceso inicial a la submatriz obtenida, iniciando con el proceso 1, hasta obtener una matriz unitaria.

- Empezando por el último renglón, se avanza hacia arriba, sumando múltiplos apropiados de cada renglón a los renglones que están arriba de ella, de tal manera que se cumpla la condición estipulada en el proceso 4, hasta obtener la forma reducida escalonada [2]

Ejemplo de la obtención de la inversa de una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inicio del cálculo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como el valor del renglón uno columna uno es 1, se cumple con esa parte.

- El siguiente paso sería hacer cero el tres del segundo renglón y el uno del 3er renglón, ambos de la primera columna.

- Para hacer cero el tres, multiplicamos por -2 el primer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al segundo renglón de la misma matriz

- Para hacer cero el uno, multiplicamos por -1 el primer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al tercer renglón de la misma matriz

[2] Véase, O. Pineda, (1998), *Álgebra Lineal: Un Enfoque Económico y Administrativo*, México, IPN

- Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Quedando así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón dos y columna dos es -1 y debe ser 1 se multiplica por -1.

Quedando como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como el valor del renglón dos y columna dos es uno, enseguida hay que hacer el uno del renglón uno y columna dos y -1 del renglón tres y columna dos.

- El siguiente paso sería hacer cero el uno del primer renglón de la columna dos, para ello al renglón uno se le resta el renglón dos de la matriz anterior.

- Para hacer cero el -1 del renglón tres y columna dos, sumamos renglón uno y el tres de la matriz anterior.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón tres columna tres es dos, hay que hacerlo primero uno, para ello multiplicamos ese renglón por 1 ó 2.
Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Quedando así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- Como el valor del renglón tres de la columna tres es uno, se cumple con esa parte.

- El siguiente paso sería hacer cero el uno negativo del renglón uno y columna tres y el dos del renglón dos y columna tres de la matriz derecha anterior.

- Para hacer cero el -1, al renglón uno le restamos el renglón tres de la matriz anterior.

- Para hacer cero el dos, multiplicamos por -2 el tercer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al primer renglón de la misma matriz.

- Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Dónde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 & .5 & .5 \\ 1 & 0 & -1 \\ .5 & -.5 & .5 \end{bmatrix}$$

Donde la matriz inversa es:

$$\begin{bmatrix} -1.5 & .5 & .5 \\ 1 & 0 & -1 \\ .5 & -.5 & .5 \end{bmatrix}$$

Matriz Transpuesta

La matriz transpuesta está dada por una matriz en la cual se intercambian los renglones por columnas, dando como resultado la matriz transpuesta.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Su transpuesta es:

$$A^t \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Obtención de la matriz transpuesta de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La transpuesta es:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

RESUMEN

En este tema se trataron los conceptos fundamentales y las operaciones más importantes de aplicación directa, como son: suma de matrices, multiplicación escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices, producto cartesiano

GLOSARIO

Forma escalonada

Se dice que una matriz está en forma escalonada reducida por filas si satisface las propiedades siguientes: la primer entrada es diferente de cero, Todas las filas cero, si las hay aparecen como al final.

Para cada fila diferente de cero, el líder aparece a la derecha y debajo de cualquier 1 líder, en las filas que le preceden, si una columna tiene un líder las demás entradas de esa columna son cero.

Matriz

Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mn entradas acomodadas en m filas y n columnas.

Submatriz

Una matriz obtenida a partir de una matriz A eliminando filas y columnas.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Resuelve los siguientes ejercicios.

1) Realiza las operaciones indicadas, refiérase a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

a) A+B=

b) C+D=

ACTIVIDAD 2

1) Resuelve los siguientes ejercicios.

Sean las Matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2) Determina A + B.

3) Determina 3A – 4B.

4) Determina AC

5) Obtén el 3AD

6) Determina BD

ACTIVIDAD 3

1) Resuelve los siguientes ejercicios:

Sean las Matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2- & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para cada uno de las siguientes Matrices Cuadradas determina su Inversa:

2) Determina A^{-1}.

3) Determina B^{-1}.

4) Determina C^{-1}.

5) Determina D^{-1}.

6) Determina E^{-1}.

ACTIVIDAD 4

1) Resuelve los siguientes ejercicios: Indica si las siguientes aseveraciones son verdaderas (V) o falsas (F).

Sean las Matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2- & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

- a. Verdadero
- b. Falso

b) $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

- a. Verdadero
- b. Falso

c) $C^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

a. Verdadero

b. Falso

d) $D^T = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

a. Verdadero

b. Falso

e) La Matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ es la Transpuesta de E.

a. Verdadero

b. Falso

ACTIVIDAD 5

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Sistemas de Ecuaciones Lineales Compatibles Indeterminados, por el Método de Gauss-Jordan.

1. $3x_1 + 3x_2 – x_3 + x_4 + 4x_5 = 4$
   $x_1 + x_2 + x_3 – 2x_4 – x_5 = 1$
   $-2x_1 – 2x_2 +3x_3 – 3x_4 – 5x_5 = -3$
   Si $x_2 = a = 3$; $x_4 = b = 4$, $x_5 = c = -1$

2. $x_1 + 2x_2 – 3x_3 + 2x_4 = -1$
   $-x_1 - 2x_2 + 2x_3 – 5x_4 = 1$
   $2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -2$
   Si $x_2 = a = 1$; $x_3 = b = (1/3)$

3. $x_1 + 2x_2 – 3x_3 = 1$
   $-x_1 – 2x_2 + 2x_3 = 2$
   Si $x_2 = a = -2$

4. $-2x_1 - 2x_2 – 5x_3 = - 1$
   $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2$
   i $x_1 = a = (1/2)$

5. $2x - y - kz = 0$
   $x – y – 2z = 1$
   $-x + 2y – 0z = k$

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

1. ¿Qué es una matriz?
2. ¿Qué se entiende por entrada de una matriz?
3. ¿Qué indican los números *m* y *n*?
4. ¿Dónde se ubica la entrada *a58*?
5. ¿Qué característica tiene una matriz cuadrada?
6. ¿Cuáles son los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada?
7. ¿Cómo se realiza la suma de matrices?
8. Escribe una matriz cero de *3X2*.
9. ¿Qué es un escalar?
10. Define el producto de un escalar por una matriz.
11. ¿Qué significa que la suma de matrices sea conmutativa?
12. Si *A* es una matriz *rxt* y *B* es una matriz *txq*, entonces la matriz *C* que resulta del producto *AB*, ¿qué dimensión tiene?
13. ¿Es la multiplicación de matrices conmutativa? ¿Por qué?
14. ¿Qué condiciones debe cumplir una matriz para ser llamada matriz identidad?
15. ¿Qué es una matriz transpuesta?
16. Da un ejemplo de una matriz transpuesta de 4x4.
17. ¿Cómo se lleva a cabo la multiplicación de dos matrices?
18. ¿Cuáles son las características que deben tener las matrices a multiplicar?

19. ¿Cuántos renglones y columnas tiene el resultado de multiplicar dos matrices?

20. ¿Qué es la matriz inversa?

21. ¿A que es igual el producto de una matriz A por su inversa A^{-1}?

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas.

Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre la solución correspondiente a los siguientes “Operaciones entre Matrices” de acuerdo a lo que se pide:

1. Determine A+ B:

❍ a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ❍ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ❍ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ❍ e) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Determine A+ (B+C):

❍ a) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ ❍ b) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ ❍ c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ ❍ e) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

3. Determine A + 0:

❍ a) A^{-1} ❍ b) 0 ❍ c) –A ❍ d) $-A^{-1}$ ❍ e) A

Sean las “Matrices”:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Obtener el 4 X A:

❍ a) $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$ ❍ b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$ ❍ c) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$ ❍ e) $\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$

5. Determinar (1/2) A + 3B:

- a) $\begin{bmatrix} (19/2) & 11 \\ -23 & -2 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} (19/2) & 11 \\ 23 & -2 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} (19/2) & -11 \\ -23 & -2 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} (19/2) & -11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} (19/2) & 11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$

MESOGRAFÍA

Bibliografía recomendada

Autor	Capítulo	Páginas
Kolman, Bernard	1	12-46
Poole, David	3	131-178
Lay,David	2	105-134

Bibliografía básica

1. Kolman Bernard David, Pearson, Algebra Lineal, Prentice Hall, Octava Edicion, 648pp.

2. David Poole, Algebra Lineal: Una introducción moderna, Thomson, Primera Edicion, 2004, 763pp.

Bibliografía complementaria

1. David C. Lay, *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.
2. Grossman, Stanley Y, *Algebra Lineal*, Mc Graw Hill, 1996, México, 643pp.

Sitios electrónicos

http://www.promocion.org/que-es-y-como-funciona-google.htm
http:/www.google.com/technology/index.html
www.readwriteweb.es/tecnologias/como-funciona-google/
www.recursosmatematicos.com/descarga.htm
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html
Aplicaciones del producto cartesiano
http://matematicas-de-la-simetria.blogspot.com/2007/11/el-producto-de-dos-grupos.html

UNIDAD 6

DETERMINANTES

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá las propiedades y aplicaciones de las determinantes

INTRODUCCIÓN

La idea del Determinante proviene de mucho tiempo más atrás que la del concepto de Matriz. El Determinante fue descubierto por Kramer durante sus trabajos orientados a la resolución de problemas que se formulaban a través de los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

La Teoría de los Determinantes fue expuesta por primera vez en el año de 1750, es decir cien años antes de Sylvester y Cayley empezaran a hablar de las Matrices.

Hoy en día, el concepto del Determinante tiende a ser referido como la consecuencia de la Teoría de Matrices y, por consecuencia, es considerado como el Proceso de Axiomatización de las Matrices.

En esta unidad veremos lo que se refiere a la definición del Determinante, así como las propiedades que lo caracterizan e identifican como tal; posteriormente, veremos cómo se define y aplica la Regla de Kramer, y finalmente, cómo se definen y obtienen los Eingevalores y los Eingevectores, a fin de poder vincularlos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática.

Hoy en día la tecnología avanza rápidamente, por este motivo se requieren modelos más complejos para la solución de problemas, utilizando las matemáticas y en particular los Determinantes.

LO QUE SÉ

Investiga el concepto, propiedades básicas y las reglas más importantes referentes a los Determinantes, así como algunas aplicaciones básicas.

TEMARIO DETALLADO

(8 horas)

6.1 Definiciones y propiedades

6.2 Regla de Cramer

6.3 Eigenvalores, eigenvectores

6.1 Definiciones y propiedades

Un determinante es un número que se asigna de cierto modo a una formación cuadrada de números. Esta idea fue considerada en 1683 por el matemático Japones Seki Takakasu y de manera independiente, en 1693 por el matemático Aleman Gottfried Leibniz, unos 160 años antes de que se desarrollara una teoría de matrices por separado.

En la actualidad se han definido dos métodos importantes para obtener el determinante de un arreglo de números o matriz.

a) Regla de Sarrus
b) Método de cofactores

a) Regla de Sarrus

Sea A una matriz cuadrada, la determinante de una matriz cuadrada es un valor constante que se calcula con todos los elementos de la matriz.
Determinante de una matriz de 2x2

Sea la matriz A= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ entonces el determinante de A es:

$$|A| = ad - cb.$$

El cálculo se realiza haciendo una multiplicación cruzada de los elementos “ a” y “d” menos los elementos “c” y “b”.

Ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-2)(3) - 5(1) = -6 - 5 = -11$$

Determinante de una matriz de 3x3

Sea la matriz A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, entonces el determinante de A es:

1.-Escribir las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de la matriz A.

2.- Localizar los elementos de las tres diagonales primarias y las tres diagonales secundarias

3.- Multiplicar los elementos de la diagonal primaria (roja) y de cada diagonal secundaria (verde).

4.- El determinante resultante es igual a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos los productos de las tres diagonales secundarias ó restar la suma de los productos de las diagonales secundarias.

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{array} = \underbrace{a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}} + \underbrace{a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}} + \underbrace{a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}} - \underbrace{a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}} - \underbrace{a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}} - \underbrace{a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= ((1 \cdot 1 \cdot 5) + (1)(0) \cdot 3 + (2)(2)(-1)) - ((1 \cdot 2 \cdot 5)$$
$$+ (1)(0)(-1) + (2 \cdot 1 \cdot 3)) = (5 + 0 - 1) - (10 + 0 + 6)$$
$$= -15$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades de los determinantes nos auxilian en la manipulación de una matriz de números para encontrar el valor de su determinante, directamente o diagonal izando la matriz, este método es muy conveniente para determinantes muy grandes de más de 5x5.

En todos los casos sea A una matriz cuadrada

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES
I) Si todos los elementos de un renglón o columna de la matriz A son ceros, entonces $\lvert A \rvert$=0.
II) Cuando dos renglones o columnas de la matriz a son idénticos, entonces $\lvert A \rvert$=0.

III) Cuando la matriz A es triangular superior o inferior entonces $\|A\|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
IV) Si A es una matriz identidad, entonces su determinante es igual a uno.
v) Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos renglones o columnas, entonces: $\|A\| = -\|B\|$
VI) Si la matriz B se obtiene de la matriz A al multiplicar por un renglón o columna por un escalar "k" entonces: $\|B\| = k\|A\|$
VII) El determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de su determinante, o sea $\|AB\| = \|A\|\|B\|$.
VIII) Si A es una matriz nxn, entonces det A^T = det A.
IX) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ Adj A
X) Si A es invertible entonces $\|A^{-1}\| = \dfrac{1}{\|A\|}$

Ver la siguiente dirección electrónica
http://www.vadenumeros.es/segundo/propiedades-de-los-determinantes.htm

Ejemplo:

Matriz nula

El determinante de una matriz nula es cero. $\det(O) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Matriz unidad o identidad

El determinante de la matriz unidad es uno. $\det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Matriz diagonal

El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

Matriz triangular

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Desarrollo de un determinante

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea o columna cualquiera por sus adjuntos respectivos. Simbólicamente, el determinante calculado por columnas: Lay, David. (2004) p.187-190

$$det\,(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Y, si no lo queremos hacer por columnas, dicho determinante calculado por filas:

$$det\,(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

Ejemplo: Obtén el determinante de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Utilizando el renglón 1

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

Se recomienda que hagas el cálculo con el método de Sarrus para comprobar el resultado.

MATRIZ ADJUNTA

La matriz adjunta obtenida por determinantes se aplica para obtener la matriz inversa de una matriz A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{Adj}A^{t}$$

Los menores complementarios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Son

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6 \qquad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \qquad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Matriz adjunta

Para una matriz cuadrada de orden $n, A = (a_{ij}),$ se llama adjunto del elemento $a_{ij},$ y lo representamos por $A_{ij},$ al producto $(-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$, es decir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de una matriz cuadrada A se llama matriz adjunta de A y se denota por $Adj\,(A)$

Ejemplo

Los adjuntos de la matriz A del ejemplo anterior son:

$$\begin{array}{rcr} A_{11} & = & -3 \\ A_{21} & = & 6 \\ A_{31} & = & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} A_{12} & = & 6 \\ A_{22} & = & -12 \\ A_{32} & = & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} A_{13} & = & -3 \\ A_{23} & = & 6 \\ A_{33} & = & -3 \end{array}$$

La matriz adjunta de A es

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

6.2 Regla de Cramer

La Regla de Cramer es un proceso que nos permite calcular la solución de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas. AX=B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

La Regla de Cramer consiste en encontrar las soluciones para cada una de las variables:

- Las Determinantes se calculan con la regla de Sarrus, vista en el punto 5.1

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Primero calculamos la Determinante del sistema.

Regla de Cramer

La regla de Cramer da una solución para sistemas compatibles determinados en términos de determinantes y adjuntos dada por: Lay,David.(2004) p.201; Kolman, (2006) p. 205

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(\mathbf{A})}$$

Donde A_j es la matriz resultante de remplazar la j-ésima columna de A por el vector columna b. Para un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Nota: Cuando en la determinante original det(A) el resultado es 0, el sistema indica múltiples o sin coincidencia.

- Las Determinantes se calculan con la regla de Sarrus, vista en el punto 5,1

Ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones por Cramer

Veremos a continuación algunos ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Cramer. Comenzaremos con los de 2 incógnitas para pasar enseguida a los de 3 incógnitas. Lay, David (2004); p. 202

Sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

En el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que vamos a resolver, procedemos primero a marcar en rojo la columna de los términos independientes para no perderla de vista en ningún momento:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Obviamente la matriz de coeficientes es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos x e y usando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 6 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1$$

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - y + 2z = 10 \\ 3x + y - z = 25 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Y usando la Regla de Cramer obtenemos los valores de las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 2 \\ 25 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 8 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 4 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = 3$$

6.3 Eigenvalores, eigenvectores

Eingevalores

Los eingevalores son valores que se restan a la diagonal de una matriz para que su valor sea igual a cero.

Si tenemos una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces, su determinante será:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Para obtener los eingevalores $k_1, k_2, \ldots, k_n$ hacemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - k_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k_1 \end{bmatrix} = 0$$

Donde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son los eingevalores.

Ejemplo:

Calcular los eingevalores de la siguiente matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} = 0$$

Y la determinante nos da

$=(1-k)(2-k)-1=0$

$=1-2k+k_2-1=-2k+k_2=k(k-2)=0$

De aquí obtenemos dos eingevalores: cero y dos

Eingevectores

Un eingevector es un vector asociado a una matriz, el cual se obtiene con la ayuda de los eingevalores. Es decir que para su cálculo, primero hay que considerar los eingevalores de la matriz. Poole,(2004) David, pp.247-249

Para la obtención de los eingevectores se tienen que encontrar los valores para el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

De tal manera que se dé la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Donde $[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ son valores constantes cualesquiera.

Ejemplo:

Calcular los eingevectores de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primero obtenemos los eingevalores

Y la determinante nos da.

=(1-k)(2-k)-1=0

$=1-2k+k2-1=-2k+k_2=k(k-2)=0$

De aquí obtenemos dos eingevalores: cero y dos.

Para obtener los eingevectores.

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para k=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + & a_2 \\ a_1 + & 2a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Esto implica que $a_1 + a_2 = a_1$ implica que $a_2 = a_1 - a_1 = 0$, o sea, $a_2 = 0$

- Sustituyendo en $a_1 + 2a_2 = a_2$ nos da $a_1 + 2(0) = 0$ y, por lo tanto, $a_1 = 0$
- Y tenemos un vector (0,0) o solución trivial.

Tenemos que para k=2

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 + & a_2 \\ & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

- Esto implica que $-a_1 + a_2 = a_1$, implica que $a_2 = a_1 + a_1 = 2a_1$ o sea $a_2 = 2a_1$
- Sustituyendo en $a_1 = a_2$
- Para que ambas se cumplan $a_2 = 2a_1$ y $a_1 = a_2$ la solución debe ser la trivial
- Por lo tanto, la única solución que tiene es la trivial: el eigenvector (0,0).

RESUMEN

De acuerdo a la pregunta que se te formuló al principio de ésta unidad; se presupone que tu respuesta con respecto a que sabes de los “Determinantes”; seguramente habrás contestado que si has tenido contacto con ellos; específicamente con los de segundo y tercer orden.

La idea del “Determinante” proviene de mucho tiempo más atrás que la del concepto de “Matriz”. El “Determinante” fue descubierto por Cramer durante sus trabajos orientados a la resolución de problemas que se formulaban a través de los “Sistemas de Ecuaciones Lineales”.

La “Teoría de los Determinantes” fue expuesta por primera vez en el año de 1750; es decir cien años antes de que Sylvester y Cayley empezaran a hablar de las “Matrices”.

Hoy en día en concepto del “Determinante” tiende a ser referido como la consecuencia de la “Teoría de Matrices” y por consecuencia es considerado como el “Proceso de Axiomatización de las “Matrices”.
En esta unidad vimos lo que se refiere a la definición del “Determinante”; así como sus propiedades que lo caracterizan e identifican como tal; también abordamos cómo se define y aplica la “Regla de Kramer” y finalmente como se definen y obtienen los “Eingevalores y los Eingevectores” a fin de poder vincularlos en el campo profesional de la “Licenciatura en Informática”.

GLOSARIO

Determinante

Es una matriz A de nxn, el determinante de A denotado mediante de (A) es un escalar que se calcula como la suma de todos los posibles productos de n entradas de A. cada uno con un signo apropiado , con exactamente una entrada de cada fila y exactamente una entrada de cada columna.

Matriz

Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mn entradas acomodadas en m filas y n columnas.

Submatriz

Una matriz obtenida a partir de una matriz A eliminado filas y columnas.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Determina A por la Regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 14 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

2. Determina │A│ si…

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Por la Regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

ACTIVIDAD 2

Resuelve los siguientes ejercicios.

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Determinantes por la Regla de Sarrus.

1. Sea A:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$

2. Sea B:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a \\ 2a & 6 \end{vmatrix}$$

3. Sea C: $\begin{vmatrix} a^2 & a^2 \\ 2a & 6 \end{vmatrix}$

ACTIVIDAD 3

Resuelve los siguientes ejercicios.

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Sistemas de Ecuaciones Lineales Compatibles Determinados, aplicando la Regla de Kramer

1. 2x+y-3z =12
   5x-4y+7z=27
   10x+3y–z =40

2. x + y + z = 4
   2x - 3y + 5z = -5
   3x + 4y + 7z = 10

3. x + 4y - z = 6
   2x + 5y - 7z = -9
   3x – 2y + z = 2

ACTIVIDAD 4

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Determinantes por el Método de cálculo que se te pide:

1. Por la Cofactores

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Por Cofactores o Condensación.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

3. Por Cofactores.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

1. ¿Qué significado tiene la palabra ‘determinante?
2. ¿Cuáles son las propiedades de una determinante?
3. Desarrolla un ejemplo de una determinante igual a cero.
4. Desarrolla un ejemplo de una determinante mayor a cero.
5. Desarrolla un ejemplo de una determinante menor a cero.
6. Explica cómo se lleva el cálculo de una determinante por el método de Sarrus.
7. Da un ejemplo de una eingevalor a partir de una matriz de 2x2.
8. Da un ejemplo de una eingevalor a partir de una matriz de 3x3.
9. Da un ejemplo de una eingevector a partir de una matriz de 2x2.
10. Da un ejemplo de una eingevector a partir de una matriz de 3x3.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas.

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes “Determinantes” de cada “Matriz”.

1. Sea A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

❍ a) -2 ❍ b) 3 ❍ c) -3 ❍ d) 4 ❍ e) 3

2. Sea B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

❍ a) -4 ❍ b) -3 ❍ c) -2 ❍ d) 1 ❍ e) 3

3. Dada la “Matriz A”; cuyo “determinante” es igual a 12, entonces el valor de k es:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix}$$

❍ a) -12 ❍ b) 13 ❍ c) 12 ❍ d) 11 ❍ e) -10

4. El “Determinante” de D es:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

❍ a) -11 ❍ b) -10 ❍ c) -12 ❍ d) -9 ❍ e) -13

5. El “Determinante” de E es:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

❍ a) -5 ❍ b) 6 ❍ c) -7 ❍ d) 4 ❍ e) -4

II. Relaciona las columnas anotando en el paréntesis la letra que corresponda correctamente.

1. Método que se aplica solamente a "Determinantes" de Segundo y Tercer Orden. ( )

2. El factor que multiplica al elemento en el desarrollo del "Determinante" por el "Método de Cofactores" se denomina: ( )

3. Para calcular el valor de un "Determinante" empleando el método de Sarrus cuando se efectúa el producto de los elementos de la diagonal principal y a este se resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria, entonces se dice que el "Determinante" es de: ( )

4. El método que en los "Determinantes" se utiliza para resolver los "Sistemas de Ecuaciones Lineales" se llama: ( )

5. Son valores que se restan a la diagonal de una matriz, para que su valor sea igual a cero. ( )

6. Para calcular el valor de un "Determinante empleando el método de Sarrus en donde se efectúa el producto de los elementos de la diagonal principal y de las dos diagonales paralelas a ella; a la suma de dichos productos se restan los productos de los elementos de la diagonal secundaria y de las dos paralelas a ella, entonces se dice que el "Determinante" es de: ( )

7. Los diferentes arreglos que se pueden hacer de un conjunto finito de elementos se llaman: ( )

8. Son vectores asociados a matrices los cuales se obtienen con la ayuda de los "Eigenvalores". ( )

a) Eingevalores
b) Segundo Orden
c) Tercer Orden
d) Permutaciones
e) Sarrus
f) Eingevectores
g) Cofactor
h) Cramer

MESOGRAFÍA

Bibliografía recomendada

Autor	Capítulo	Páginas
Poole,David	4	256-267
Kolman,Bernard	3	182-189

Bibliografía básica

1. Kolman Bernard David, Pearson, Algebra Lineal, Prentice Hall, Octava Edicion, 648pp.

2. David Poole, Algebra Lineal: Una introducción moderna, Thomson, Primera Edicion, 2004, 763pp.

Bibliografía complementaria

1. David C. Lay, *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.

2. Grossman, Stanley Y, *Algebra Lineal*, Mc Graw Hill, 1996, México, 643pp.

Sitios electrónicos

www.recursosmatematicos.com/descarga.htm

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

http://www.vadenúmeros.es/segundo/propiedades-de-los-determinantes.htm

UNIDAD 7

PRÁCTICAS EN LABORATORIO

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno resolverá problemas de algebra lineal utilizando software

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de este tema se muestran todos los conocimientos adquiridos durante el semestre y algunos otros de otras materias que, en su conjunto, hacen que seas capaz de resolver problemas, combinándolos con el uso de la computadora.

De acuerdo a la pregunta que se te formuló al principio de ésta unidad; se presupone que tu respuesta con respecto a que sabes de software; seguramente habrás contestado que si has tenido contacto con ellos; específicamente con el Excel.

La idea del Software Para La Resolución De Problemas Matemáticos Diversos proviene del Siglo XX en donde el hombre se preocupó por entender y comprender el desarrollo tecnológico con que este iba evolucionando de una forma acelerada hasta nuestros días.

La Resolución de Problemas Matemáticos Por Medio Del Uso De Software se ha hecho más presente hoy en día (2009) ante el constante cambio que el hombre ha tenido en su relación con el medio en el cual se desenvuelve dentro de este Planeta llamado Tierra en donde su desarrollo comprende muchas áreas que el mismo ha descrito y definido con el fin de tener un mejor bienestar y seguir sobreviviendo.

En esta unidad veremos lo que se refiere a las Aplicaciones a través de software (Excel) de los diversos Temas vistos a los largo de las Unidades anteriores; a fin de poder dar solución de una manera más rápida a todo tipo de Problemas Diversos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática y su relación con las áreas Contables-Administrativas.

LO QUE SÉ

Dentro de tu formación académica en el área de la Informática ¿te enseñaron el manejo, aplicación y programación de distintos tipos de Software enfocados a las áreas económicas administrativas?

TEMARIO DETALLADO

(12 horas)

7.1 Caso práctico Sistema de Ecuaciones Lineales

7.2 Caso práctico de Vectores

7.3 Caso práctico de Transformaciones lineales

7.4 Caso práctico de Producto Interno

7.5 Caso práctico de Matices

7.6 Caso práctico de Determinantes

7.1 Caso Práctico: Sistema de Ecuaciones Lineales

Supóngase que el importe de una compra de cuatro refrescos chicos y cinco refrescos grandes es por $94.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y uno refresco grande y el importe de esta compre es por $26.00. ¿Cuál es el precio del refresco chico y grande?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1

Escribamos en un renglón y celdas diferentes los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		4	5	94	
3					

Paso 2

En un segundo renglón los valores de la segunda compra de la misma manera que el primer renglón, es decir los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de la segunda compra.

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	26	
5					

Paso 3

Transformamos el primer renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la segunda compra.

	A	B	C
5			
6			
7		=B4*B2	
8			

	A	B	C	D
5				
6			=B4*C2	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=B4*D2	
7					

Resultando:

	A	B	C	D	E
5					
6		8	10	188	
7					

Paso 4

Transformamos el segundo renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la primera compra.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

	A	B	C	D	E
7					
8				=B2*D4	
9					

Resultando

	A	B	C	D	E
7					
8		8	4	104	
9					

Paso 5

De los dos renglones resultantes de los pasos 3 y 4, al renglón obtenido en el paso 3 se le resta el renglón obtenido en el paso 4. Aquí da como resultado en la celda correspondiente a los refrescos chicos el valor de cero y en las otras celdas no necesariamente un valor igual a cero.

	A	B	C
9			
10		=B6-B8	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=C6-C8	
11				

	A	B	C	D	E
9					
10				=D6-D8	
11					

Resultando:

	A	B	C	D	E
9					
10		-	6	84	
11					

Paso 6

Del resultado obtenido en la diferencia del importe de las compras (obtenido en el paso 5), este se divide entre valor obtenido correspondiente a los refrescos grandes, este cociente representa el precio del refresco grande.

	A	B	C
11			
12		=D10/C10	
13			

Resultando:

	A	B	C
11			
12		14	
13			

Paso 7

Para obtener el precio del refresco chico se multiplicara la celda que contiene el precio del refresco grande (celda paso 6) por el número de refrescos comprados en la primera compra (celda del paso 1), el producto anterior se le resta al importe de la primera compra (celda paso 1) y la resultante de esta diferencia se divide entre el número de refrescos chicos comprados en la primera compre (celda paso 1).

	A	B	C
13			
14		=B12*C2	
15			

Resultando:

	A	B	C
13			
14		70	
15			

A la compra total se le resta el valor anterior

	A	B	C
15			
16		=D2-B14	
17			

Lo dividimos entre el número de refrescos chicos comprados la primera vez

Resultando:

	A	B	C
17			
18		6	
19			

Finalmente los valores obtenidos en los pasos seis y siete son el resultado buscado en el ejemplo mostrado

7.2 Caso práctico de Vectores

Supóngase que el importe del ingreso de tres diferentes productos es de $4, 000, $5, 000 y $3, 000 respectivamente y el importe del costo variable es de $1,000, $2,000 y $ 1,000 ¿calcular la utilidad por artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que los importes de los ingresos, costos y utilidad representan un vector cada uno de ellos.

Paso 1

Pon en un renglón y celdas diferentes los valores del importe de cada uno de los ingresos de cada de los productos.

	A	B	C	D	E
1					
2		4,000	5,000	3,000	
3					

Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores del importe de cada uno de los costo de cada uno de los productos.

	A	B	C	D	E
3					
4		1,000	2,000	1,000	
5					

Paso 3

Realiza la resta de los ingresos y costos obteniendo de esta manera la utilidad de cada uno de los productos (se resta la celda del renglón del paso uno menos la del renglón del paso 2 y así sucesivamente).

	A	B	C
5			
6		=B2-B4	
7			

	A	B	C	D
5				
6			=C2-C4	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=D2-D4	
7					

Resultado

	A	B	C	D	E
5					
6		3,000	3,000	2,000	
7					

El vector anterior es la respuesta solicitada que nos muestra las utilidades de cada producto.

7.3 Caso práctico de Transformación Lineal

Supóngase que una empresa tiene su centro de distribución de uno de sus artículos en el estado de México y para distribuirlo a toda la república tiene cuatro bodegas distribuidas para la mejor eficiencia, la empresa divide en cuatro zonas diferentes zona sureste, suroeste, noreste y noroeste, si el porcentaje de acuerdo a la demanda de cada zona es la siguiente 11%, 26%, 35% y 28% respectivamente. ¿Cuál es la cantidad que se deberá enviar a cada zona si la planta produce 100,000 unidades mensuales de dicho artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que los porcentajes de cada una de las zonas forman una matriz.

Paso 1

Primero escribe en un renglón y una celda la cantidad de unidades que produce la empresa en un mes, en este caso 100,000 unidades.

	A	B	C
1			
2		100,000	
3			

Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona sur-este y sur-oeste respectivamente.

	A	B	C	D
3				
4		0.11	0.26	
5				

Paso 3

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona noreste y noroeste respectivamente.

	A	B	C	D
5				
6		0.35	0.28	
7				

Paso 4

En un renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona sur-este y sur-oeste respectivamente son multiplicados por la celda del paso número uno.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

En conjunto tenemos

	A	B	C	D
7				
8		11,000	26,000	
9				

Paso 5

Colocamos en otro renglón y celdas diferentes los valores de los porcentajes de la zona noreste y noroeste, respectivamente, multiplicados por la celda del paso número uno.

	A	B	C
9			
10		=B2*B6	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=B2*C6	
11				

En conjunto tenemos

	A	B	C	D
9				
10		35,000	28,000	
11				

Los renglones resultantes de de los pasos cuatro y cinco forman la matriz resultante de la transformación lineal

	A	B	C	D
8		11,000	26,000	
9				
10		35,000	28,000	
11				

La matriz anterior es la respuesta solicitada que nos muestra las cantidades demandadas por zona.

7.4 Caso práctico de Producto Interno

Supóngase que una empresa requiere para la fabricación de uno de sus artículos tres diferentes metales (cobre, plata, oro), si las cantidades requeridas son las siguientes: 2.4 kg, 1.8 kg y 0.20 kg respectivamente y el precio por kg de cada uno de los metales es de $18.00, $160.00, $9.80. ¿Calcular la utilidad por artículo?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel, y además consideraremos que las cantidades requeridas de fabricación y de precios de materiales representan un vector cada uno de ellos.

Paso 1

Primero escribe en un renglón y celdas diferentes las cantidades en kg de los diferentes metales se requieren para la fabricación de dicho artículo.

	A	B	C	D	E
1					
2		2.4	1.8	0.2	
3					

Paso 2

En un renglón y celdas diferentes los valores del precio por kg de cada uno de los metales.

	A	B	C	D	E
3					
4		18	160	9,800	
5					

Paso 3

Realiza la multiplicación de cada cantidad de metal por su precio y se coloca en un nuevo renglón (se multiplica cada celda del renglón del paso uno por la celda del renglón del paso 2 y así sucesivamente).

	A	B	C
5			
6		=B2*B4	
7			

	A	B	C	D
5				
6			=C2*C4	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				1960	
7					

Lo anterior nos da el siguiente vector:

	A	B	C	D	E
5					
6		43.2	288	1960	
7					

Paso 4

Cada una de las celdas del renglón del paso tres se le suma, dando como resultado el costo total del mencionado artículo.

	A	B	C
7			
8		=B6+C6+D6	
9			

Por lo tanto el resultado es:

	A	B	C
7			
8		2,291.20	
9			

El valor del paso cuatro es la respuesta solicitada que nos muestra el costo total del artículo en cuestión.

7.5 Caso práctico de Matrices

Supóngase que una empresa desea saber el requerimiento mínimo de dos procesos deferentes que son indispensables para la fabricación de dos artículos diferentes. Considerando que el articulo número uno requiere de un minuto en cada proceso y el articulo dos de uno y dos minutos respectivamente, si se requieren fabricar 1,000 unidades del articulo uno y 2,100 del dos. ¿Cuáles son los requerimientos en minutos para cada proceso?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel.

Paso 1

Anota en un renglón y celdas diferentes los valores del número de minutos requeridos por cada artículo en el proceso uno.

	A	B	C	D
1				
2		1	1	
3				

Paso 2

Escribe en un renglón y celdas diferentes los valores del número de minutos requeridos por cada artículo en el proceso dos.

	A	B	C	D
3				
4		1	2	
5				

Paso 3

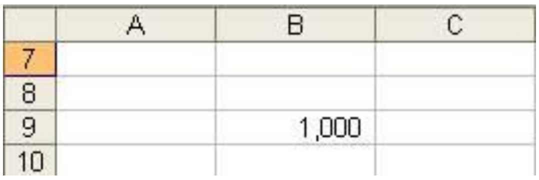
Después, en un renglón y celdas diferentes los valores del número de unidades a fabricar por cada artículo.

	A	B	C	D
5				
6		1,000	2,100	
7				

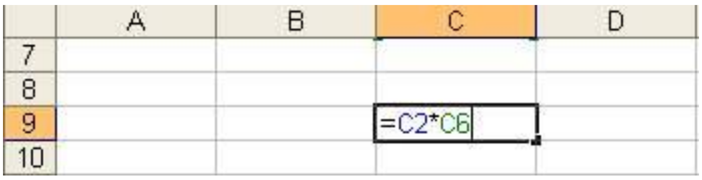
Paso 4

Multiplicamos los valores del renglón del paso tres por el renglón del paso uno (celda por celda respectivamente se multiplican y después ambos resultados se suman siendo esta suma el resultado del número de minutos requeridos en el proceso uno).

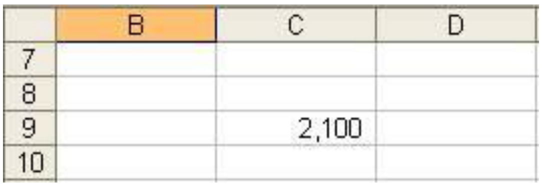
	A	B	C
7			
8			
9		=B2*B6	
10			



	A	B	C
7			
8			
9		1,000	
10			

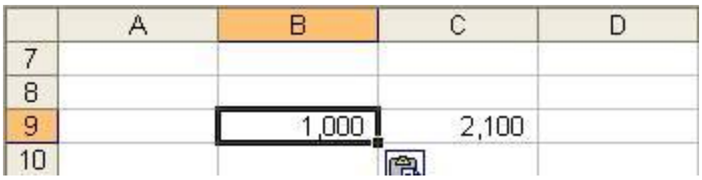


	A	B	C	D
7				
8				
9			=C2*C6	
10				



	B	C	D
7			
8			
9		2,100	
10			

Resultando:



	A	B	C	D
7				
8				
9		1,000	2,100	
10				

La suma es:

	A	B	C
10			
11			
12		=B9+C9	
13			

Su cálculo es:

	A	B	C
10			
11			
12		3,100	
13			

Paso 5

Multiplicamos los valores del renglón del paso tres por el renglón del paso dos (celda por celda respectivamente se multiplican y después ambos resultados se suman siendo esta suma el resultado del número de minutos requeridos en el proceso dos).

	D	E	F
5			
6		=B4*B6	
7			

	E	F
4		
5		
6	1,000	
7		

	F	G	H
4			
5			
6		=C4*C6	
7			

	F	G	H
4			
5			
6		4,200	
7			

Sumando los resultados anteriores; se tiene:

	D	E	F
10			
11			
12		=E6+F6	
13			

La suma nos da:

	D	E	F
10			
11			
12		5,200	
13			

Los valores obtenidos en los pasos cuatro y cinco son el resultado buscado en la presente práctica.

7.6 Caso práctico de Determinantes

Supóngase que el importe de una compra de cinco refrescos chicos y cuatro refrescos grandes es por $90.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y uno refresco grande y el importe de esta compra es por $25.00. ¿Cuales el precio del refresco chico y grande?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel.

Paso 1

Primero colocamos en un renglón y celdas los diferentes valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		5	4	90	
3					

Paso 2

A continuación escribe en un segundo renglón los valores de la segunda compra de la misma manera que el primer renglón, es decir los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de la segunda compra.

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	25	
5					

Paso 3

Calculamos la determinante del sistema como sigue, multiplicamos la primera celda del renglón del paso uno por la segunda celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la segunda celda del paso uno por la primera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del sistema.

	A	B	C
5			
6		=B2*C4-C2*B4	
7			

	A	B	C
5			
6		-3	
7			

Paso 4

Calculamos la determinante del refresco chico como sigue, multiplicamos la tercera celda del renglón del paso uno por la segunda celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la segunda celda del paso uno por la tercera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del refresco chico.

	A	B	C
7			
8		=D2*C4-C2*D4	
9			

	A	B	C
7			
8		-10	
9			

Paso 5

Calculamos la determinante del refresco grande como sigue, multiplicamos la primera celda del renglón del paso uno por la tercera celda del renglón del paso dos, a lo anterior le restamos el producto de la tercera celda del paso uno por la primera celda del renglón del paso dos, el resultado es la determinante del refresco grande.

	A	B	C
9			
10		=B2*D4-D2*B4	
11			

	A	B	C
9			
10		-55	
11			
12			

Paso 6

Se divide la determinante del paso cuatro entre la determinante del paso tres dando como resultado el precio del refresco chico.

	A	B	C	D	E
11					
12					
13		Refresco chico=		=B8/B6	
14					

	A	B	C	D	E
11					
12					
13		Refresco chico=		3.33333333	
14					

Paso 7

Se divide la determinante del paso cinco entre la determinante del paso tres dando como resultado el precio del refresco grande.

	A	B	C	D	E
14					
15					
16		Refresco grande=		=B10/B6	
17					

	A	B	C	D	E
14					
15					
16		Refresco grande=		18.3333333	
17					

Los valores obtenidos en los pasos seis y siete son el resultado buscado en la presente práctica

RESUMEN

En esta unidad vimos lo que se refiere a las Aplicaciones a través de software (Excel) de los diversos Temas vistos a lo largo de las Unidades anteriores; a fin de poder dar solución de una manera más rápida a todo tipo de Problemas Diversos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática y su relación con las áreas Contables-Administrativas.

Excel también te ofrece las funciones de MMULT, para multiplicación de matrices;

MINVERSE para obtener la inversa de una matriz.

GLOSARIO

Determinante

Es una matriz A de nxn , el determinante de A denotado mediante det (A) es un escalar que se calcula como la suma de todos los posibles productos de n entradas de A. Cada uno con un signo apropiado, con exactamente una entrada de cada fila y exactamente una entrada de cada columna.

Imatriz

Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mn entradas acomodadas en m filas y n columnas

Submatriz

Una matriz obtenida a partir de una matriz A eliminando filas y columnas

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen utilizando los pasos vistos en el tema ecuaciones lineales.

1. Un inversor obtuvo el primer año de su negocio una utilidad igual a la mitad de su capital invertido en dicho negocio y tuvo egresos por $ 6,000.00 por gastos diversos. Durante el segundo año obtuvo una utilidad igual a la mitad de lo que tenía, así como tuvo gastos por $ 6,000.00. Posteriormente en el transcurso del tercer año tuvo una utilidad igual a la mitad de lo que tenía, así como gastos por $ 6,000.00. Si el monto que tiene hasta ese momento es de $ 32, 250.00. ¿Cuál fue la Inversión Inicial con la que empezó el negocio?

2. Un comerciante empleo una Inversión Inicial de $ 1,910.00; para comprar su mercancía consistente en la adquisición de 50 trajes con costos unitarios de $ 40.00 y $ 35.00 cada uno. Determina la cantidad de trajes que adquirió con respecto a cada uno de los costos unitarios.

3. Un padre de familia le compra tres juguetes a su hijo consistente en un Potro, un Coche y un Perro. El Perro le costó $ 20.00; mientras que el Caballo y el Perro le costaron el triple que el Coche; el Perro y el Coche

costaron (3/5) partes de lo que costó el Caballo. Determina el costo del Caballo y el Coche.

4. Se tiene un terreno en forma rectangular con un perímetro de 58 metros. Si el largo aumenta en 2 metros y el ancho disminuye en 2 metros. Además se sabe que el Área del mismo disminuye en 46 metros cuadrados. Determina las dimensiones del terreno rectangular.

5. Dos apostadores tenían inicialmente $ 54.00 y $ 32.00 cada uno respectivamente. Posteriormente ambos ganaron una misma cantidad de dinero; cuya suma de lo que ahora tienen ambos excede en $ 66.00 al cuádruple de lo que ganó cada uno. Determina la cantidad que ganó cada uno de los apostadores.

ACTIVIDAD 2

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen utilizando los pasos vistos en el tema Vectores.

1. Supóngase que se tienen dos productos diferentes que ofrece un fabricante con las siguientes condiciones: Del Producto 1 se producen 1,000 unidades a un precio de venta de $ 3.80 cada uno, con un costo unitario de $ 1.30. Del Producto 2 se producen 1,200 unidades a un precio de venta de $ 3.20 cada uno con un costo unitario de $ 1.20. Por lo tanto la utilidad total de cada uno ellos es:

2. Un comerciante empleo una Inversión Inicial con el fin de comprar 34 trajes un costo unitario de $ 40.00 y 16 trajes con u costo unitario de $

35.00; sabiendo que estos los vende a un 25 % y 10 % arriba de su costo. Determina la utilidad que le genera cada uno de los trajes.

3. Determina la Utilidad Total que obtendría el fabricante por la venta de sus dos productos; de acuerdo a la información proporcionada en el Reactivo 1.
4. Determina la Utilidad Total que obtendría el comerciante por la venta de todos los trajes; de acuerdo a la información proporcionada en el Reactivo 2.

5. Dos apostadores tenían inicialmente $ 54.00 y $ 32.00 cada uno respectivamente. Posteriormente ambos ganaron una misma cantidad de dinero; cuya suma de lo que ahora tienen ambos excede en $ 66.00 al cuádruple de lo que ganó cada uno. Determina la cantidad que ganó cada uno de los apostadores.

ACTIVIDAD 3

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen utilizando los pasos vistos en el tema Transformación lineal.

1. Se requieren para una dieta cuando menos 16 unidades de carbohidratos y 20 de proteína. El alimento 1 provee dos unidades de carbohidratos y cuatro de proteínas y el alimento 2 provee dos unidades de carbohidratos y una de proteína. Si el alimento 1 tiene un costo de $ 1.20 los 100 gramos y el alimento 2 cuesta $ 0.80 los 100 gramos. ¿Cuál es la cantidad de cada tipo de alimento que reduce el costo al mínimo?

Supóngase que el precio de los Productos A, B y C están dados por la Matriz de Precios:

2. Si se aumentaran los precios en 10 %; y p_1 vale 10, p_2 vale 8 y p_3 vale 11; se puede obtener la Matriz de los nuevos precios multiplicando P ¿por qué escalar? y ¿cuáles son esos precios?

3. Una empresa produce dos tipos de artículos A y B, en dos máquinas distintas que son 1 y 2. Para el artículo A la Máquina 1 requiere 2 horas y la Máquina 2 requiere 4 horas y la Utilidad es de $ 4.00. Mientras que para el artículo B la Máquina 1 requiere 4 horas y la Máquina 2 requiere 4 horas y la Utilidad es de $ 6.00. Si las máquinas pueden funcionar durante 24 horas. ¿Cuál es la utilidad máxima?

4. Una fábrica produce un producto de Café mezclando tres tipos de granos. El peso por libra y las libras disponibles de cada grano son las siguientes: Para el Grano 1 el costo por libra son $ 0.50 con 500 libras disponibles. Para el grano 2 el costo por libra es de $ 0.70 con 600 libras disponibles; mientras que para el Grano 3 el costo por libra es de $ 0.45 y 400 libras disponibles. Se utilizan pruebas de los productos de Café con los consumidores para obtener evaluaciones en un escala de 0 a 100, en donde las calificaciones altas son señal de mayor calidad. Los estándares de calidad para los productos mezclados exigen una calificación del aroma, por parte de los consumidores, de cuando menos 75, y una calificación de los consumidores para el sabor, de cuando menos 80. Las calificaciones individuales para el aroma y para el sabor del Café que se fabrica con el 100 % de cada grano son las siguientes: Para el Grano 1 la calificación de aroma es de 75 y la calificación de sabor 86. Para el Grano 2 es de 85 y 88 respectivamente. Para el Grano 3 es de 60 y 75

respectivamente. Puede suponerse que los atributos de aroma y de sabor de la mezcla de Café son un promedio ponderado de los atributos de los granos que se utilizan en la mezcla. Determina ¿cuál es la mezcla de costo mínimo que satisface los estándares de calidad y produce mil libras del producto de Café mezclado?

5. De acuerdo a la información proporcionada en el problema del Reactivo 4. Determina el costo por libra de la mezcla de Café.

ACTIVIDAD 4

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1. Supóngase que una Empresa desea colocar tres productos, de un total de 500 unidades; las cuales se distribuyen de la siguiente manera: 200 unidades corresponden al Producto 1; 150 unidades al Producto 2 y el resto al Producto 3. La Utilidad Esperada de cada uno de los productos es la siguiente: Para el Producto 1 se espera una utilidad de $ 2.00; mientras que para el Producto 2 se espera una utilidad de $ $ 1.50 y finalmente para el Producto 3 se espera una utilidad de $ 0.50. Determine la Utilidad Total esperada.

2. Una Empresa desea comprar dos Elementos Básicos de la Materia Prima de un Producto Alimenticio; el elemento básico 1 cuesta $ 0.75 por libra y se requieren 1000 libras; mientras que el Elemento Básico 2 cuesta $ 1.20 por libra y se requieren 2000 libras. Determine el Costo Total de los dos Elementos Básicos requeridos para el Producto Alimenticio.

3. Una Casa de Bolsa; realiza la colocación de una cartera contemplada por tres instrumentos de inversión cuyo rendimiento por título operado es el siguiente: Para el Instrumento 1 se obtuvo un rendimiento de $ 0.2456 por título; mientras que para el Instrumento 2 se obtuvo un rendimiento de $ 0.3456 por título y finalmente para el Instrumento 3 se obtuvo un rendimiento de $ 0.5452 por título; si participaron en la colocación 5,000 títulos para el Instrumento 1 mientras que para el Instrumento 2 se colocaron 8,000 títulos y finalmente para el Instrumento 3 se colocaron 10,000 títulos. Determine el Rendimiento Total generado en la operación considerando que todos los títulos empezaron en la misma fecha y vencieron en la misma fecha.

4. Una Empresa decide colocar dos Productos de Cereal entre su mercado de consumo referido a mujeres; de un total de 100,000 unidades de Producto Terminado decide colocar el 45 % para el Producto 1 y el resto para el Producto 2; la Utilidad Esperada para el Producto 1 es de $ 2.34; mientras que para el Producto 2 es de $ 2.56. Determine la Utilidad Total obtenida por la Empresa.

5. Un Almacén distribuye dos Productos de la siguiente forma: 4,000 unidades corresponden al Producto 1 y 6,000 unidades corresponden al Producto 2. El Producto 1 tiene un Costo Unitario de $ 5,556.80; mientras que el Producto 2 tiene un Costo Unitario de $ 6,880.90; el Producto 1 se vende a $ 8,543.90 cada uno; mientras que el Producto 2 se vende a $ 10,456.90 cada uno; los gastos administrativos del producto 1 son de $ 150.00; mientras que los del Producto 2 son de $ 300.00. Determine la Utilidad Operativa Total del Almacén.

ACTIVIDAD 5

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen.

1) Considérese una Economía Hipotética y Simplificada que tiene tres industrias que son del carbón, la electricidad y el acero respectivamente; y tres consumidores 1, 2 y 3 respectivamente. Además supóngase que cada consumidor puede tomar parte de la producción de cada industria y a su vez cada industria puede tomar parte de la producción de cada una de las otras. La información previamente explicada se muestra en las siguientes matrices como sigue:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad D_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 1 \end{bmatrix} \quad De = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$
$$D_3 = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad D_a = \begin{bmatrix} 30 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) La Demanda Total de los bienes por parte de los consumidores

b) La Demanda Industrial Total y

c) La Demanda Total General.

2) Supóngase que el precio de los Productos A, B y C están dados por la Matriz de Precios:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

Si se aumentaran los precios en 10 %; y p_1 vale 10, p_2 vale 8 y p_3 vale 11; se puede obtener la Matriz de los nuevos precios multiplicando P ¿por qué escalar? y ¿cuáles son esos precios?

3) Supóngase que un contratista de construcción ha aceptado pedidos de cinco casas de estilo ranchero, siete casas de estilo campero y 12 casas de estilo colonial; cuya información se muestra e la Matriz Q como sigue:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

Además supóngase que las materias primas y laborales que se utilizan en cada uno de los tipos de edificación son: acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Estos elementos se muestran en la Matriz R como sigue:

$$R = \begin{array}{r} \\ \text{Ranchero} \\ \text{Campero} \\ \text{Colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano de Obra} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array}$$

Determine la cantidad de cada una de las materias que necesita para cumplir los contratos.

4) Considerando la información proporcionada en el Problema 3; al contratista también le interesan los costos en los que habrá de incurrir al comprar esos elementos. La información de dichos costos se muestra en la Matriz C como sigue:

$$C = \begin{bmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Determine el costo de cada tipo de casa.

De acuerdo a la información de los Problemas 4 y 5 determine el Costo Total de Construcción.

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

1. ¿Qué es un Sistema de Ecuaciones Lineales"? y ¿para qué se utilizan?
2. ¿Qué es un "Vector"? y ¿para qué se utilizan?
3. ¿Qué es un "Transformación Lineal" ¿ y ¿para qué se utilizan?
4. ¿Qué es el "producto Interno? Y ¿para qué se utilizan?
5. ¿Qué es una "Matriz"? y ¿para que se usan?
6. ¿Qué son los "Determinantes"? y ¿para qué se usan?
7. ¿Qué ventajas tienen los softwares para la resolución de "Problemas Diversos"?
8. ¿Cuál es la importancia de los softwares en la resolución de "Problemas Diversos" en el desarrollo de las "Empresas"?
9. ¿Crees que existe mucha vinculación entre los "Conceptos Matemáticos" y las distintas áreas "Contables-Administrativas?.

LO QUE APRENDÍ

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen.

Dada la "Matriz Insumo-Producción" que aparece enseguida:

	Industria A	Industria B	Demanda Final
Industria A	200	500	500
Industria B	400	200	900
Otros	600	800	----------

Determine la "Matriz de Producción" si la demanda final cambia a 600 para A y a 805 para B

1) De la Información proporcionada del "Problema 1". Determine el valor total de los otros "Costos de Producción" que ello implica

2) Dada la "Matriz Insumo-Producción" que aparece enseguida:

	Industria A	Industria B	Industria C	Demanda Final
Industria A	18	30	45	15
Industria B	27	30	60	3
Industria C	54	40	60	26
Otros	9	20	15	----------

Determine la “matriz de Producción si la “Demanda Final” cambia a 50 para A, 40 para B y 30 para C.

3) Considerando la información del “Problema 3”. Determine la “Matriz de Producción” si la Demanda Final cambia a 10 para A, 10 para B y 24 para C.

4) Dos apostadores tenían inicialmente \$ 54.00 y \$ 32.00 cada uno respectivamente. Posteriormente ambos ganaron una misma cantidad de dinero; cuya suma de lo que ahora tienen ambos excede en \$ 66.00 al cuádruple de lo que ganó cada uno. Determine la cantidad que ganó cada uno de los apostadores.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

I. Elige la opción que conteste correctamente cada pregunta. Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1.- Una persona después de haber gastado la mitad de lo que tenía y posteriormente prestar la mitad de lo que le quedó; le sobraron $ 21.00. Determine la cantidad que originalmente tenía.

- ❍ a) $ 85.50
- ❍ b) $ 82.50
- ❍ c) $ 88.00
- ❍ d) $ 89.00
- ❍ e) $84.00

2.- Un comerciante adquiere su mercancía consistente en la adquisición de trajes y sombreros. Para esto cuenta con una inversión de $ 4,180.00 para 5 trajes y 3 sombreros; además cuenta con una inversión de $ 6,940.00; para 8 trajes y 9 sombreros. Determine el precio al que adquirió cada traje y cada sombrero:

- ❍ a) Sombrero = $ 810.00; Traje = $ 65.00
- ❍ b) Sombrero = $ 820.00; Traje = $ 70.00
- ❍ c) Sombrero = $ 790.00; Traje = $ 80.00
- ❍ d) Sombrero = $ 800.00; Traje = $ 60.00
- ❍ e) Sombrero = $ 785.00; Traje = $ 75.00

3.- Se tienen entre tres personas $ 140.00. Además la tercera persona tiene la mitad de lo que tiene la primera; mientras que la primera tiene $ 10.00 más que la segunda. Determina la cantidad de dinero que tiene cada persona:

- a) 1$^{er.}$ persona = $ 60.00; 2$^{do.}$ persona = $ 50.00; 3$^{er.}$ persona = $ 30.00
- b) 1$^{er.}$ persona = $ 65.00; 2$^{do.}$ persona = $ 55.00; 3$^{er.}$ persona = $ 35.00
- c) 1$^{er.}$ persona = $ 70.00; 2$^{do.}$ persona = $ 60.00; 3$^{er.}$ persona = $ 40.00
- d) 1$^{er.}$ persona = $ 50.00; 2$^{do.}$ persona = $ 40.00; 3$^{er.}$ persona = $ 25.00
- e) 1$^{er.}$ persona = $ 75.00; 2$^{do.}$ persona = $ 50.00; 3$^{er.}$ persona = $ 35.00

4) La suma de los tres ángulos de un triángulo es de 180^o. El mayor excede al menor en 35^o y el menor excede en 20^o a la diferencia entre el mayor y el mediano. Determine el valor de los ángulos:

- a) 1$^{er.}$ ángulo = 90º; 2$^{do.}$ ángulo = 55º; 3$^{er.}$ ángulo = 35º
- b) 1$_{er.}$ ángulo = 85º; 2$^{do.}$ ángulo = 50º; 3$^{er.}$ ángulo = 45º
- c) 1$^{er.}$ ángulo = 80º; 2$^{do.}$ ángulo = 55º; 3$^{er.}$ ángulo = 45º
- d) 1$^{er.}$ ángulo = 78º; 2$^{do.}$ ángulo = 57º; 3er. ángulo = 45º
- e) 1$^{er.}$ ángulo = 88º; 2$^{do.}$ ángulo = 57º; 3$^{er.}$ ángulo = 35º

5) Un padre de familia compró cierto número de libros. Si hubiera comprado cinco libros más por el mismo dinero; cada libro le habría costado dos pesos menos; y si hubiera comprado cinco libros menos con el mismo dinero le habrían costado cada libro cuatro pesos más.

Determine la cantidad de libros que compró y cuanto pagó por cada uno:

- a) Libros = 12; Precio = $ 6.00
- b) Libros = 15; Precio = $ 8.00
- c) Libros = 14; Precio = $ 7.00
- d) Libros = 19; Precio = $ 5.00
- e) Libros = 13; Ancho = $ 9.00

II. Elige la opción que conteste correctamente cada pregunta, considerando los pasos utilizando en el tema Vectores.

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A = (1, -1, 2); B = (4, 5, -7) y C = (-1, 2, 1).

- a) 15.3456 unidades cuadradas
- b) 20.5645 unidades cuadradas
- c) 19.6723 unidades cuadradas
- d) 17.5645 unidades cuadradas
- e) 18.1865 unidades cuadradas

2. Dados los puntos A = (1, -1, 2); B = (0, 2, -3); C = (1, 1, 1) y D = (-1, 3, 3) si tres de las aristas de un paralepípedo son AB, AC y AD. Determine su volumen.

- a) 6 unidades cúbicas
- b) 4 unidades cúbicas
- c) 7 unidades cúbicas
- d) 3 unidades cúbicas
- e) 5 unidades cúbicas

3. Calcular el volumen del prisma triangular, en tres de cuyas aristas concurrentes se arrojan los "Vectores" a = 2i + j; b = 3i - 2j + k y c = 2i + 3j – 4k:

- a) 10 unidades cúbicas
- b) 13 unidades cúbicas
- c) 11 unidades cúbicas
- d) 12 unidades cúbicas
- e) 15 unidades cúbicas

4. Calcular el volumen de tetraedro de vértices A = (1, 1, 0); B = (3, 2, -1); C = (-2, 1, 1) y D = (2, -1, 0):

- a) 0.1466 unidades cúbicas
- b) 0.1765 unidades cúbicas
- c) 0.1666 unidades cúbicas
- d) 0.1876 unidades cúbicas
- e) 0.1356 unidades cúbicas

5. Demostrar que los puntos A = (2, 1, 3); B = (3, -5, -1); C = (-6, 7, 9) y D = (-2, 4, -3) son coplanares:

- a) Si son coplanares
- b) No son coplanares

III. Elige la opción que conteste correctamente cada pregunta, considerando los pasos utilizando en el tema Transformación lineal..

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1. Se fabrica un producto en tres plantas y se envían a tres almacenes. El producto total enviado es de 70,000 unidades. La Planta 1 envía el 35 %; mientras que la Planta 2 envía el 37 % y la Planta 3 el resto. Además los Almacenes reciben de la siguiente forma: El Almacén 1 recibe el 75 % de la Planta 1 y el 10 % de la Planta 2; mientras que el Almacén 2 recibe el 25 % de la Planta 1 y 50 % de la Planta 3 y finalmente el Almacén 3 recibe el 90 % de la Planta 2 y el 50 % de la Planta 3. Determine las cantidades de disposición de cada Planta y las de recibimiento de cada Almacén

- a) Planta 1 = 24,500; Planta 2 = 25,900; Planta 3 = 19,600; Almacén 1 = 20,965; Almacén 2 = 15,925; Almacén 3 = 33,110

- b) Planta 1 = 25,500; Planta 2 = 24,900; Planta 3 = 19,600; Almacén 1 = 21,965; Almacén 2 = 16,925; Almacén 3 = 33,110
- c) Planta 1 = 24,500; Planta 2 = 26,900; Planta 3 = 18,600; Almacén 1 = 20,965; Almacén 2 = 16,925; Almacén 3 = 32,110
- d) Planta 1 = 25,500; Planta 2 = 25,900; Planta 3 = 18,600; Almacén 1 = 21,965; Almacén 2 = 15,925; Almacén 3 = 32,110
- e) Planta 1 = 23,500; Planta 2 = 26,900; Planta 3 = 19,600; Almacén 1 = 20,465; Almacén 2 = 16,425; Almacén 3 = 34,110

2. Un fabricante produce tres productos con distribución a tres destinos; para esto lo hace enviando los productos desde dos plantas; de la siguiente forma: La Planta 1 envía el 30 % del Producto 1; el 40 % del Producto 2 y el resto del Producto 3. La Planta 2 envía el 40 % del Producto 1, el 30 % del producto 2 y el resto del Producto 3. El Destino 1 recibe el Producto 1; el Destino 2 recibe el Producto 2 mientras que el Destino 3 recibe el Producto 3. Determine la cantidad de unidades enviadas por cada Planta; sabiendo que el Total de Unidades producidas es de 100,000. Cabe indicar que la Planta tiene una capacidad del 55 %.

- a) Planta 1 = 56,000; Planta 2 = 44,000; Destino 1 = 34,500; Destino 2 = 35,500; Destino 3 = 30,000
- b) Planta 1 = 55,000; Planta 2 = 46,000; Destino 1 = 33,500; Destino 2 = 35,500; Destino 3 = 30,000
- c) Planta 1 = 55,000; Planta 2 = 45,000; Destino 1 = 35,500; Destino 2 = 34,500; Destino 3 = 30,000
- d) Planta 1 = 55,000; Planta 2 = 45,000; Destino 1 = 33,500; Destino 2 = 35,500; Destino 3 = 31,000
- e) Planta 1 = 55,000; Planta 2 = 45,000; Destino 1 = 34,500; Destino 2 = 35,500; Destino 3 = 30,000

3. Una empresa envía 100,000 unidades a tres lugares en las siguientes proporciones: el 27 % al Lugar 1; el 38 % al Lugar 2 y el resto al Lugar 3. Determine la cantidad de unidades enviadas a cada uno de los lugares:

- a) Lugar 1 = 28,000; Lugar 2 = 38,000; Lugar 3 = 36,000
- b) Lugar 1 = 28,000; Lugar 2 = 37,000; Lugar 3 = 35,000
- c) Lugar 1 = 27,000; Lugar 2 = 38,000; Lugar 3 = 35,000
- d) Lugar 1 = 29,000; Lugar 2 = 36,000; Lugar 3 = 35,000
- e) Lugar 1 = 25,000; Lugar 2 = 38,000; Lugar 3 = 37,000

4. Un comerciante compró 50,000 unidades de la siguiente forma: de un Almacén adquirió el 20 % del total comprado; de otro adquirió el 45 % y el resto de otro. Determine la cantidad adquirida de cada Almacén:

- a) Almacén 1 = 11,000; Almacén 2 = 22,500; Almacén 3 = 17,500
- b) Almacén 1 = 10,000; Almacén 2 = 22,500; Almacén 3 = 16,500
- c) Almacén 1 = 12,000; Almacén 2 = 20,500; Almacén 3 = 16,500
- d) Almacén 1 = 10,000; Almacén 2 = 23,500; Almacén 3 = 15,500
- e) Almacén 1 = 10,000; Almacén 2 = 21,500; Almacén 3 = 17,500

5. Un empresario vende 20,000 muebles a 4 Tiendas; de la siguiente forma: 25 % a la Tienda 1; 35 % a la Tienda 2; 30 % a la Tienda 3 y el resto a la Tienda 4. Determine la cantidad de unidades entregadas a cada Tienda:

- a) Tienda 1 = 4,000; Tienda 2 = 8,000; Tienda 3 = 5,000; Tienda 4 = 3,000
- b) Tienda 1 = 4,000; Tienda 2 = 7,000; Tienda 3 = 7,000; Tienda 4 = 2,000
- c) Tienda 1 = 5,000; Tienda 2 = 8,000; Tienda 3 = 6,000; Tienda 4 = 1,000
- d) Tienda 1 = 5,000; Tienda 2 = 7,000; Tienda 3 = 6,000; Tienda 4 = 2,000
- e) Tienda 1 = 6,000; Tienda 2 = 6,000; Tienda 3 = 6,000; Tienda 4 = 2,000

IV. Elige la opción que conteste correctamente cada pregunta, considerando los pasos utilizando en el tema Producto interno.

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1) Supóngase que una "Empresa" desea colocar tres productos, de un total de 500 unidades; las cuales se distribuyen de la siguiente manera: 200 unidades corresponden al "Producto 1"; 150 unidades al "Producto 2" y el resto al "Producto 3". La "Utilidad Esperada" de cada uno de los productos es la siguiente: Para el "Producto 1" se espera una utilidad de $

4.00; mientras que para el “Producto 2” se espera una utilidad de $ $ 6.50 y finalmente para el “Producto 3” se espera una utilidad de $ 2.50. Determine la “Utilidad Total” esperada

- a) $ 2,170.00
- b) $ 2,130.00
- c) $ 2,120.00
- d) $ 2,145.00
- e) $ 2,150.00

2) Una “Empresa” desea comprar dos “Elementos Básicos” de la “Materia Prima” de un “Producto Alimenticio”; el elemento básico 1 cuesta $ 0.75 por libra y se requieren 30,000 libras; mientras que el “Elemento Básico 2” cuesta $ 1.20 por libra y se requieren 50,000 libras. Determine el “Costo Total” de los dos “Elementos Básicos” requeridos para el “Producto Alimenticio”

- a) $ 82,700.00
- b) $ 82,800.00
- c) $ 82,600.00
- d) $ 82,500.00
- e) $ 82,900.00

3) Una “Casa de Bolsa”; realiza la colocación de una cartera contemplada por tres instrumentos de inversión cuyo rendimiento por título operado es el siguiente: Para el “Instrumento 1” se obtuvo un rendimiento de $ 1.2456 por título; mientras que para el “Instrumento 2” se obtuvo un rendimiento de $ 2.3456 por título y finalmente para el “Instrumento 3” se obtuvo un rendimiento de $ 3.5452 por título; si participaron en la colocación 5,000 títulos para el “Instrumento 1” mientras que para el “Instrumento 2” se colocaron 8,000 títulos y finalmente para el “Instrumento 3” se colocaron

10,000 títulos. Determine el "Rendimiento Total" generado en la operación considerando que todos los títulos empezaron en la misma fecha y vencieron en la misma fecha:

- a) $ 60, 428.89
- b) $ 60, 432.67
- c) $ 60, 441.80
- d) $ 60, 434.56
- e) $ 60, 444.23

4) Una "Empresa" decide colocar dos "Productos de Cereal" entre su mercado de consumo referido a mujeres; de un total de 250,000 unidades de "Producto Terminado" decide colocar el 65 % para el "Producto 1" y el resto para el "Producto 2"; la "Utilidad Esperada" para el "Producto 1" es de $ 2.34; mientras que para el "Producto 2" es de $ 2.56. Determine la "Utilidad Total" obtenida por la "Empresa":

- a) $ 604, 200.00
- b) $ 604, 250.00
- c) $ 604, 150.00
- d) $ 604, 100.00
- e) $ 604, 350.00

5) Un "Almacén" distribuye dos "Productos" de la siguiente forma: 14,000 unidades corresponden al "Producto 1" y 16,000 unidades corresponden al "Producto 2". El "Producto 1" tiene un "Costo Unitario" de $ 5,556.80; mientras que el "Producto 2" tiene un "Costo Unitario" de $ 6,880,90; el "Producto 1" se vende a $ 8,543.90 cada uno; mientras que el "Producto 2" se vende a $ 10,456.90 cada uno; los gastos administrativos del

“producto 1” son de \$ 150.00; mientras que los del “Producto 2” son de \$ 300.00. Determine la “Utilidad Operativa Total” del “Almacén”:

- a) \$ 196,135, 400.00
- b) \$ 196,133, 700.00
- c) \$ 196,137, 400.00
- d) \$ 196,135, 200.00
- e) \$ 196,136, 400.00

V. Elige la opción que conteste correctamente cada pregunta, considerando los pasos utilizando en el tema Matices.

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1. Si P representa el precio de un artículo y Q la cantidad ofrecida o demandada de este artículo. Además la Ecuación de la Oferta del artículo es: $Q = -230 + 450P$; mientras que la Ecuación de la Demanda es $Q = 4770 – 175P$. Entonces el Punto de equilibrio es:

- a) $P_e = 6$, $Q_e = 3{,}380$
- b) $P_e = 7$, $Q_e = 3{,}350$
- c) Pe = 8, $Q_e = 3{,}370$
- d) $P_e = 9$, $Q_e = 3{,}360$
- e) Pe = 10, $Q_e = 3{,}375$

2. Si X representa las cantidades de unidades producidas y vendidas de un artículo fabricado por una empresa; cuya Ecuación de Ingresos es I =

0.76 X; mientras que la Ecuación de los Costos es C = 0.48 X + 310, entonces el Punto de Equilibrio es:

- a) X_e = 1108.14; C_e = \$ 841.43
- b) X_e = 1106.14; C_e = \$ 844.43
- c) X_e = 1105.14; C_e = \$ 849.43
- d) X_e = 1107.14; C_e = \$ 841.43
- e) X_e = 1109.14; C_e = \$ 847.43

3. Sea una empresa que produce relojes de pulsera y relojes de pared, y dispone de 1,200 unidades de capital y de 400 horas-hombre de trabajo. Los requisitos de producción son los siguientes: Para un reloj de pulsera se requieren 40 unidades de capital y 20 horas-hombre de trabajo. Mientras que para un reloj de pared se requieren 100 unidades de capital y 30 horas-hombre de trabajo. ¿Cuántos relojes de pulsera y de pared debe producir la empresa para utilizar sus capacidades al máximo?:

- a) R. Pulsera = 6, R. Pared = 12
- b) R. Pulsera = 7, R. Pared = 11
- c) R. Pulsera = 8, R. Pared = 10
- d) R. Pulsera = 5, R. Pared = 12
- e) R. Pulsera = 6, R. Pared = 11

4. Supóngase que un contratista de construcción ha aceptado pedidos de siete casas de estilo ranchero, tres casas de estilo campero y cinco casas de estilo colonial.

Además supóngase que las materias primas y laborales que se utilizan en cada uno de los tipos de edificación son: acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. Estos elementos se muestran en la “Matriz” R como sigue:

$$R = \begin{array}{c} \\ \text{Ranchero} \\ \text{Campero} \\ \text{Colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Acero} & \text{Madera} & \text{Vidrio} & \text{Pintura} & \text{Mano de Obra} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mientras que los costos están dados por:

$$C = \begin{bmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Determina el costo Total de materiales y obra:

- a) $ 735,200.00.
- b) $ 735,300.00
- c) $ 735,500.00
- d) $ 735,600.00
- e) $ 735,500.00

5. Los apostadores tenían inicialmente $ 54.00 y $ 32.00 cada uno respectivamente. Posteriormente ambos ganaron una misma cantidad de dinero; cuya suma de lo que ahora tienen ambos excede en $ 66.00 al cuádruple de lo que ganó cada uno. Determine la cantidad que ganó cada uno de los apostadores:

- a) $ 10.00
- b) $ 12.00
- c) $ 9.00
- d) $ 11.00
- e) $ 15.00

VI. Elige la opción que conteste correctamente cada pregunta, considerando los pasos utilizando en el tema Determinantes. Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1. Supóngase que una "Empresa" fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 500 litros de una solución ácida al 25 % (esto significa que 25 % del volumen es ácido). Si se tienen disponibles en el almacén soluciones al 30 % y al 18 %. ¿Cuántos litros de cada una de ellas se deben mezclar para cumplir con el requisito del pedido?

   - a) x = 295.66 l; y = 204.33 l
   - b) x = 293.66 l; y = 206.33 l
   - c) x = 292.66 l; y = 207.33 l
   - d) x = 290.66 l; y = 209.33 l
   - e) x = 291.66 l; y = 208.33 l

2. Determinar la cantidad de punto de equilibrio para una "Empresa" dada la siguiente información: los costos fijos totales son de $ 1,200.00, mientras que los costos variables por unidad son de $ 2.00; a su vez los ingresos totales por la venta de q unidades, $y_{TR} = 100\sqrt{q}$.

   - a) $q_1 = 400$; $q_2 = 800$
   - b) $q_1 = 500$; $q_2 = 900$
   - c) $q_1 = 450$; $q_2 = 850$
   - d) $q_1 = 400$; $q_2 = 900$
   - e) $q_1 = 300$; $q_2 = 950$

3. Una “Casa de Bolsa”; realiza la colocación de una cartera contemplada por tres instrumentos de inversión cuyo rendimiento por título operado es el siguiente: Para el “Instrumento 1” se obtuvo un rendimiento de $ 1.2456 por título; mientras que para el “Instrumento 2” se obtuvo un rendimiento de $ 2.3456 por título y finalmente para el “Instrumento 3” se obtuvo un rendimiento de $ 3.5452 por título; si participaron en la colocación 15,000 títulos para el “Instrumento 1” mientras que para el “Instrumento 2” se colocaron 28,000 títulos y finalmente para el “Instrumento 3” se colocaron 30,000 títulos. Determine el “Rendimiento Total” generado en la operación considerando que todos los títulos empezaron en la misma fecha y vencieron en la misma fecha:

- a) $ 190, 708.89
- b) $ 190, 718.67
- c) $ 190, 716.80
- d) $ 190, 714.56
- d) $ 190, 712.23

4. Una “Empresa” decide colocar dos “Productos de Cereal” entre su mercado de consumo referido a mujeres; de un total de 1,250,000 unidades de “Producto Terminado” decide colocar el 65 % para el “Producto 1” y el resto para el “Producto 2”; la “Utilidad Esperada” para el “Producto 1” es de $ 2.54; mientras que para el “Producto 2” es de $ 4.56. Determine la “Utilidad Total” obtenida por la “Empresa”cada fase:

- a) $ 4, 058, 750.00
- b) $ 4, 058, 752.00
- c) $ 4, 058, 748.00
- d) $ 4, 058, 743.00
- e) $ 4, 058, 753.00

5. Un “Almacén” distribuye dos “Productos” de la siguiente forma: El “Producto 1” tiene un “Costo Unitario” de $ 5,556.80; mientras que el “Producto 2” tiene un “Costo Unitario” de $ 6,880.90; el “Producto 1” se vende a $ 8,543.90 cada uno; mientras que el “Producto 2” se vende a $ 10,456.90 cada uno; los gastos administrativos del “producto 1” son de $ 150.00; mientras que los del “Producto 2” son de $ 300.00. Determine la “Utilidad Operativa Unitaria Total” del “Almacén”:

- a) $ 6,113.90
- b) $ 6,113.10
- c) $ 6,114.00
- d) $ 6,112.90
- e) $ 6,113.50

6. Una “Casa de Bolsa”; realiza la colocación de dos instrumentos cuyo rendimiento preestablecido es de 8.15 % nominal y 7.90 nominal respectivamente por cada peso invertido. Sabiendo que las dos colocaciones vencen en la misma fecha. Determine el rendimiento anual total generado por cada peso invertido

- a) $ 0.1789
- b) $ 0.1605
- c) $ 0.1656
- d) $ 0.1589
- e) $ 0.1423

7. Una “Empresa” fabrica calculadoras y tiene plantas en dos ciudades. En la planta de la ciudad 1 los costos fijos son de $ 7,000.00 al mes y el costo de fabricar cada calculadora es de $ 7.50. En la planta de la

ciudad 2 los costos fijos son de $ 8,000.00 mensuales y se requieren $ 6.00 para fabricar cada unidad. El siguiente mes la compañía deberá fabricar 1,500 calculadoras. Determine la cantidad de calculadoras a fabricar en cada planta para que sean iguales los costos totales en cada una.

- a) 800 en la planta de la ciudad 1 y 700 en la planta de la ciudad 2
- b) 900 en la planta de la ciudad 1 y 600 en la planta de la ciudad 2
- c) 700 en la planta de la ciudad 1 y 600 en la planta de la ciudad 2
- d) 700 en la planta de la ciudad 1 y 800 en la planta de la ciudad 2
- e) 600 en la planta de la ciudad 1 y 900 en la planta de la ciudad 2

8. Un fabricante de productos químicos desea surtir un pedido de 700 galones de una solución ácida al 24 %. Se tienen disponibles soluciones al 20 % y al 30 %. ¿Cuántos galones de cada solución se deben mezclar para surtir el pedido?

- a) 410 galones de la solución al 20% y 270 galones de la solución al 30 %
- b) 430 galones de la solución al 20% y 290 galones de la solución al 30 %
- c) 420 galones de la solución al 20% y 280 galones de la solución al 30 %
- d) 450 galones de la solución al 20% y 300 galones de la solución al 30 %
- e) 440 galones de la solución al 20% y 290 galones de la solución al 30 %

9. Una “Empresa” tiene dos plantas y decide solicitar su materia prima a tres distribuidores de la siguiente forma: El “Distribuidor 1” envía 3,000

toneladas a un costo de $ 260.00 por tonelada y el “Distribuidor 3” envía 4,000 toneladas a un costo de $ 256.00 a la “Planta 1”. Mientras que el “Distribuidor 2” envía 7,000 toneladas a un costo de $ 276.00 por tonelada a la “Planta 2”. Determine y colocar dos “Productos de Cereal” entre su mercado de consumo referido a mujeres; de un total de 250,000 unidades de “Producto Terminado:

- a) $ 1, 823, 335.00
- b) $ 1, 823, 290.00
- c) $ 1, 823, 300.00
- d) $ 1, 823, 320.00
- e) $ 1, 823, 340.00

10. Una “Compañía”; paga a sus vendedores con base en cierto porcentaje de los primeros $ 100,00.00 de ventas, más otro porcentaje sobre el excedente de los $ 100,000.00 de ventas. Si un vendedor ganó $ 8,500.00 en ventas de $ 175,000.00 y otro vendedor gano $ 14,800.00 en ventas de $ 280,000.00, Determine el valor de los dos porcentajes:

- a) 6 % sobre los primeros $ 100,000.00 y 4 % sobre el excedente
- b) 7 % sobre los primeros $ 100,000.00 y 4 % sobre el excedente
- c) 4 % sobre los primeros $ 100,000.00 y 7 % sobre el excedente
- d) 6 % sobre los primeros $ 100,000.00 y 5 % sobre el excedente
- e) 4 % sobre los primeros $ 100,000.00 y 6 % sobre el excedente

MESOGRAFÍA

Bibliografía recomendada

Autor	Capítulo	Páginas
Rendon, Araceli ; Rodríguez, Jesus	7	153-167

Bibliografía básica

1. Kolman Bernard David, Pearson, "Algebra Lineal", Prentice Hall, Octava Edicion, 648pp.
2. David Poole, "Algebra Lineal: Una introducción moderna", Thomson, Primera Edicion, 2004, 763pp.
3. Rendon, Araceli; Rodríguez, Jesus; "Introduccion al Algebra lineal y de Matrices .Aplicaciones con Excel"; UAM

Bibliografía complementaria

1. David C. Lay, *Algebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Tercera Edición, 2004, 492pp.

2. Grossman, Stanley Y, *Algebra Lineal*, Mc Graw Hill, 1996, México, 643pp.

Sitios electrónicos

http://www.frro.utn.edu.ar/repositorio/catedras/electrica/2_anio/fundamentos_informatica/apuntes/matlab/practica_matlab_&_simulink.pdf

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

www.frro.utn.edu.ar/.../matlab/practica_matlab_&_simulink.pdf

RESPUESTAS A LOS EXÁMENES DE AUTOEVALUACIÓN

UNIDAD 1
E1
1. b)
2. a)
3. c)
4. b)
5. c)
6. e)
7. d)
8. b)
9. c)

UNIDAD 2	
E1	E2
1. c)	1. c)
2. e)	2. c)
3. a)	3. a)
4. no	
5. b)	
6. a)	
7. c)	
8. SI	
9. NO	

UNIDAD 3
E1
1. a)
2. c)
3. e)
4. b)
5. d)

UNIDAD 4
E1
1. c)
2. si
3. e)
4. d)
5. e)

UNIDAD 5
E1
1. a)
2. d)
3. e)
4. b)
5. d)

UNIDAD 6	
E1	E2
1. a) 2. e) 3. c) 4. b) 5. d)	1. e) 2. g) 3. b) 4. h) 5. a) 6. c) 7. d) 8. f)

UNIDAD 7					
E1	E2	E3	E4	E5	E6
1. e) 2. d) 3. a) 4. c) 5. b)	1. e) 2. d) 3. d) 4. c) 5. a)	1. a) 2. e) 3. c) 4. b) 5. d)	1. e) 2. d) 3. c) 4. b) 5. a)	1. c) 2. d) 3. e) 4. b) 5. a)	1. e) 2. d) 3. b) 4. d) 5. c) 6. a) 7. b) 8. a) 9. b) 10. e)