UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

DIVISIÓN SISTEMA UNIVERSIDAD ABIERTA Y EDUCACIÓN A DISTANCIA

LICENCIATURA en

INFORMÁTICA

APUNTES DIGITALES
PLAN 2011

SUAYED UNA OPCIÓN PARA TI

MATEMATICAS I

ÁLGEBRA LINEAL

Plan: 2011

Clave:		Créditos: 8
Licenciatura: **INFORMÁTICA**		Semestre: 1º
Área: Matemáticas		Horas. Asesoría:
Requisitos: Ninguno		Horas. por semana: 4
Tipo de asignatura:	Obligatoria (x)	Optativa ( )

AUTORES:

ALBERTO DE LA ROSA ELIZALDE

ADAPTADO A DISTANCIA:

JUAN CARLOS LUNA SÁNCHEZ

ACTUALIZACION AL PLAN DE ESTUDIOS 2012

INTRODUCCIÓN GENERAL AL MATERIAL DE ESTUDIO

Las modalidades abierta y a distancia (SUAYED) son alternativas que pretenden responder a la demanda creciente de educación superior, sobre todo, de quienes no pueden estudiar en un sistema presencial. Actualmente, “con la incorporación de las nuevas tecnologías de información y comunicación a los sistemas abierto y a distancia, se empieza a fortalecer y consolidar el paradigma educativo de éstas, centrado en el estudiante y su aprendizaje autónomo, para que tenga lugar el diálogo educativo que establece de manera semipresencial (modalidad abierta) o vía Internet (modalidad a distancia) con su asesor y condiscípulos, apoyándose en materiales preparados ex profeso”[1].

Un rasgo fundamental de la educación abierta y a distancia es que no exige presencia diaria. El estudiante SUAYED aprende y organiza sus actividades escolares de acuerdo con su ritmo y necesidades; y suele hacerlo en momentos adicionales a su jornada laboral, por lo que requiere flexibilidad de espacios y tiempos. En consecuencia, debe contar con las habilidades siguientes.

[1] Sandra Rocha, *Documento de Trabajo. Modalidad Abierta y a Distancia en el SUA-FCA*, 2006.

- Saber estudiar, organizando sus metas educativas de manera realista según su disponibilidad de tiempo, y estableciendo una secuencia de objetivos parciales a corto, mediano y largo plazos.
- Mantener la motivación y superar las dificultades inherentes a la licenciatura.
- Asumir su nuevo papel de estudiante y compaginarlo con otros roles familiares o laborales.
- Afrontar los cambios que puedan producirse como consecuencia de las modificaciones de sus actitudes y valores, en la medida que se adentre en las situaciones y oportunidades propias de su nueva situación de estudiante.
- Desarrollar estrategias de aprendizaje independientes para que pueda controlar sus avances.
- Ser autodidacta. Aunque apoyado en asesorías, su aprendizaje es individual y requiere dedicación y estudio. Acompañado en todo momento por su asesor, debe organizar y construir su aprendizaje.
- Administrar el tiempo y distribuirlo adecuadamente entre las tareas cotidianas y el estudio.
- Tener disciplina, perseverancia y orden.
- Ser capaz de tomar decisiones y establecer metas y objetivos.
- Mostrar interés real por la disciplina que se estudia, estar motivado para alcanzar las metas y mantener una actitud dinámica y crítica, pero abierta y flexible.
- Aplicar diversas técnicas de estudio. Atender la retroalimentación del asesor; cultivar al máximo el hábito de lectura; elaborar resúmenes, mapas conceptuales, cuestionarios, cuadros sinópticos, etcétera; presentar trabajos escritos de calidad en contenido, análisis y reflexión; hacer guías de estudio; preparar exámenes~~;~~ y aprovechar los diversos recursos de la modalidad.

- Además de lo anterior, un estudiante de la modalidad a distancia debe dominar las herramientas tecnológicas. Conocer sus bases y metodología; tener habilidad en la búsqueda de información en bibliotecas virtuales; y manejar el sistema operativo Windows, paquetería, correo electrónico, foros de discusión, chats, blogs, wikis, etcétera.

También se cuenta con materiales didácticos como éste elaborados para el SUAYED, que son la base del estudio independiente. En específico, este documento electrónico ha sido preparado por docentes de la Facultad para cada una de las asignaturas, con bibliografía adicional que te permitirá consultar las fuentes de información originales. El recurso comprende referencias básicas sobre los temas y subtemas de cada unidad de la materia, y te introduce en su aprendizaje, de lo concreto a lo abstracto y de lo sencillo a lo complejo, por medio de ejemplos, ejercicios y casos, u otras actividades que te posibilitarán aplicarlos y vincularlos con la realidad laboral. Es decir, te induce al “saber teórico” y al “saber hacer” de la asignatura, y te encauza a encontrar respuestas a preguntas reflexivas que te formules acerca de los contenidos, su relación con otras disciplinas, utilidad y aplicación en el trabajo. Finalmente, el material te da información suficiente para autoevaluarte sobre el conocimiento básico de la asignatura, motivarte a profundizarlo, ampliarlo con otras fuentes bibliográficas y prepararte adecuadamente para tus exámenes. Su estructura presenta los siguientes apartados.

1. *Información general de la asignatura.* Incluye elementos introductorios como portada, identificación del material, colaboradores, datos oficiales de la asignatura, orientaciones para el estudio, contenido y programa oficial de la asignatura, esquema

general de contenido, introducción general a la asignatura y objetivo general.

2. *Desarrollo de cada unidad didáctica.* Cada unidad está conformada por los siguientes elementos.
   - Introducción a la unidad.
   - Objetivo particular de la unidad.
   - Contenidos.
   - Actividades de aprendizaje y/o evaluación. Tienen como propósito contribuir en el proceso enseñanza-aprendizaje facilitando el afianzamiento de los contenidos esenciales. Una función importante de estas actividades es la retroalimentación: el asesor no se limita a valorar el trabajo realizado, sino que además añade comentarios, explicaciones y orientación.
   - Ejercicios y cuestionarios complementarios o de reforzamiento. Su finalidad es consolidar el aprendizaje del estudiante.
   - Ejercicios de autoevaluación. Al término de cada unidad hay ejercicios de autoevaluación cuya utilidad, al igual que las actividades de aprendizaje, es afianzar los contenidos principales. También le permiten al estudiante calificarse él mismo cotejando su resultado con las respuestas que vienen al final, y así podrá valorar si ya aprendió lo suficiente para presentar el examen correspondiente. Para que la autoevaluación cumpla su objeto, es importante no adelantarse a revisar las respuestas antes de realizar la autoevaluación; y no reducir su resolución a una mera actividad mental, sino que debe registrarse por escrito, labor que facilita aún más el aprendizaje. Por último, la diferencia entre las actividades de autoevaluación y las de aprendizaje es que éstas, como son corregidas por el asesor, fomentan la creatividad, reflexión y

valoración crítica, ya que suponen mayor elaboración y conllevan respuestas abiertas.

3. Resumen por unidad.
4. Glosario de términos.
5. Fuentes de consulta básica y complementaria. Mesografía, bibliografía, hemerografía y sitios web, considerados tanto en el programa oficial de la asignatura como los sugeridos por los profesores.

Esperamos que este material cumpla con su cometido, te apoye y oriente en el avance de tu aprendizaje.

Recomendaciones (orientación para el estudio independiente)

- Lee cuidadosamente la introducción a la asignatura, en ella se explica la importancia del curso.
- Revisa detenidamente los objetivos de aprendizaje (general y específico por unidad), en donde se te indican los conocimientos y habilidades que deberás adquirir al finalizar el curso.
- Estudia cada tema siguiendo los contenidos y lecturas sugeridos por tu asesor, y desarrolla las actividades de aprendizaje. Así podrás aplicar la teoría y ejercitarás tu capacidad crítica, reflexiva y analítica.
- Al iniciar la lectura de los temas, identifica las ideas, conceptos, argumentos, hechos y conclusiones, esto facilitará la comprensión de los contenidos y la realización de las actividades de aprendizaje.
- Lee de manera atenta los textos y mantén una actitud activa y de diálogo respecto a su contenido. Elabora una síntesis que te ayude a fijar los conceptos esenciales de lo que vas aprendiendo.

- Debido a que la educación abierta y a distancia está sustentada en un principio de auto enseñanza (autodisciplina), es recomendable diseñar desde el inicio un plan de trabajo para puntualizar tiempos, ritmos, horarios, alcance y avance de cada asignatura, y recursos.
- Escribe tus dudas, comentarios u observaciones para aclararlas en la asesoría presencial o a distancia (foro, chat, correo electrónico, etcétera).
- Consulta al asesor sobre cualquier interrogante por mínima que sea.
- Revisa detenidamente el plan de trabajo elaborado por tu asesor y sigue las indicaciones del mismo.

Otras sugerencias de apoyo

- Trata de compartir tus experiencias y comentarios sobre la asignatura con tus compañeros, a fin de formar grupos de estudio presenciales o a distancia (comunidades virtuales de aprendizaje, a través de foros de discusión y correo electrónico, etcétera), y puedan apoyarse entre sí.
- Programa un horario propicio para estudiar, en el que te encuentres menos cansado, ello facilitará tu aprendizaje.
- Dispón de periodos extensos para al estudio, con tiempos breves de descanso por lo menos entre cada hora si lo consideras necesario.
- Busca espacios adecuados donde puedas concentrarte y aprovechar al máximo el tiempo de estudio.

TEMARIO OFICIAL

	Horas
1. Sistemas de ecuaciones lineales	10
2. Espacios Vectoriales	8
3. Transformaciones Lineales	8
4. Producto interno	10
5. Matrices	8
6. Determinantes	8
7. Practicas en laboratorio	12
Horas Sugeridas	**64**

INTRODUCCIÓN A LA ASIGNATURA

Las matemáticas constituyen una parte fundamental en la formación académica de los estudiantes y profesionales de las Ciencias Sociales y más aun para los que se encuentran en aéreas en donde es necesario resolver problemas relacionados con la producción, la organización, la toma de decisiones, etc.

El álgebra lineal es la rama de las matemáticas que estudia conceptos tales como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones lineales y en un enfoque más formal, espacios vectoriales, y sus transformaciones lineales.

Es un área que tiene conexiones con muchas áreas dentro y fuera de las matemáticas como análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, etc.

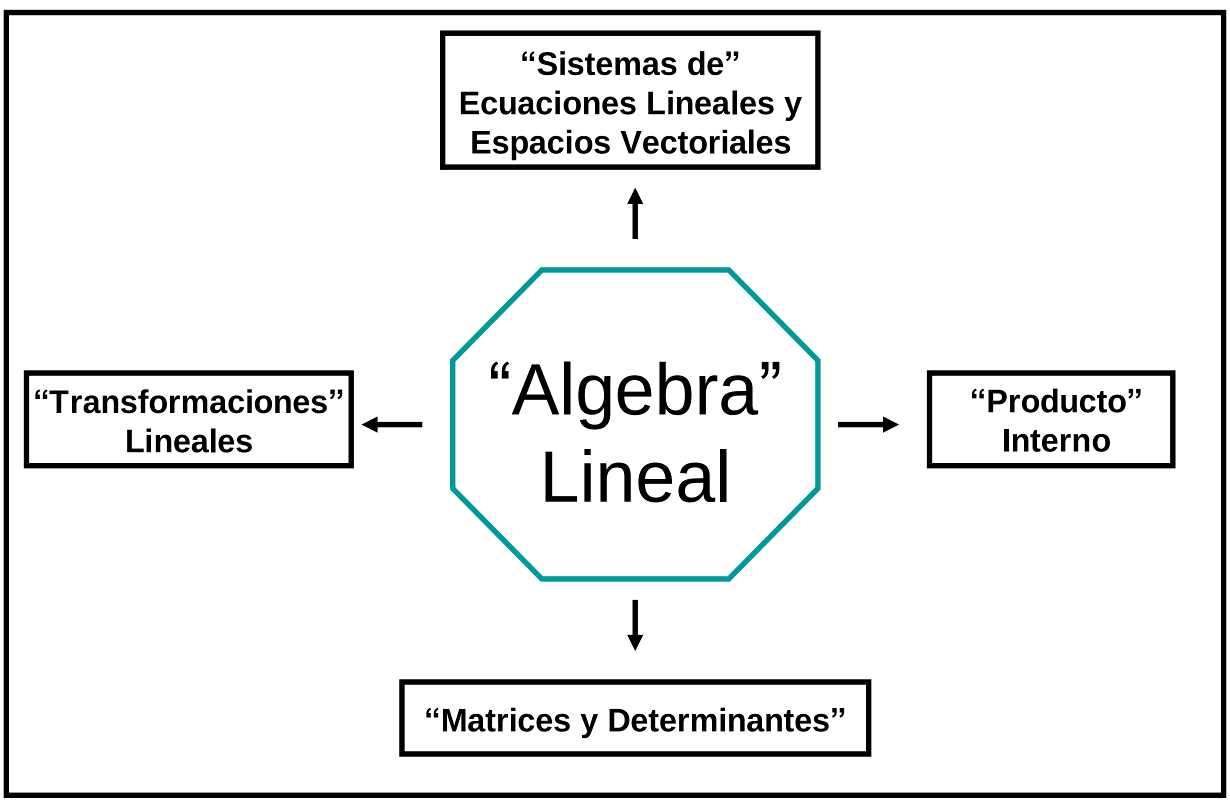
La historia del álgebra lineal se remonta a los años de 1843 cuando William Rowan Hamilton (de quien proviene el uso del término *vector*) creó los cuaterniones; y en 1844 fue cuando Hermann Grassmann publicó su libro *Die lineale Ausdehnungslehre* (*La teoría lineal de extensión*).

En la actualidad la herramienta fundamental de todo estudiante, académico y científico así como investigador es la computadora, producto final (hasta ahora) de las matemáticas junto al desarrollo informático

OBJETIVO GENERAL

El alumno conocerá y aplicará las diferentes herramientas algebraicas aplicadas a la informática.

ESTRUCTURA GENERAL DE LA ASIGNATURA



"Aplicaciones"

UNIDAD 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

OBJETIVO PARTICULAR

El alumno identificara los diferentes elementos que intervienen en el planteamiento y solución de ecuaciones lineales

INTRODUCCIÓN

La importancia del algebra lineal para las aplicaciones se ha elevado en proporción directa al aumento del poder de las computadoras, cada nueva generación de equipo y programas de computo dispara una demanda de capacidades aun mayores .Por lo tanto, la ciencia de las computadoras esta sólidamente ligada al algebra lineal mediante el crecimiento explosivo de los procesamientos paralelos de datos y los cálculos a gran escala

Aplicación en Programación lineal. En la actualidad muchas decisiones administrativas, importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. Por ejemplo, la industria de las aerolíneas emplea programas lineales para crear los itinerarios de las tripulaciones de vuelo, monitorear las ubicaciones de los aviones, o planear los diversos programas de servicios de apoyo como mantenimiento, y operaciones en terminal.

Por tanto el álgebra lineal es una herramienta muy importante que utilizan los profesionales egresados de la Licenciatura en Informática. En este caso, el punto de vista de esta unidad se concreta a que el estudiante en Informática debe saber lo siguiente:

1. Tener una noción fundamental para definir y conceptualizar qué son los Sistemas de Ecuaciones Lineales.
2. Reconocer las diversas formas y los diferentes tipos de Sistemas de Ecuaciones Lineales
3. Reconocer los diferentes
4.
5. tipos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales
6. Utilizar los diferentes métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales con la finalidad de utilizarlos en distintas aplicaciones de los temas subsecuentes que comprenden la asignatura.

LO QUE SÉ

Dentro de tus estudios de formación básica de educación secundaria y de educación media superior; se te formula la siguiente pregunta: ¿Qué aprendiste cuando en la materia de Algebra; te enseñaron los métodos básicos para resolver un sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas; así cómo de tres incógnitas?

TEMARIO DETALLADO

(10 HORAS)

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

1.1.1 Concepto de ecuación Lineal

1.1.2 Ecuaciones lineales con 2 o mas incógnitas

1.1.3 Sistemas de m Ecuaciones en n incógnitas

1.1.4 Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan

1.1.5 Sistemas homogéneos

1.1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Concepto de ecuación lineal

Una gran cantidad de problemas que se presentan en las ciencias naturales, en las ciencias sociales así como en ingeniería y en ciencias físicas, tienen que ver con ecuaciones que relacionan dos conjuntos de variables.

Una ecuación del tipo que expresa la variable (variable independiente) en términos de la variable (variable dependiente) , se denomina **ecuación lineal.** El término lineal expresa que la grafica de la ecuación anterior es una línea recta.

Ejemplo:

$4x = 2y$

$-3x_1 + 9 = 12x_2$

$2x + 3y = 5$

Ecuaciones lineales con 2 o más incógnitas

De manera análoga existen muchas situaciones en las cuales se requiere relacionar mas de dos variables independientes con los cuales poder satisfacer infinidad de procesos y de esta manera obtener solución a diferentes actividades en algún área específica de una empresa.

En este caso la representación de ecuaciones con más de dos incógnitas es la siguiente:

Forma general de una ecuación en varias variables

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Ejemplo:

$3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5$ ó

$5z + 8w - 9k = 12$

Donde

son las incógnitas de la ecuación, las cuales encontramos a través de métodos algebraicos que estudiaremos más adelante.

Se sugiere revisar la graficación de sistemas de 2x2.

Sistemas de m Ecuaciones en n incógnitas

A un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas lo podemos representar como:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = Z_1 \ldots(1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = Z_2 \ldots(2) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = Z_m \ldots(m) \end{array}$$

Donde:

1, 2, 3,…, *m* son las ecuaciones

el numero de variables

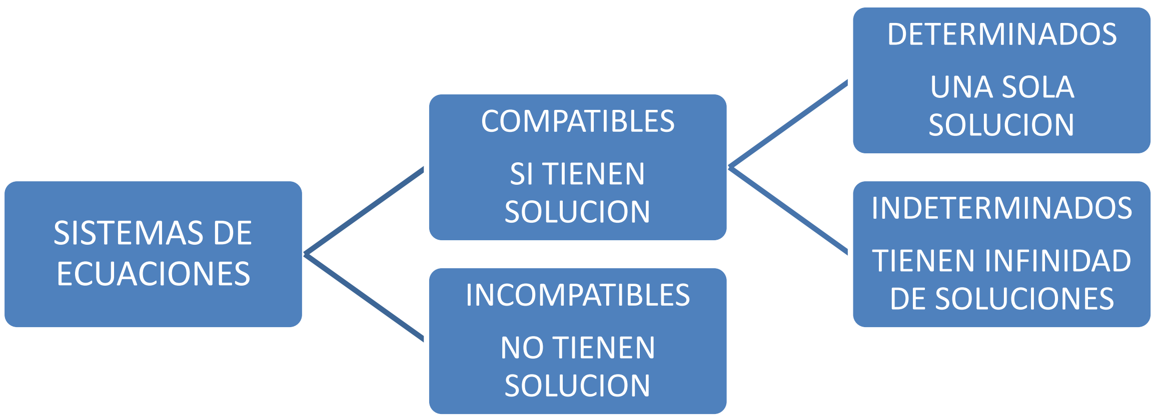
son los coeficientes de las variables.

son los términos independientes de las ecuaciones

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables de las ecuaciones.

el numero de variables y son los coeficientes de las variables.

TIPOS DE SOLUCION DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan

La eliminación Gauss-Jordan de un sistema de *m* ecuaciones y *n* incógnitas es una metodología que permite calcular los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n,$ para los cuales existe una solución del sistema de ecuaciones.

A un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas lo podemos representar como:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = Z_1 \ldots (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = Z_2 \ldots (2) \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = Z_m \ldots (m) \end{array}$$

Donde 1, 2, 3,…, *m* son las ecuaciones y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables de las ecuaciones.

El método Gauss-Jordan

El método de eliminación Gauss-Jordan consiste en representar primeramente el sistema de ecuaciones por medio de una matriz y obtener la matriz escalonada eliminando las incógnitas de una manera consecutiva, con el propósito de llegar a una matriz escalonada equivalente para obtener la solución de la ecuación, mediante la aplicación de tres operaciones principales.

Una matriz escalonada es de la forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recuerda las tres operaciones permitidas para este método:

1.- Intercambio de renglones
2.- Multiplicar un renglón por cualquier número real, diferente de cero 3.- Multiplicar un renglón por un número real y luego sumar con otro.

Nota: no es valido multiplicar o sumar entre columnas.

Ejemplo 1:

Determine si el siguiente sistema es consistente:

Solución:

Matriz aumentada:

Para obtener un pivote con x_1 en la primera ecuación, se intercambian las filas 1 y 2:

Para eliminar el termino 5 en la tercera ecuación, se multiplica la primera fila por -5/2 y se suma con la tercera:

Se acostumbra indicar con R:renglón, las operaciones realizadas pero no son obligatorias.

Tomando como pivote el renglón 2 multiplicar por -1/2 y sumar con la fila , para eliminar -1/2:

Tomando como pivote el renglón 2 multiplicar por 3 y sumar con el renglón 1 para eliminar -3:

Multiplicar el renglón 1 por ½ para obtener 1 en lugar de 2:

La ecuación $0x_1+0x_2+0x_3=5/2$ ó $0=5/2$ desde luego, como esta ecuación nunca es verdadera, el sistema original es inconsistente.

Solución: Sistema inconsistente, no hay solución que satisfaga las tres ecuaciones.

Ejemplo 2:

Solución:

Cambiar renglón 3 al lugar del 1

Sistemas homogéneos

Sistemas de ecuaciones homogéneos se representan como:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots +a_{1n}x_n =0 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots +a_{2n}x_n =0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=0
\end{array}
$$

En forma matricial se escribe como Ax=0

Todo sistema homogéneo tiene la solución trivial:

Pero puede tener soluciones diferentes a la trivial,

Por ello un sistema homogéneo siempre es homogéneo.

Ejemplo 3:

Obtener la solución del sistema homogéneo

RESUMEN DE LA UNIDAD

Hoy en día existen muchas situaciones en las cuales se requieren calcular valores para diferentes incógnitas que conforman los “Sistemas de Ecuaciones Lineales” a fin de que satisfagan al sistema. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales son generados de acuerdo las condiciones en que se dan variables experimentales de un problema o proceso en estudio. Para la obtención de estos valores existen diversas metodologías que permiten realizarlo y en esta variedad de metodologías es donde tiene su mayor importancia del “Algebra Lineal”.

Además las empresas requieren hacer uso muy frecuente de estas metodologías; dado que está conformada por diversas áreas funcionales en donde se toman de manera constante decisiones que forman parte del desarrollo y crecimiento a las diversas expectativas que esta persigue a través de los objetivos que se traza en un momento futuro.

GLOSARIO

Consistente:	**Indica que un sistema de ecuaciones lineales si tiene solución.**
Compatible:	**Indica que un sistema de ecuaciones lineales si tiene solución, es equivalente a consistente.**
Incompatible:	**Indica que un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.**
Coeficiente:	**Es el valor numérico que acompaña a una literal o letra llamada variable.**

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Resuelve el siguiente sistema

$X - 3Y = 4$
$2X + Y = 2$

Usando el método de:

a) Igualación
b) Sustitución
c) Eliminación
d) Grafico

ACTIVIDAD 1

Resuelve las siguientes ecuaciones lineales señalando la respuesta correcta de las opciones que se te presentan.

1. $x - 4y + 2w + (1/2)z = 5$

a. (-3, -1, 2, 0)

b. (3, -1,

0, 1)

c. (3, 1, -2, 1)

d. (3, 2, 0, -2)

e. (3, -2, 1, 1)

2 x – 4y + 2w + (1/2)z = 5

a. (-3, -1, 2, 1/2)

b. (3/2, -1, 0, 1/2)

c. (3, 1/2, -2, 1/2)

d. (3/2, 2, 1/2, -2)

e. (3/2, -1, -1, 3)

3.- 2x + y - 3z = 12

5x - 4y + 7z = 27

10x + 3y – z = 40

a. x = 4.5, y = 1, z = 1

b. x = 4.5, y = 0, z= -2

c. x= 5, y = -4, z = -2

d. x = 0, y = 4.5, z = 3

e. x = 5, y = 4, z = 2

4) $x + y + z = 4$

$2x - 3y + 5z = -5$

$3x + 4y + 7z = 10$

a. x = 4, y = 1, z = 1

b. x = 4, y = 0, z = -1

c. x= 3, y = 4, z = 0

d. x = 0, y = 4, z = -1

e. x = 3, y = 2, z = -1

5.- Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Sistemas de Ecuaciones Lineales Compatibles Indeterminados, por el Método de Gauss-Jordan.

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$

Si $x_2 = a = -2$

a. $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = -3$

b. $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 3$

c. $x_1 = -4, x_2 = -2, x_3 = -3$

d. $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 3$

e. $x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = 3$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1$

$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1$

$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -2$

Si $x_2 = a = 1$; $x_3 = b = (1/3)$

a. $x_1 = 8, x_2 = 1, x_3 = (1/3), x_4 = -(1/9)$

b. $x_1 = -8, x_2 = 1, x_3 = (1/3), x_4 = -(1/9)$

c. $x_1 = 8, x_2 = 1, x_3 = (1/3), x_4 = (1/9)$

d. $x_1 = -8, x_2 = -1, x_3 = (1/3), x_4 = -(1/9)$

e. $x_1 = 8, x_2 = -1, x_3 = -(1/3), x_4 = -(1/9)$

6.- Para cada uno de los siguientes Sistemas de Ecuaciones

Homogéneas, qué tipo solución admite el sistema en cada caso específico

x - 2y + 3z – 2w = 0

3x - 7y - 2z + 4w = 0

4x + 3y + 5z + 2w = 0

a. Solución Trivial

b. Solución No Trivial

x + y + z = 0

2x - 3y + 5z = 0

3x + 4y + 7z = 0

a. Solución Trivial

b. Solución No Trivial

CUESTIONARIO

DE REFORZAMIENTO

1. ¿Cómo es la ecuación de una línea recta en el plano xy?

2. Escribe la forma general de una ecuación lineal en varias variables.

3. Anota una ecuación lineal y menciona por qué es lineal.

4. ¿Qué se entiende por solución de una ecuación lineal?

5. ¿Qué significa resolver una ecuación?

6. ¿A qué se le llama sistema de ecuaciones?

7. ¿Cuándo un sistema es inconsistente? ¿Cuándo es consistente?

8. ¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones?

9. ¿Qué significa que un sistema está en forma triangular o forma escalonada?

LO QUE APRENDÍ

En esta unidad has aprendido el sistema de ecuaciones lineales, una forma de corroborarlo, es resolviendo los siguientes problemas:

1. La diferencia de dos números A y B es 14; además se tiene que un cuarto de su suma da como resultado 13. Determine los valores de dichos números.

a) A = 30; B = 19
b) A = 32, B = 17
c) A = 35, B = 16
d) A = 40, B = 17
e) A = 33, B = 19

2. Durante una aventura ecoturística un bote navega por un río recorre 15 km en un tiempo de una hora y media a favor de la corriente en la ida y luego 12 km en 2 horas contra la corriente en la vuelta. Determine la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.

a) Bote = 8; Río = 2
b) Bote = 7, Río = 1
c) Bote = 8, Río = 6
d) Bote = 4, Río = 7
e) Bote =3, Río = 1

3. Se tiene que la suma de tres números A, B y C es 160. Donde un cuarto de la suma del mayor y el mediano equivale al menor disminuido en 20, y si a un medio de la diferencia entre el mayor y el menor se suma el número de en medio, el resultado es 57.

a) A = 60; B = 49, C = 51
b) A = 52, B = 47, C = 43
c) A = 55, B = 46, C = 46
d) A = 62, B = 50, C = 48
e) A = 53, B = 49, C = 46

4. Hace 8 años la edad de J era el triple que la edad de P; y dentro de cuatro años la edad de J será los 5/9 de la edad de P. Determine los valores de las edades actuales de J y P. Se tiene que la suma de tres números A, B y C es 160.

a) J = 30; P = 19
b) J = 32, P = 14
c) J = 32, P = 16
d) J = 32, P = 20
e) J = 33, P = 19

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN

1.- Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas. Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan.

$2x + 3y = 9$

$4x + 2y = 18$

- a) $x = 4.5; y = 1$
- b) $x = 4.5; y = 0$
- c) $x = 0; y = 4$
- d) $x = 0; y = 4.5$
- e) $x = 5; y = 4$

2) Al resolver el sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas por el método de Gauss-Jordan, se obtiene:

$3x_1 + 2x_2 = 7$

$4x_1 – 2x_2 = 0$

- **a)** $x_1 = 1; x_2 = 0$
- **b)** $x_1 = 0; x_2 = 1$
- **c)** $x_1 = 2; x_2 = 0.5$
- **d.** $x_1 = -1; x_2 = 5$
- **e)** $x_1 = 0; x_2 = 3.5$

3) Al resolver el sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución, se obtiene:

$3x_1 + 4x_2 = 12$

$2x_1 – 2x_2 = 2$

- a. $x_1 = 0; \; x_2 = 10$ <>
- b. $x_1 = -10; x_2 = 10$
- c. $x_1 = -8; \; x_2 = 9$
- d. $x_1 = -9; x_2 = 8$
- e. $x_1 = 8; \; x_2 = 9$

4.- Resuelva el sistema de ecuaciones, utilizando el método de Gauss y elige la respuesta correcta:

$$\begin{aligned} 4x+8y+z&=2\\ x+7y-3z&=-14\\ 2x-3y+2z&=3 \end{aligned}$$

a) x=3, y=-1, z=-6

b) x=-3, y=1, z=6

c) x=-3, y=-1, z=-6

d) x=-3, y=-1, z=6

5.- Encuentre la solución general con el método de Gauss para el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x+3y-z&=0\\ -x+5y+2z&=0 \end{aligned}$$

Elija la respuesta correcta:

1. $\left(3w,-3w,w\right)$

2. $\left(\frac{1}{3}w,-3w,w\right)$

3. $\left(\frac{11}{13}w,-\frac{3}{13}w,w\right)$

4.

5. $\left(\frac{11}{5}w,-\frac{3}{5}w,w\right)$

6.- Cruceros Arco Iris cobra 800 dólares por adulto y 400 dólares por niño por un boleto de viaje redondo. Los registros muestran que cierto fin de semana , 1000 personas abordaron el crucero el sábado y 800 personas el domingo . Los ingresos totales del sábado fueron de $640,000 y $480,000 el domingo. ¿Cuántos adultos y niños abordaron el crucero esos días?

7.- Para el estreno de teatro se vendieron 1000 boletos. Los asientos de platea costaron $80, los de orquesta, $60, y los de galería , $50. El numero combinado de boletos vendidos para platea y orquesta excedían por 400 el doble de los boletos vendidos de galería. El total de ingresos para esa función fue de $62800. ¿Cuántos boletos se vendieron de cada uno?.

8.- Elige la respuesta correcta al siguiente problema
Se tiene 6 lb de café 5 lb de azúcar cuyo coste fue de 2.27 dólares y posteriormente 5lb de café y 4 de azúcar a los mismos precios costaron 1.88 dólares. Hallar el precio de cada libra de café y cada libra de azúcar.

a) café = 0.40; Azúcar = 0.08
b) café = 0.32; Azúcar = 0.07
c) café = 0.35; Azúcar = 0.06
d) café = 0.40; Azúcar = 0.07
e) café = 0.32; Azúcar = 0.06

9.- Una Compañía de artículos varios quiere producir 3 tipos de recuerdos : los tipos A, B y C. Para fabricar un recuerdo tipo A se necesitan dos minutos en la maquina I, un minuto en la maquina II y dos minutos en la maquina III; un recuerdo o souvenir tipo B, un minuto en la maquina I, tres minutos en la maquina II y uno en la III; y un recuerdo de tipo C, un minuto en la maquina I y dos minutos en cada una da las maquinas II y III. Hay tres horas disponibles en la maquina I, cinco horas disponibles en la maquina II y cuatro horas en la maquina III para procesar un pedido. ¿Cuántos recuerdos de cada tipo debe fabricar la compañía ahora utilizar todo el tiempo disponible?

MESOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

TITULO:	“Algebra Lineal”
AUTOR:	Bernard Kolman David
EDITORIAL:	Pearson. Prentice Hall, Octava Edicion
No. DE PAGINAS:	648

TITULO:	“Algebra Lineal” Una introducción Moderna
AUTOR:	David Poole
EDITORIAL:	Thomson, Primera Edicion, 2004
No. DE PAGINAS:	763

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

TITULO:	“Algebra Lineal”
AUTOR:	Bernard Kolman David
EDITORIAL:	Pearson. Prentice Hall, Octava Edicion
No. DE PAGINAS:	648

TITULO:	“Algebra Lineal” Una introducción Moderna
AUTOR:	David Poole
EDITORIAL:	Thomson, Primera Edicion, 2004
No. DE PAGINAS:	763

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

TITULO:	“Algebra Lineal” y sus aplicaciones
AUTOR:	David C. Lay
EDITORIAL:	Pearson Tercera Edición, 2004
No. DE PAGINAS:	492

SITIOS DE INTERÉS

http://www.es.wikipedia.org/wiki/algebra_lineal

http://www.vitutor.com/algebralineal.html

UNIDAD 2

Espacios Vectoriales

OBJETIVO ESPECIFICO

El alumno identificará los elementos y propiedades de los espacios vectoriales.

INTRODUCCIÓN

Los fundamentos matemáticos de la ingeniería de sistemas descansan sobre los espacios vectoriales y las funciones, en este capitulo se tratara la teoría de vectores en R^n y su relación con los espacios vectoriales. Por ejemplo los sistemas de control de una terminal aérea están basados en operaciones con vectores o matrices, existen muchas otras aplicaciones de los espacios vectoriales, en el mundo real. Para empezar el mundo en el que vivimos es un espacio vectorial, si queremos la posición de cualquier punto necesitamos coordenadas, o cambiar de base para obtener unas coordenadas mas sencillas. Cuando te miras a un espejo estás haciendo una simetría que no es más que una aplicación lineal. Cuando proyectas algo también tienes una aplicación lineal. Luego también aplicas cambios de base para diagonalizar matrices cuando quieres resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, y ese sería un ejemplo aplicable a infinidad de sistemas, ya que las ecuaciones diferenciales aparecen en todas partes.

En esta unidad, se iniciará con las definiciones básicas de vectores, distancia entre dos puntos, para después desarrollar el marco general de los espacios vectoriales conocerás y aplicara teorías de vectores y se adentrara a los espacios vectoriales, combinación lineal e independencia lineal

LO QUE SÉ

Retomando conocimientos previos, define con tus propias palabras el término vector y lo que sabes sobre las dimensiones vectoriales, responde también cuál es su utilidad.

Elabora tu definición en un procesador de textos y guárdala en tu computadora.

TEMARIO DETALLADO

(8 HORAS)

2.1 Vectores en el plano

2.2 El productor vectorial y las proyecciones en R^2

2.3 Vectores en el espacio

2.4 Subespacio vectorial

2.5 Combinaciones lineales

2.6 Independencia lineal

2.7 Bases y dimensión

2.1 Vectores en el plano

En muchas aplicaciones tratamos con cantidades mensurables, tales como la presión, la masa y la rapidez, que pueden describirse por completo mediante su magnitud. Por otro lado existen o tras cantidades mensurables, como la velocidad, la fuerza y la aceleración, para cuya descripción es necesario plantear no solo una magnitud sino también una dirección. Estas cantidades que deben indicar una dirección de denominan vectores. Los vectores se denotaran con una letra minúscula en negrita, **u,v,w,t,** z etc.

Los números reales se denominaran escalares (
o, p, t, r, s m etc.) letra cursiva en minúscula.

Para empezar nuestro estudio de espacios vectoriales necesitamos la definición de vector, el cual podemos definir como:

El segmento de recta dirigido de un punto U a otro punto V.

Sea UV el segmento o vector; se conoce a **U** como punto inicial y a **V** como punto terminal. Cualquier vector en el plano tiene las siguientes propiedades: magnitud, dirección y sentido.

1. La magnitud de cualquier vector *v* se define de la siguiente manera:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. La dirección se puede definir como el ángulo θ (respecto al eje *x*) de tal forma que si v= (a,b) y $0<\theta<2\pi$ entonces.

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

Sea a = (x,y) el cual representa una matriz de 2 x 1 de modo que :

a= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde *x* e *y* son números reales y se denominan componentes del vector.

3.- Los vectores en el plano tienen las siguientes características.

Sea a= $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y b= $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ a y b son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Se define la suma de vectores como

$$\mathbf{a+b=} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

4.- Si a= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa un vector y α es un escalar, entonces:

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{a=} \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}$$

Multiplicación por escalar

Ejemplo

Si a= $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ representa un vector y 3 es un escalar, entonces

$$\mathbf{3a=} \begin{bmatrix} 3(-5) \\ 3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Magnitud

Ejemplo

Si **u**=(2,-5), encuentra su magnitud y dirección.

Magnitud:

Direccion : que corresponde al cuarto cuadrante.

Ejemplo

Encuentra la distancia entre los puntos P(3,2) y Q(-1,5), o la longitud del segmento de recta dirigido

2.2 El productor vectorial y las proyecciones en R^2

Se define el producto vectorial entre *a* y *b* donde a = (x_1, y_1) y b = (x_2, y_2) como:

= $x_1x_2 + y_1y_2$, donde es un escalar.

Ejemplo:

Sean *x* y *z* dos vectores *x* = (1,2) y *z* = (3,4); entonces, su producto vectorial es:

(1,2) (3,4) = 1(3) + 2(4) = 3 + 8 = 11

Proyección de vectores:

Se define una proyección en R^2 entre ***a*** y ***b*** y, considerándolos como dos vectores diferentes de cero, entonces la proyección de *a* sobre *b* es un vector que se define como:

Donde se cumple que:

1. La $proy_b a$ es paralela a **b**

2. La diferencia **a** - Proy$_b$**a** es ortogonal a **b**

3. **a**=(**b**-Proy$_b$**a**) + Proy$_b$**a**

Ejemplo:

Calcular la $proy_b a$ considerando los vectores a=(1,2) y b=(2,3)

Calculamos a b=(1,2)(2,3)=1(2)+2(3)= 2 + 6 = 8

Al cuadrado, el término anterior es igual a 13.

=

Ejemplo:

Calcular el vector a-$proy_b a$ considerando los vectores a=(1,1) y b=(2,3)

Calculamos a b=(1,1)(2,3)=1(2)+1(3)= 2 + 3 = 5

Al cuadrado, el término anterior es igual a 13.

$\text{proy}_b a = —$ — — ;

— —— — —

2.3 Vectores en el espacio

Los vectores en el espacio son todas las ternas ordenadas de números reales, es decir,

R^3 = (x,y,z) x,y,z

Así pues, un vector en el espacio es:

$a = (a_1, a_2, a_3)$ $b = (b_1\ b_2, b_3)$

y cumple con las siguientes propiedades:

1. $a + b$ es único y $a + b \in R^3$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $0 + a = a$, donde $0 = (0,0,0)$
4. $-a + a = 0$ donde $-a = (-a_1, -a_2, -a_3)$
5. $a + b = b + a$
6. αa es único y $\alpha a \in R3$
7. $\alpha\ (a+b) = \alpha a + \alpha b$
8. $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$
9. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
10. $a = a$

Donde la **magnitud** de cualquier vector será:

Y la distancia entre dos puntos a y b estará representada por:

Angulo entre vectores:

Como en R^2, también podemos encontrar en el espacio el ángulo entre dos vectores a=(x_1, y_1, z_1) y b=(x_2, y_2, z_2) de la siguiente manera:

)

Vectores en tres dimensiones

Si $\mathbf{u_1}$= (4, 5, 1) y $\mathbf{u_2}$= (2,3,0) Determine:

a) $\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}$

b) $2\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2}$

El Ángulo que forman los Vectores A = (3, 0, 1) y B = (6, 0, 0) es igual a:

2.4. Sub-espacio Vectorial

Iniciaremos definiendo qué es un espacio vectorial.

Un espacio vectorial es un **conjunto de vectores** ($V_1, V_2 \ldots V_n$) que cumplen con las siguientes propiedades:

Si *x* y *w* son dos vectores de un espacio vectorial V, entonces existen operaciones *x* + *y* tal que:

1. x + w= w+x.
2. x+ (w+t)=(x+w)+t.
3. Existe un único elemento 0, tal que x+0=0+x=x.
4. Para cada *x* existe un *w,* tal que x+w=w+x=0.
5. Si *k* es cualquier número real, entonces k (x+w)=kx+kw.
6. Si *k* y *d* son dos números reales, entonces (k+d)x=kx+dx.
7. Si *k* y *d* son dos números reales, entonces k(dx)=(kd)x. Existe un número 1, tal que 1 (x)= x. [2]

Ejemplo:

Sean x=(1,2), w=(1,1), t=(0,1) y números reales k=2 y d=3

1. x+w=w+x (1,2)+(1,1) =(1+1, 2+1) =(1+1,1+2) = (1,1)+(1,2)
2. x+(w+t)=(x+w)+t (1,2)+{(1,1)+(0,1)} = (1,2)+{(1+0, 1+1)} ={1+1+0, 2+1+1} = {(1,2)+(1,1)}+(0,1) = {(1+1, 2+1)}+(0,1) = {1+1+0, 2+1+1}
3. x+0=0+x=x (1,2)+(0,0)=(1+0, 2+0) =(1, 2)
4. x+w=w+x=0 (1,2)+(-1,-2) = (1-1, 2-2) = (-1+1,-2+2) = (0,0)
5. k (x+w)=kx+kw 2{(1,2)+(1,1)} =2{(1+1,2+1)} = {2(1)+2(1), 2(2)+2(1)} = {2(1),2(2))+(2(1),2(1)} = 2(1,2)+2(1,1)
6. (k+d)x=kx+dx (2+3)(1,2) = {(2+3)(1),(2+3)(2)} = {2(1),2(2)+(3(1),3(2)} = 2(1,2)+3(1,2)
7. k(dx)=(kd)x 2{3(1,2)} = 2{3(1),3(2)} = {2(3)(1),2(3)(2)} = {(2)(3)}(1,2) = {(2)(3)(1), (2)(3)(2)}
8. 1 (x)= x 1x=1(1,2)=((1)1,(1)2)= (1,2)

Un sub-espacio vectorial de V, si S es un subconjunto de V y en sí, es un espacio vectorial respecto a la adición y multiplicación definidas en V. Además, deberá cumplir las siguientes condiciones:

$$\forall\, u, v \in S: u+v \in S$$
$$\forall\, \alpha \in k,\ v \in S: \alpha v \in S$$

Ejemplo:

Determine los "Sub-espacios Vectoriales" dados los "Espacios Vectoriales" siguientes:

1. Sea V el Espacio Vectorial R^3. Entonces, el conjunto W formado por los vectores cuya tercera componente es cero, es el siguiente sub-espacio:

Respuesta:

W = { (a, b, 0) : a, b $\in$R }

2.- Sea V el conjunto de todos los polinomios $a_0 + a_1t + a_2t^2$ + ----.-- + a_nt^n con coeficientes a_i, en un cuerpo K en R; entonces, el conjunto W formado por los polinomios menor o igual que *n* está dado por el sub-espacio siguiente:

Respuesta:

W = { Polinomios <= n: para un n fijo }

2.5. Combinaciones Lineales

Un vector es una combinación lineal de los vectores $V_1, V_2 \dots V_n$ y puede ser expresado de la forma:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

Donde $a_1, a_2 \dots a_n$ son escalares.

Ejemplo:

Se tienen dos vectores cualesquiera (2,-1,0) y (3,8,8), y escalares 4 y 6, respectivamente.

Entonces, la combinación se representa por la suma de los vectores multiplicados por sus respectivos escalares.

4(2,-1,0) + 6(3,8,8) = (8,-4,0) + (18,48,48) = (26,44,48)

Sea V un espacio vectorial sobre *k*, y sea

$$G = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

Un conjunto de vectores de V. Se dice que G es un generador de V si para todo vector $x \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, tales que

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

El espacio generado es el conjunto de combinaciones lineales de $V_1, V_2 \ldots V_m$, es decir,

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} = \{ v{:}v = a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_mv_m\}$$

Ejemplo.

Sean {(1,2), (3,4), (6,7)} un conjunto de vectores y 2, 3 y 6 tres escalares, respectivamente.

Entonces, si existe una *x* tal que

x= 2 (1,2) + 3 (3,4) + 6 (6,7)

entonces es un generador de V

x= (2,4) + (9,12) + (36,42) = (2+9+36, 4+12+42) = (47,58)

2.6. Independencia Lineal

Un conjunto de vectores V_1, V_2, V_3 y V_n es linealmente independiente si existen escalares c_1, c_2, c_3 y c_n que una combinación lineal de dichos vectores con los anteriores escalares, respectivamente; si esta última operación da cero y los escalares son todos iguales a cero, entonces se trata de una combinación lineal, linealmente independiente.

1. Independencia Lineal: Sea $S = \{ v_1, v_2, v_3 \ldots. v_n\}$ un conjunto de "Vectores", entonces: i) S es linealmente independiente si la igualdad $$a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n = 0$$ Sólo se satisface con $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$
2.- Dependencia lineal: Sea $S = \{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$ un conjunto de "Vectores", entonces: S es linealmente dependiente si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$, no todos iguales a cero, tales que: $$a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n = 0$$
Nota: 1. Todo conjunto que contiene al vector 0 es linealmente dependiente. 2. Si S es un conjunto linealmente independiente entonces cualquier subconjunto de S es linealmente independiente.

2.7. Bases y Dimensión

Un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial V si:

i) Genera a V

ii) Es linealmente independiente

Si B = { $V_1, V_2 \ldots \; V_n$} es una base de V, entonces cualquier otra base de dicho espacio está formada por *n* vectores, es decir, dos bases cualesquiera de V tienen igual número de vectores.

DIMENSIÓN

Si B = { $V_1, V_2 \ldots \; V_n$} es una base de V, se dice que V es de dimensión *n*, es decir, es el número de elementos en una base de V.

Si V es un espacio vectorial de dimensión *n*, cualquier conjunto linealmente independiente formado por *n* Vectores de V es una base de dicho espacio.

Si V es un espacio vectorial de dimensión *n* y S es un sub-espacio de V, entonces:

dimS $\leq$ n

por lo que, si dimS=n, entonces S = V.

Ejemplo:

Sean *a* y *b* dos vectores que generan a R^2, *a* = (1,2) y *b* = (1,3), entonces consideremos a todos los vectores del espacio vectorial como x=(x, y), y escalares a_1 y b_1.

$$X=a_1\ a + b_1\ b = a_1\ (1,2) + b_1\ (1,3) = (\ a_1 + b_1,\ \ 2\ a_1 + 3b_1) = (x,y)$$

$$b_1 = y-2x$$
$$a_1 = 3x-y$$

Como *x* e *y* pueden tomar cualquier valor, los vectores *a* y *b* generan R^2 y su dimensión es igual al número de vectores, y como son 2, su dimensión es dos.

RESUMEN DE LA UNIDAD

En forma cotidiana podemos definir al “Vector” como una cantidad que tiene: “Magnitud”, Dirección” y “Sentido”; y esto se debe a partir de conceptos físicos cuya descripción se refiere a algo más que un número. Los conceptos físicos han encontrado una adecuada representación geométrica los cuales pueden ser caracterizados y manejados analíticamente mediante parejas o ternas ordenadas de números.

En muchas ramas de las “Matemáticas” se presentan frecuentemente conjuntos, con elementos de muy distinta naturaleza donde se emplea con frecuencia el concepto de “Combinación Lineal”. Estos conjuntos con las leyes de la adición y la multiplicación por un escalar definidas en forma usual, tienen en común un gran número de propiedades algebraicas la cual se conoce como “Espacio Vectorial”.

De manera general, a los elementos de un “Espacio Vectorial” se les llama “Vectores” y en toda la unidad es el concepto básico y fundamental para poder desarrollarlo y aplicarlo.

GLOSARIO

Mensurable	Una variable con características medibles
Escalar	Cantidad numérica o numero real
Vector	Herramienta geométrica utilizada para representar una magnitud física del cual depende únicamente un módulo y dirección
Espacio Vectorial	Estructura matemática creada a partir de un conjunto no vacío con una operación suma interna al conjunto

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Para los siguientes ejercicios determine si es "Linealmente Independiente" o es "Linealmente Dependiente" de acuerdo a lo que se pide en cada uno de las siguientes afirmaciones:

1. El Conjunto de Vectores de R^3" B = {(1, 0, -2), (-4, 2, 0), (0, 2, -4)} es Linealmente Independiente o Linealmente Dependiente.

- a. Linealmente Independiente
- b. Linealmente Dependiente

2. El Conjunto de Vectores de R^3" A = {(1, 2, 1), (3, 1, 5)} es Linealmente Independiente o Linealmente Dependiente.

- a. Linealmente Independiente
- b. Linealmente Dependiente

3. El Conjunto de Vectores de R^{3}" B = {(1, 2, 1), (3, 1, 5), (3, -4, 7)} es Linealmente Independiente o Linealmente Dependiente.

a. Linealmente Independiente

b. Linealmente Dependiente

4. El Conjunto de Vectores de R^{3}" C = {(0, 0, 0), (1, 1, 1)} es Linealmente Independiente o Linealmente Dependiente.

a. Linealmente Independiente

b. Linealmente Dependiente

ACTIVIDAD 2

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. El Conjunto de Vectores de R^3 B = {(1, -2, -3), (3, 2, 1)}, entonces su dimensión es:

a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

e. 5

2. El Conjunto de Vectores de R^3 A = {(0, 1, -2), (1, -1, 1); (1, 2, 1)}, entonces su dimensión es:

- a. 3
- b. 1
- c. 2
- d. 4
- e. 5-

ACTIVIDAD 3

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. considérense los Vectores a = (3, 0) y b = (4, 1), y los Escalares 2 y 4, respectivamente; entonces, un Generador del conjunto de V es: (22, -4).

- a. Sí
- b. No

2. Considérense los Vectores a = (3, 0, 1) y b = (4, 1, 2), y los Escalares 2 y 4, respectivamente; entonces, un Generador del conjunto de V es: (22, 4, 10)

- a. Sí
- b. No

3.- Probar si el conjunto de vectores u =(-2,3,-3), v =(3,-1,9) w =(3,5,10) es una base de R^3.

ACTIVIDAD 4

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. El Conjunto de Vectores de R^3 B = {(1, -2, -3), (3, 2, 1)}, entonces su dimensión es:

a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

e. 5

2. El Conjunto de Vectores de R^3 A = {(0, 1, -2), (1, -1, 1); (1, 2, 1)}, entonces su dimensión es:

a. 3

b. 1

c. 2

d. 4

e. 5-

ACTIVIDAD 5

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. Considere los Vectores a = (3, 0) y b = (4, 1), y los Escalares 2 y 4, respectivamente; entonces, un Generador del conjunto de V es: (22, -4).

- a. Sí
- b. No

2.- Considérense los Vectores a = (3, 0, 1) y b = (4, 1, 2), y los Escalares 2 y 4, respectivamente; entonces, un Generador del conjunto de V es: (22, 4,

- a. Sí
- b. No

ACTIVIDAD 6

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1.- Considérense los Vectores a = (3, 0, -2) y b = (4, 1, -1); entonces, la Combinación Lineal de a y b está dada por el Vector c = -a + 2b; por lo tanto, es: (5, 2, 0)

- a. Sí
- b. No

2. Considérense los Vectores a = (3, 0) y b = (4, 1), y los Escalares 2 y 4, respectivamente; entonces, un Generador del conjunto de V es: (22, -4).

a. Sí

b. No

3.- Considérense los Vectores a = (3, 0, 1) y b = (4, 1, 2), y los Escalares 2 y 4, respectivamente; entonces, un Generador del conjunto de V es: (22, 4, 10)

a. Sí

b. No

4.- Considérense los Vectores a = (3, 0, -2) y b = (4, 1, -1), entonces la Combinación Lineal de a y b está dada por el Vector c = a + 2b; por lo tanto, es: (11, -2, 4)

a. Sí

b. No

5.- Considérense los Vectores a = (3, 0, -2) y b = (4, 1, -1), entonces la Combinación Lineal de a y b está dada por el Vector c = 2a + 2b; por lo tanto, es: (14, 2, -6)

a. Sí

b. No

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

Contesta las siguientes preguntas:

1. Explica el concepto de vector.
2. ¿Qué es el producto vectorial?
3. Explica con un ejemplo a qué valor se llega cuando los vectores son paralelos al aplicar el producto cruz.
4. ¿Qué es la proyección *a* en dirección *b*?
5. ¿En qué consiste la última propiedad de los espacios vectoriales?
6. ¿Qué es la dimensión de un espacio vectorial?
7. ¿Qué es un espacio vectorial?
8. ¿Qué es un sub-espacio vectorial?
9. ¿Qué es la independencia lineal?
10. ¿Qué es la dependencia lineal?

LO QUE APRENDÍ

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1. En el siguiente caso: sean los “Vectores” a = (-5, 8) y b = (1, 1); determinar la Comp. Esc.$_b$ a y la Comp. Vect. $_b$ a.

a) Comp. Esc. $_b$ a = ½; Comp. Vect. $_b$ a = (1/2, ½).
b) Comp. Esc. $_b$ a = 3/√2; Comp. Vect. $_b$ a = (3/2, 3/2).
c) Comp. Esc. $_b$ a = ½; Comp. Vect. $_b$ a = (1/2, 3/2).
d) Comp. Esc. $_b$ a =1/√2; Comp. Vect. $_b$ a = (1/2, ½).
e) Comp. Esc. $_b$ a = 1/3; Comp. Vect. $_b$ a = (1/2, ½).

2. El Ángulo entre dos “Vectores” es de 120 o. Si │a│= 3 y │b│= 4. Calcular: a ▪ a; a ▪ b y b ▪ b.

a) a ▪ a = -2; a ▪ b = 3; b ▪ b = 10.
b) a ▪ a = 6; a ▪ b = -3; b ▪ b = 17.
c) a ▪ a = -5; a ▪ b = 3; b ▪ b = 14.
d) a ▪ a = -2; a ▪ b = 9; b ▪ b = 15.
e) a ▪ a = -6; a ▪ b = 9; b ▪ b = 16.

3. En el siguiente caso: sean los “Vectores” a = (1, 2, -3) y b = (0, 0, 1); determinar la Comp. Esc.$_b$ a y la Comp. Vect. $_b$ a.

a) Comp. Esc. $_b$ a = 4; Comp. Vect. $_b$ a = (0, 4, 4).
b) Comp. Esc. $_b$ a = 2; Comp. Vect. $_b$ a = (0, 2, 2).
c) Comp. Esc. $_b$ a = 5; Comp. Vect. $_b$ a = (1, 2, 5).
d) Comp. Esc. $_b$ a = -3; Comp. Vect. $_b$ a = (0, 0, -3).
e) Comp. Esc. $_b$ a = -2; Comp. Vect. $_b$ a = (0, 0, -2).

4. Un “Vector” c tiene como módulo 52 y es perpendicular común a los “Vectores” a = 4i + 3j y b = -4i + 6j + k; entonces las componentes de dicho “Vector” son:

a) c = -12i -16j + 48 k.
b) c = -12i -17j + 47 k.
c) c = -13i -16j + 47 k.
d) c = -12i -17j + 48 k.
e) c = -12i +16j + 48 k.

5. Usando el "Producto Vectorial" son paralelos los "Vectores" a = 3i – j – 2k y b = -9i + 3j + 6k.

a) Si son paralelos.
b) No son paralelos.

6. Determina si el "Conjunto A"; donde A = {(1, y) | y $\in$ R} es un "Subespacio" del "espacio Vectorial" R^2.

a) Si.
b) No.

7. Del siguiente "Conjunto" A = {(1, -3, 2), (2, 4, 1), (3, 1, 3), (1, 1, 1)}; una Base de R^3 es:

a) B = {(1, 6, 5); (2, -4, 5); (3, -2, 0)}.
b) B = {(1, 2, 5); (2, 4, 5); (3, 2, 0)}.
c) B = {(1, 3, 5); (2, 4, 1); (3, 2, 0)}.
d) B = {(1, -3, 2); (2, 4, 1); (1, 1, 1)}.
e) B = {(1, -4, 5); (2, 4, 5); (1, 1, 1)}.

8. Para qué valor de k el "Vector" u = (1, k, 5) de R^3. será una "Combinación Lineal" de los "Vectores" v = (1, -3, 2) y w = 2, -1, 1):

a) k = 6.
b) k = -8.
c) k = -3.
d) k = -7.
e) k = 5.

9. Sea S = {$ax^3 + 2ax^2 + 3bx + b$ | a, b $\in$ R}; un "Espacio Vectorial" sobre el campo de los "Números Reales". Determinar una Base y la Dimensión de dicho "Espacio Vectorial":

a) B = {(x^2 + 2x), (3x - 1)}; Dim (S) = 2.
b) B = {(x^3 +2x^2), (3x - 1)}; Dim (S) = 2.
c) B = {(x^3 - 2x^2), (3x + 1)}; Dim (S) = 2.
d) B = {(x^2 +2x), (3x + 1)}; Dim (S) = 2.
e) B = {(x^3 +2x^2), (3x + 1)}; Dim (S) = 2.

10. Considera a $G = \{(1, t^2, t)\}$; como una Base del "Espacio Vectorial" $P = \{at^2 + bt + c \mid a, b, c \in R\}$ definido sobre R. Entonces el "Vector de Coordenadas" de $p(t) = 3t^2 + 2$ en la Base G es:

a) p(G) = (2, 1, 1).
b) p(G) = (2, 0, 1).
c) p(G) = (2, 3, 0).
d) p(G) = (2, 3, 1).
e) p(G) = (2, 1, 1).

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 1

Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas.

Para los siguientes casos determinen la “Magnitud” de los siguientes “Vectores en el Plano”.

1) Sea el “Vector” A = (1,5); entonces su “Magnitud” es:

- a) $2\sqrt{12}$
- b) $\sqrt{24}$
- c) $\sqrt{26}$
- d) $2\sqrt{13}$
- e) 26

2) Sea el “Vector” B = (1,-7); entonces su “Magnitud” es:

- a) $7\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{47}$
- c) $5\sqrt{3}$
- d) $\sqrt{48}$
- e) $5\sqrt{2}$

3) Sean los “Vectores” C = (2,3); D = (6, 7); y E = (7, 5). Los cuales los lados de un “Triangulo”; entonces la “Magnitud” de cada “vector” es:

- a) C =$\sqrt{29}$; D =$\sqrt{116}$; E = $\sqrt{145}$
- b) C =$\sqrt{28}$; D =$\sqrt{117}$; E = $\sqrt{145}$
- c) C =$\sqrt{27}$; D =$\sqrt{119}$; E = $\sqrt{146}$
- d) C =$\sqrt{30}$; D =$\sqrt{120}$; E = $\sqrt{148}$
- e) C =$\sqrt{31}$; D =$\sqrt{125}$; E = $\sqrt{150}$

4) Determine si los “Vectores” del “Reactivo 3” conforman un “Triangulo Rectángulo”:

- a) si
- b) no

5) Sea el “Vector” F = (-9, 8); entonces su “Magnitud” es:

- a) 14
- b) 12
- c) 11
- d) 10
- e) 13

6) El “Ángulo” que forman los “Vectores” A = (3, 0, 1) y B = (6, -2, 0); es igual a:

- *a.* θ = ang cos (9/10).
- *b.* θ = ang cos (9/11).
- *c.* θ = ang cos (9/12).
- *d.* θ = ang cos (9/13).
- *e.* θ = ang cos (9/14).

7) Sean los Vectores A = (2, 3, 6) y B = (-4, -2, -3), entonces la Proyección de A sobre B es igual a:

- a. $-32/\sqrt{29}$
- b. $-31/\sqrt{28}$
- c. $-33/\sqrt{29}$
- d. $-34/\sqrt{27}$
- e. $-32/\sqrt{26}$

8) Un conjunto no vacío U de un Espacio Vectorial V sobre F es un Sub-espacio de V si, y sólo si U es cerrado con respecto a la multiplicación escalar y a la adición vectorial definidas sobre V.

- a. Sí
- b. No

9) En el Espacio Vectorial V3 (R) sobre R, sean U generado por A = (1, 2, -1) y B = (2, -3, 2) y W generado C = (4, 1, 3) y D = (-3, 1, 2). ¿Son U y W idénticos sub-espacios de V?

- a. Sí
- b. No

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 2

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

1) El Conjunto de Vectores de R^3 A = {(1, -2, 3), (3, -6, 9)}, entonces su dimensión es:

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. 4
- e. 5

2) El Conjunto de Vectores de R^3 B = {(1, -2, -3), (3, 2, 1)}, entonces su dimensión es:

- a. 1
- b. 2
- c. 3
- d. 4
- e. 5

3) Conjunto de Vectores de R^3 $A = \{(0, 1, -2), (1, -1, 1); (1, 2, 1)\}$, entonces su dimensión es:

- a. 3
- b. 1
- c. 2
- d. 4
- e. 5-

MESOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

TITULO:	“Algebra Lineal”
AUTOR:	Bernard Kolman David
EDITORIAL:	Pearson. Prentice Hall, Octava Edicion
No. DE PAGINAS:	648

TITULO:	“Algebra Lineal” Una introducción Moderna
AUTOR:	David Poole
EDITORIAL:	Thomson, Primera Edicion, 2004
No. DE PAGINAS:	763

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

TITULO:	"Algebra Lineal" y sus aplicaciones
AUTOR:	David C. Lay
EDITORIAL:	Pearson Tercera Edición, 2004
No. DE PAGINAS:	492

SITIOS DE INTERÉS

http://www.es.wikipedia.org/wiki/algebra_lineal

http://depa.fquim.unam.mx/~jesusht/cvvalineal.pdf

http://www.matematicasbachiller.com/temario/algebra/index.html

UNIDAD 3

Transformaciones Lineales

OBJETIVO ESPECIFICO

El alumno conocerá los elementos, propiedades y la representación matricial de las transformaciones lineales

INTRODUCCIÓN

En la vida actual es muy importante resolver problemas utilizando las matemáticas.

Cuando se trabaja con espacios vectoriales surgen situaciones en las cuales es de utilidad usar las transformaciones lineales para la solución de problemas, una parte importante es la representación matricial de una transformación lineal.

Aplicaciones de las Transformaciones Lineales

Se aplican en sistemas de ecuaciones lineales, en matrices y en un sin número de problemas, gracias a las transformaciones lineales sabemos el dominio e imagen y teniendo esto saber si es un espacio vectorial.

LO QUE SÉ

Define sin recurrir a ninguna referencia el término “Transformación lineal”, posteriormente consulta textos en los que puedas enriquecer tu conceptualización, puedes usar la bibliografía recomendada para la materia.

TEMARIO DETALLADO

(8 HORAS)

3.1 Definición y ejemplos

3.2 Propiedades: imagen y Kernel

3.3 Representación matricial de una transformación lineal

3.4 Isomorfismos

DESARROLLO DE LA UNIDAD

En diversas ramas de las Matemáticas, la Física y las distintas Ciencias Sociales; se utilizan con frecuencia modelos que emplean en su estructura funciones vectoriales de variable vectorial; es decir, funciones de la forma w = f (v); donde w y v son “Vectores”. A tales funciones se denomina usualmente “Transformaciones”.

Por consiguiente esta unidad se refiere a una clase especial de “Transformaciones”; llamadas “Transformaciones Lineales”; las cuales son las más simples y también las de mayor aplicación.

En la práctica profesional, muchos problemas que involucran “Transformaciones” de tipo general suelen resolverse aproximando éstas a las “Transformaciones Lineales”

3.1. Definición y ejemplos

Desarrollo

A continuación se tiene una simbología utilizada que se utilizará en las transformaciones lineales:

Una letra minúscula a, b,…… representa un “Vector”.

Una letra mayúscula A, B… un “Espacio Vectorial” y también “Sub-espacios Vectoriales”.

“Vectores” entre llaves {a, b…} una “Base Generadora”.

Representa una “Transformación Lineal” con su dominio y contra dominio “T: V→W”.

Representa la “Dimensión” de un “Espacio Vectorial” dim (V).

Transformación Lineal

Sean V y W espacios vectoriales. Una transformación lineal L de V en W es una función que asigna a cada vector **u** en V un único vector L(**u**) en W tal que :

a) L(**u+v**) =L(**u**)+L(**v**) cualesquiera sean **u** y **v** en V.
b) L(k**u**) = k L(**u**), para cada **u** en V y cada escalar K

Ejemplo 1:

Definamos la función T: $R^3 \Rightarrow R^2$ definida bajo la regla T(*x, y, z*) = (*x, y*) así se tiene que:

Se sustituye la *x* por el 8 y la *y* por el 5.

T (8, 5, 9) = (8,5)

Ejemplo

Sea T: $R^3 \Rightarrow R^2$ definida por:

Del lado de la derecha de la igualdad, primero se sustituye la z por 2 y enseguida la z multiplicada por 2.

T (x, y, z) = (z, 2z), entonces cualquier transformación sería: **(2, 1, 4) = (4, 8)**

Una transformación es lineal si cumple:

i. T (v1 + v2) = T(v1) + T(v2)

ii. (αv1) = αT(v1)

Propiedades de las transformaciones lineales:

- Si T: R $\Rightarrow$ S es una transformación lineal, entonces, T(0) = 0
- Sea T: R $\Rightarrow$ S una transformación lineal. Si C = $\{$r1, r2… rn$\}$ es una base de R, entonces el conjunto G = $\{$T(r1), T(r2)… T(rn)$\}$ es un generador.

2.2 Propiedades: Imagen y Kernel

Propiedades de las transformaciones lineales: ***imagen y núcleo.***

Consideremos en primer lugar a la transformación de R^3 en R^2, definida por:

$$\mathbf{S\ (x,\ y,\ z) = (y,\ 3y)}$$

La imagen de cualquier vector bajo esta transformación es una pareja ordenada cuya segunda coordenada es el triple de la primera. Al conjunto de todos esos vectores se le conoce como "imagen" de la transformación S.

Una vez definida la imagen de una transformación, nos introduciremos a la definición de núcleo.

Se llama núcleo de una transformación al conjunto de vectores cuya imagen es el vector cero.

3.3 Representación matricial de una transformación lineal

La representación matricial de una transformación lineal nos indica la relación existente entre ambas para que una transformación lineal encontrar su representación matricial.

Consideremos la transformación T: R^3 a R^2 definida por:

T(x, y, z) = (x+2y, 3x-z)

Tratemos de encontrar una matriz A tal que el producto de ésta por cualquier vector del dominio nos proporcione la imagen de dicho vector bajo la transformación T, es decir, una matriz A que cumpla,

Av = T(v)

Como v es un vector de R^3 y T(v) es un vector de R^2 la igualdad anterior sólo podrá lograrse mediante una matriz A de 2x3. En consecuencia, la matriz a tendrá la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{bmatrix}$$

y satisfacer la igualdad

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a221 & a22 & a23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & + & 2y \\ 3x & - & z \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = x + 2y \quad \text{y} \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 3x - z$$

lo cual es válido para los valores

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = 0$$
$$a_{21} = 3,\ a_{22} = 0,\ a_{23} = -1$$

por lo que nuestra matriz A es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A esta matriz se le conoce como matriz asociada a la transformación T.

Una vez calculada nuestra matriz asociada, estudiemos las imágenes de los vectores de la base canónica, es decir,

$$R = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

bajo la transformación T definida con anterioridad tenemos que:

T(1, 0, 0) = (1, 3)
T(0, 1, 0) = (2, 0)
T (0, 0, 1) = (0, -1)

Éstos elementos no son más que los vectores columna que integran la matriz asociada T, por lo cual, podemos concluir que, para obtener la matriz asociada a una transformación basta con calcular las imágenes de los vectores que integran la base canónica del dominio.

Para toda transformación lineal de R_n en R_m, existe una matriz a de mxn que cumple Tx = Ax para toda $x \in R_n$.

Definición. Sea T: $R_n \to R_m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única A de **mxn** tal que **Tx = Ax** para toda x.

Ejemplos de Aplicaciones de las Transformaciones Lineales

1. **Una casa editora publica un libro en tres ediciones diferentes: cubierta dura, cubierta blanda y cubierta de lujo. Cada libro requiere cierta cantidad de papel y de material para la cubierta. Los requisitos están dados en gramos por la siguiente matriz:**

	Cubierta dura	Cubierta blanda	Cubierta de Lujo
Papel	300	500	800
Material para la cubierta	40	50	60

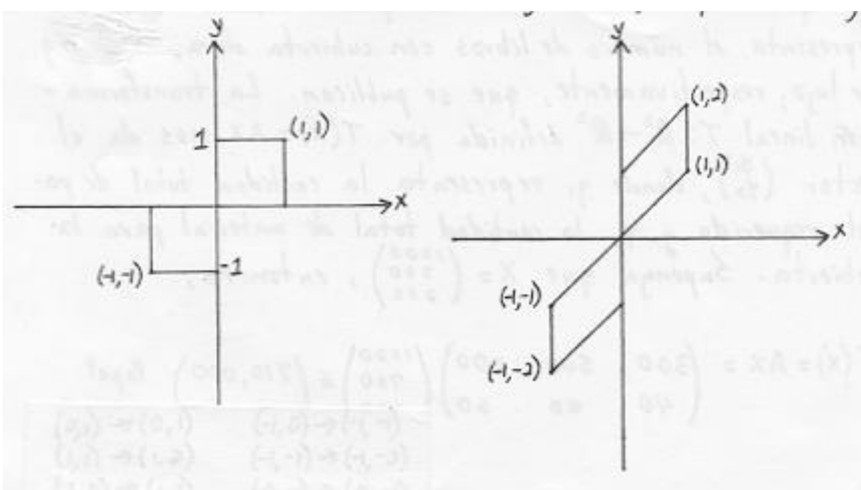
Deja que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ **represente el vector producción, donde x_1, x_2, x_3 representan el número de libros con cubierta dura, cubierta blanda y cubierta de lujo respectivamente, que se publican. La transformación lineal T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por T(x)**

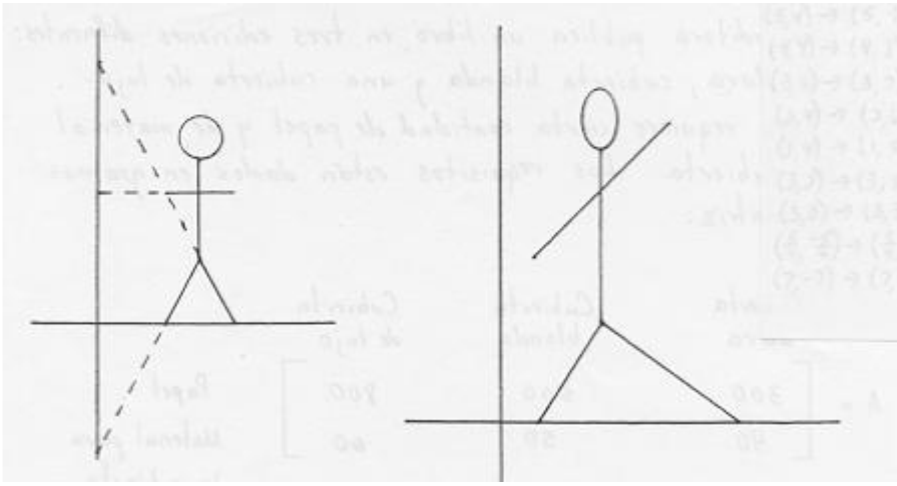
= Ax nos da el vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$**, donde** y_1 **representa la cantidad total de papel requerido y** y_2 **la cantidad de material para la cubierta. Suponga que** $x = \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix}$**, entonces,**

$$T(x) = Ax = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810{,}000 \\ 87{,}000 \end{pmatrix}$$

Por lo que se requiere 810,000 gramos en papel y 87,000 gramos en material para la cubierta.

2. **¿Puede una transformación lineal cambiar un dibujo por otro? Observa como la transformación T;** $R^2 \rightarrow R^2$ **definida por T(x, y) = (x, x+y) cambia los siguientes dibujos:**





3.4. Isomorfismo

Para introducirnos en el estudio de los isomorfismos debemos tener claras algunas definiciones que se presentan a continuación.

Definición. Sea T: V $\Rightarrow$ W una transformación lineal, se dice que T es uno a uno (notación 1 - 1) si ocurre:

$$Tv_1 = Tv_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

Es decir, si todo vector w en la imagen de T es de a lo sumo un vector en V.

Definición. Sea T: V $\Rightarrow$ W una transformación lineal. Se dice que T es sobre, si para toda w $\in$W existe al menos una v $\in$V tal que Tv = w. Es decir, T es sobre:

Si y sólo si la imagen de T = W.

Para dejar aún más claros estos conceptos, tomemos en cuenta la siguiente definición.

Sea T: V $\Rightarrow$ W una transformación lineal, supongamos que dimV = dimW = n, entonces

1. si T es 1 - 1, entonces T es sobre
2. si T es sobre, entonces T es 1 - 1.

Se dice que la transformación lineal T: V $\Rightarrow$ W es un isomorfismo si T es 1 - 1 y es sobre dos espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. (notación V $\cong$W).

Ejemplo: Sea **T:** R^3 $\Rightarrow$ **P2** definida por $\mathbf{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mathbf{= a+bx+cx^2.}$ Supongamos que $\mathbf{T}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mathbf{= 0 = 0+0x+0x^2}.$ Entonces **a = b = c = 0.** Es decir, núcleo de T = 0 y t es 1 - 1.

RESUMEN DE LA UNIDAD

En diversas ramas de las Matemáticas, la Física y las distintas Ciencias Sociales; se utilizan con frecuencia modelos que emplean en su estructura funciones vectoriales de variable vectorial; es decir, funciones de la forma w = f (v); donde w y v son “Vectores”. A tales funciones se denomina usualmente “Transformaciones”.

Por consiguiente esta unidad se refirió a una clase especial de “Transformaciones”; llamadas “Transformaciones Lineales”; las cuales son las más simples y también las de mayor aplicación.

En la práctica profesional, muchos problemas que involucran “Transformaciones” de tipo general suelen resolverse aproximando éstas a las “Transformaciones Lineales”.

GLOSARIO

KERNEL	Nucleo
ISOMORFISMO	De la palabra griega iso (lo mismo), y morfos (de la palabra griega forma.
SUBESPACIO	Subconjunto de un espacio vectorial, que debe cumplir ciertas características específicas.
MATRIZ	Una tabla bidimensional de números consistente en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas, una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

Para cada uno de los siguientes casos seleccionar la solución correspondiente de a cuerdo a lo que se pide en cada uno:

1) En “Geometría Analítica Plana” la conocida rotación de ejes de un ángulo α es una “Transformación Lineal” de V2(R) en sí mismo. Esta relación es:

$$T: (x, y) \rightarrow (x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha,\ x\,\mathrm{sen} + y\cos\alpha)$$

- a. Sí
- b. No

2) Sea la siguiente Transformación T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por T(x, y) = ($|x|$, y). Es “Lineal” o es “No Lineal”:

- a. Lineal
- b. No Lineal

3) Sea la siguiente Transformación T: $R^3 \rightarrow R^3$ definida por T(x, y, z) = (2x, y+z, 0). Es “Lineal” o es “No Lineal”:

- a. Lineal
- b. No Lineal

4) Sea la siguiente Transformación S: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por S(x, y) = (y, x^2). Es “Lineal” o es “No Lineal”:

- a. Lineal
- b. No Lineal

5) Sea la siguiente Transformación S: $R^3 \rightarrow R^3$ definida por S(x, y, z) = (-x, y, 1). Es “Lineal” o es “No Lineal”:

- a. Lineal
- b. No Lineal

ACTIVIDAD 2

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas, una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

Para cada uno de los siguientes casos seleccionar la solución correspondiente de acuerdo a lo que se pide en cada uno:

1) Sea la siguiente Transformación Lineal T: $R^3 \rightarrow R^3$ definida por T(x, y, z) = (2x, y+z, 0). Determinar el "Recorrido" y su "Dimensión Correspondiente".

- a. $T(R^3) = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$; Dim $T(R^3) = 2$.
- b. $T(R^3) = \{(-x, y, 0) \mid x, y \in R\}$; Dim $T(R^3) = 2$.
- c. $T(R^3) = \{(x, 0, z) \mid x, z \in R\}$; Dim $T(R^3) = 2$.
- d. $T(R^3) = \{(-x, -y, 0) \mid x, y \in R\}$; Dim $T(R^3) = 2$.
- e. $T(R^3) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in R\}$; Dim $T(R^3) = 2$.

2) Sea la siguiente Transformación Lineal S: $R^3 \rightarrow R^3$ definida por S(x, y, z) = (x+2y-z, y+3z, -x-y+4z). Determinar su "Recorrido" y su "Dimensión Correspondiente".

- a. $S(R^3) = \{(x, -y, -z) \mid x, y, z \in R\}$; Dim $S(R^3) = 2$.
- b. $S(R^3) = \{(x, y, -z) \mid x, y, z \in R\}$; Dim $S(R^3) = 2$.
- c. $S(R^3) = \{(-x, y, y-z) \mid x, y, z \in R\}$; Dim $S(R^3) = 2$.
- d. $S(R^3) = \{(x, -y, y-z) \mid x, y, z \in R\}$; Dim $S(R^3) = 2$.
- e. $S(R^3) = \{(x, y, y-z) \mid x, y, z \in R\}$; Dim $S(R^3) = 2$.

3) Sea la siguiente "transformación Lineal" que comprende el siguiente "Espacio Vectorial" V = {ax2 + bx + c │a = b, a, c є R}. Aplíquese el

"Operador Derivada" (d/dx) sobre los elementos de V y Determine el "Recorrido" y su "Dimensión Correspondiente".

a. $T(V) = \{(-2ax - a) \mid a \in R\}$; $\text{Dim } T(V) = 1$.
b. $T(V) = \{(-ax + a) \mid a \in R\}$; $\text{Dim } T(V) = 1$.
c. $T(V) = \{(ax - a) \mid a \in R\}$; $\text{Dim } T(V) = 1$.
d. b) $T(V) = \{(2ax + a) \mid a \in R\}$; $\text{Dim } T(V) = 1$.
e. $T(V) = \{(2ax - a) \mid a \in R\}$; $\text{Dim } T(V) = 1$.

4) Sea la siguiente "Transformación Lineal" $S: R^3 \rightarrow R^2$ definida por $S(x, y, z) = (y, 3y)$. Determine el "Recorrido" y su "Dimensión Correspondiente".

a. $S(R^3) = \{(3y, -3y) \mid y \in R\}$; $\text{Dim } S(R^3) = 2$.
b. $S(R^3) = \{(-y, -3y) \mid y \in R\}$; $\text{Dim } S(R^3) = 2$.
c. $S(R^3) = \{(3y, 3y) \mid y \in R\}$; $\text{Dim } S(R^3) = 2$.
d. $S(R^3) = \{(y, 3y) \mid y \in R\}$; $\text{Dim } S(R^3) = 2$.
e. $S(R^3) = \{(-y, 3y) \mid y \in R\}$; $\text{Dim } S(R^3) = 2$.

5) Sea la siguiente "Transformación Lineal" $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por $T(x, y, z) = (x, y)$. Determine el "Recorrido" y su "Dimensión Correspondiente".

a. $T(R^3) = \{(x, 0) \mid x \in R\}$; $\text{Dim } T(R^3) = 2$.
b. $T(R^3) = \{(0, -y) \mid y \in R\}$; $\text{Dim } T(R^3) = 2$.
c. $T(R^3) = \{(-x, -y) \mid x, y \in R\}$; $\text{Dim } T(R^3) = 2$.
d. $T(R^3) = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$; $\text{Dim } T(R^3) = 2$.
e. $T(R^3) = \{(-x, y) \mid x, y \in R\}$; $\text{Dim } T(R^3) = 2$.

ACTIVIDAD 3

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas, una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

Para cada uno de los siguientes casos seleccionar la solución correspondiente de acuerdo a lo que se pide en cada uno:

1) Considérese a resolver la siguiente "Ecuación Matricial" $2BAX - 2CX = D$; donde las "Matrices" A, B, C y D son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces la "Matriz X" vale:

a. $X = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

b. $X = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

c. $X = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

d. $X = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

e. $X = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

2) Sean $B = \{b_1, b_2\}$ y $E = \{e_1, e_2\}$ dos Bases de R^2; relacionadas por: $b_1 = e_1 + 2e_2$ y $b_2 = -e_1 + e_2$ y sea la “Transformación Lineal” S: $R_2 \to R^2$ tal que $S(e_1) = b_1$ y $S(e_2) = b_2$. Entonces las “Matrices” $M_B{}^E(S)$ y $M_E{}^B(S)$ son:

a. $M_B{}^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} M_E{}^B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

b. $M_B{}^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M_E{}^B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

c. $M_B{}^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} M_E{}^B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

d. $M_B{}^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} M_E{}^B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

e. $M_B{}^E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} M_E{}^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

3) La “Matriz Asociada” a una “Transformación Lineal” T: $R^3 \to R^4$ es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces la “Regla de Correspondencia” de dicha “Transformación Lineal” es:

a. T(x, y, z) = {x-4y, y+x, 2x-2y+z, y-z}.

b. T(x, y, z) = {x+4y, y-x, 2x+2y+z, y+z}.

c. T(x, y, z) = {x+4y, y-x, 2x-2y+z, y-z}.

d. T(x, y, z   = {x-4y, y-x, 2x-2y+z, y+z}.

e. T(x, y, z) = {x+4y, y+x, 2x-2y+z, y-z}.

4) De acuerdo a la información proporcionada en el "Reactivo 3"; las "Dimensiones del Núcleo y el Recorrido" son:

- a. Dim T(R3) = 3; Dim N(T) = 1.
- b. Dim T(R3) = 4; Dim N(T) = 2.
- c. Dim T(R3) = 4; Dim N(T) = 1.
- d. Dim T(R3) = 3; Dim N(T) = 0.
- e. Dim T(R3) = 4; Dim N(T) = 1.

ACTIVIDAD 4

A1) Sea la siguiente Transformación T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por T (1, 0) = (0, -2). Es "Lineal" o es "No Lineal":

- a) Lineal
- b) No lineal

2) Sea la siguiente Transformación T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por T(1, 0) = (0, -3). Es "Lineal" o es "No Lineal":

- a) Lineal
- b) No lineal

3) De acuerdo a la "Transformación Lineal" T: V → W definida en el "Reactivo 3", si seleccionamos las siguientes "Bases" para V y W: A = {x^2, x, 1} y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la "Matriz Asociada" a T es:

- a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ACTIVIDAD 5

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas, una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

Para cada uno de los siguientes casos definir el "Producto Interno"; que lo define es Falso o Verdadero:

1) El término "Isomorfismo" significa "Etimológicamente": "De Igual Forma".

a. Verdadero

b. Falso

2) En general la sustitución de los elementos de un "Conjunto A" por los elementos de un "Conjunto B" puede hacerse mediante la función f: A ↔ B.

a. Verdadero

b. Falso

3) Cuando la función f: A → B es biyectiva entonces los elementos de A y B se encuentran en relación uno a uno.

a. Verdadero

b. Falso

4) Los Grupos (Z, +) y (S, *), donde s 0 {1, -1, i, -i}; entonces la función f(m) = i^m; constituye un "Isomorfismo".

a. Verdadero

b. Falso

5) Un grupo constituido por el conjunto S de "Matrices Simétricas" de orden dos con elementos en R y el "Conjunto R^3 de las ternas ordenadas de

números reales; es isomorfo.

- a. Verdadero
- b. Falso

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO

Contesta las siguientes preguntas

1. ¿Cuál es el concepto transformación lineal?
2. ¿Qué es un isomorfismo?
3. ¿Qué es el kernel de una transformación lineal?
4. ¿Qué es el núcleo de una transformación lineal?
5. Describe un ejemplo de una matriz que represente una transformación lineal.

LO QUE APRENDÍ

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Para cada uno de los siguientes casos definir el "Producto Interno"; que lo define es Falso o Verdadero:

1. Considera el "Espacio Vectorial" V sobre R formado por las "Matrices de Orden 3". Si se define la "Transformación" T: V → R donde T (A) = det (A) para todo A є V. Entonces la "Transformación" es:

a)Lineal.

b) No Lineal.

2. Para la "Transformación Lineal" T: V → V donde V = {$ax^2 + bx + c$ | a, b, c є R}. Además se conoce que: $T(2x^2 + 5x) = 3x^2$; $T(x^2 – 1) = -x^2 – 1$; T(4) = 4. Entonces la "regla de Asociación de T es:
   a) $T(ax^2 + bx + c) = -(a + b)x^2 + c$
   b) $T(ax^2 + bx + c) = (a + b)x^2 + c$
   c) $T(ax^2 + bx + c) = (-a + b)x^2 + c$
   d) $T(ax^2 + bx + c) = (a - b)x^2 + c$
   e) $T(ax^2 + bx + c) = -(a - b)x^2 + c$

3. En el "Espacio C^2" donde C^2 = {(x, y) │ x, y є C} definido sobre el campo de los números reales, y la "Transformación Lineal" T: $C^2 \to C^2$ definida por: T(a + bi, c + di) = (a+ di, c + bi) para todo a, b, c, d є R. Entonces la "Matriz Asociada" a la "Transformación T referida a la "Base" B = {(2, 0), (1 – i, 0), (i, -2), (1, 2i +4)} es:

a)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1.25} & \mathbf{-1.25} & \mathbf{2.50} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2.5} & \mathbf{0.5} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1.25 & -1.25 & 2.50 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1.25 & -1.25 & 2.50 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1.25 & -1.25 & 2.50 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1.25 & -1.25 & 2.50 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$

4. Para la "Transformación Lineal" T: P → P donde P = {$ax^2 + bx + c$ | a, b, c ϵ R} y definida por: T (f) = f´ + f para todo f ϵ P. Entonces la "Transformación Inversa de T" es:
   a) $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (-2a + b)x + (2a + b + c)$
   b) $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (-2a + b)x + (-2a – b + c)$
   c) $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (-2a - b)x + (2a – b + c)$
   d) $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (2a + b)x + (2a – b + c)$
   e) $T^{-1}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + (-2a + b)x + (2a – b + c)$

5. Sea (S, ◘, ◙) un anillo, donde S = {(a, b) │ a, b ϵ Q} y (a, b) ◘ (c, d) = (a + c, b + d) para todo (a, b), (c, d) ϵ S; así como (a, b) ◙ (c, d) = (ac, bd). Y sea (E, +, ▪) otro anillo donde E = {a + b√2 │ a, b ϵ Q}, donde **(+) y (▪)**

son la adición y la multiplicación comunes para números reales, respectivamente. Entonces la función biyectiva $f: S \rightarrow E$ definida por $f(a, b) = b + a\sqrt{2}$ para todo $(a, b) \in S$ es un isomorfismo.

a) SI
b) NO

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 1

Para cada uno de los siguientes casos seleccionar la solución correspondiente de acuerdo a lo que se pide en cada uno:

1) Considérese la "Transformación Lineal" T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida por T(x, y, z) = {x+2y, 3x-z}. Entonces el valor de la "Matriz A" tal que el producto de esta por cualquier "vector" del dominio proporcione la imagen de dicho "Vector" bajo la "Transformación Lineal" {Av =T(v)} es:

- a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2) Sea la "Transformación Lineal" S: $R^3 \rightarrow R^3$ la cual está definida por: S(x, y, z) = {3x+y, 6x-z, 2y+z} y considerando las imágenes de la Base Canónica. Entonces el valor de la "Matriz Asociada" M(S) correspondiente es:

❍ a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

3) Sea el "Espacio Vectorial" V = {$ax^2 + bx + c$ | a, b, c є R} de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor que tres y el "Espacio Vectorial" definido por:

$$W = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \textbf{donde a, b, c є R}$$

Entonces la "Transformación Lineal" T: V → W; está definida por:

❍ a) $\begin{bmatrix} 2a + c & 3b \\ 4b & 2a + 2c \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} a+c & 3b \\ 4b & 2a+2c \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} a+c & 4b \\ 4b & 2a+2c \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} a+c & 4b \\ 3b & 2a+2c \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} a+c & 3b \\ 3b & 2a+2c \end{bmatrix}$

4) De acuerdo a la “Transformación Lineal” T: V → W definida en el “Reactivo 3”, si seleccionamos las siguientes “Bases” para V y W: A = {x^2, x, 1} y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la “Matriz Asociada” a T es:

❍ a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5) De acuerdo a la “Matriz Asociada de T” obtenida en el “Reactivo 4” si se requiere utilizarla para obtener la imagen del “Vector” $V = 3x^2 – 2x + 4$; entonces esta es:

❍ a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} -7 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$

MESOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

TITULO:	**“Algebra Lineal”**
AUTOR:	Bernard Kolman David
EDITORIAL:	Pearson. Prentice Hall, Octava Edicion
No. DE PAGINAS:	648

TITULO:	**“Algebra Lineal” Una introducción Moderna**
AUTOR:	David Poole
EDITORIAL:	Thomson, Primera Edicion, 2004
No. DE PAGINAS:	763

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

TITULO:	"Algebra Lineal" y sus aplicaciones
AUTOR:	David C. Lay
EDITORIAL:	Pearson Tercera Edición, 2004
No. DE PAGINAS:	492

SITIOS DE INTERÉS

http://depa.fquim.unam.mx/~jesusht/cvvalineal.pdf

UNIDAD 4

Producto interno

OBJETIVO ESPECÍFICO

El alumno conocerá las diferentes aplicaciones del producto interno.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día, la solución de problemas utilizando las matemáticas se realiza cada vez con más frecuencia. Por lo tanto, el uso de los conceptos de Producto Interno y Ortogonalidad para la solución de problemas, comprende una herramienta más eficiente para la solución de problemas reales.

LO QUE SÉ

Define el término Ortogonalidad y compártelo con tus compañeros, no olvides citar las referencias a las que recurras.

TEMARIO DETALLADO

(10 HORAS)

4.1. Ortogonalidad

4.2. Aplicaciones del producto interno

4.1 Ortogonalidad

Empezamos por definir Ortogonalidad, la cual se refiere a vectores perpendiculares, y Ortonormalidad, que se refiere a vectores perpendiculares y que tengan norma o longitud igual a uno.

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

Es una metodología que utiliza gran parte de los conceptos vistos en los temas 1, 2 y 3 del Álgebra Lineal, que permite calcular una nueva base de vectores a partir de la cual es más fácil realizar cálculos sobre estos vectores.

Nos sirve para obtener un conjunto de vectores que sea una base S de una base espacio vectorial V, tal que S sea Ortonormal, es decir Ortogonal y con una norma igual a uno. Sea V un Espacio Vectorial con Producto Interno y sea $G=\{v_1,...v_n\}$ un generador de V. El conjunto $G0=\{w_1,...w_n\}$, donde:

$$w_1 = v_1$$

$$w_i=v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(vi.wk)}{(wk.wk)} w_k, \text{ para } i=2,3,...,n$$

es un generador de V.

Observaciones

- Si G es una base de V, entonces Go es una base ortogonal de V.
- Para obtener una base Ortonormal a partir de una base Ortogonal $B=\{w_1,..w_r\}$, bastará con multiplicar cada uno de los vectores $(w_i \text{ con } i=1,n)$, e B por el escalar $\frac{1}{\|wi\|}$

Una base Ortonormal es un conjunto de vectores que forman una base, éstos son ortogonales con una norma igual a uno.

Ejemplo:

Obtengamos una base Ortonormal del espacio V generado por:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 0, -1) \\ v_2 &= (-2, 1, 1) \\ v_3 &= (-1, 1, 0), \end{aligned}$$

Primero obtendremos un generador ortogonal de dicho espacio, para ello hacemos:

$w_1 = v_1 = (1, 0, -1)$

$w_2 = v_2 - \frac{v2.w1}{w1.w1} w_1 = (-2, 1, 1) - \frac{-3}{2} (1, 0, -1) = (2, 1, 1)$

$\frac{-3}{2}$ (1, 0, -1)= (-2, 1, 1) –(-3/2,0,3/2)=(-2+3/2,1-0,1-3/2)=(-1/2,0,-1/2)=1/-2(1,0,1)

$w3=v3- \frac{v3.w1}{w1.w1}$ w1 = (-1, 1, 0) - $\frac{-1}{2}$ (1, 0, -1) = -1,1, 0)+1/2(1,0.,1)=

(-1,1,0)+(1/2,0,1/2)=(-1+1/2,1+0,0+1/2)=(-1/2,1,1/2)

Por lo tanto:

Go = $\{$**(1, 0, -1), (**$\frac{-1}{2}$**, 0,** $\frac{-1}{2}$**), (**$\frac{-1}{2}$**, 1,** $\frac{1}{2}$**)**$\}$ **Es un generador "Ortogonal" de V y el conjunto**

4.2. Aplicaciones del producto interno

Producto interno de dos vectores

Supóngase para R^3 el producto interno entre dos vectores

a= $\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \end{pmatrix}$ **b=** $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$ es representado como a b y está dado por:

$$\mathbf{a.b=a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.}$$

Generalizando:

a= $\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ \vdots \\ an \end{pmatrix}$ **b=** $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bn \end{pmatrix}$ $\mathbf{a.b= a_1b_1 + a_2b_2+ .... +a_nb_n}$

El producto interno es llamado también *producto punto* o *producto escalar*. Se puede ver que el producto interno entre dos vectores siempre tendrá como resultado un escalar, es decir, un número.

El producto interno frecuentemente se efectúa entre un vector renglón y un vector columna.

Ejemplo:

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c= (1, 2,4)

c.d= 1(1)+2(2)+4(1) = 1 + 4 + 4 = 9

RESUMEN DE LA UNIDAD

Como se ha visto a lo largo del curso, los elementos fundamentales que constituyen un Espacio Vectorial son los siguientes:

a) Un conjunto de Vectores
b) Un conjunto de escalares
c) Dos operaciones que son la adición y la multiplicación por un escalar

Por consiguiente, la definición del Espacio Vectorial, así como sus distintos Teoremas que se refieren a distintas Propiedades Algebraicas que aluden de manera concisa al comportamiento de Vectores y Escalares con respecto a las operaciones de la Adición y la Multiplicación.

También deben considerarse los conceptos métricos que son: la Magnitud, la Distancia y el Ángulo, los cuales pueden ser medidos sin ningún problema. Además de las nociones de Independencia Lineal, la Base y la Dimensión.

Ahora, con respecto al tema principal de la Unidad 4, existen diversas formas de introducir en un Espacio Vectorial dichos conceptos mencionados en los párrafos anteriores. Una de ellas consiste en definirlos a partir de una operación conocida como Producto Interno

GLOSARIO

ORTOGONALIDAD	Generalización de la noción geométrica de perpendicularidad
ORTONORMAL	Vector con un conjunto ortogonal y la norma de cada uno de sus vectores es igual a 1
PRODUCTO INTERNO	Operación definida sobre dos vectores de un espacio euclídeo cuyo resultado es un número o escalar.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas. Una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

1) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores: i = (1, 2, 3) y j = (3, 3, 3).

- a. 14
- b. 15
- c. 16
- d. 17
- e. 18

2) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores: i = (1, 2, 1) y j = (1, 2, 3).

- a. 8
- b. 10
- c. 11
- d. 12
- e. 13

3) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores: i = (2, 0, 3) y j

= (3, 1, 0).

- a. 4
- b. 5
- c. 6
- d. 7
- e. 3

4) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores: i = (2, 2, 2) y j = (3, 1, 2).

- a. 8
- b. 10
- c. 11
- d. 12
- e. 13

5) Encuentra el producto interno de los siguientes vectores: i = (2, 0, 1) y j = (2, 1, 1).

- a. 4
- b. 5
- c. 6
- d. 7
- e. 3

CUESTIONARIO DE REFORZAMIENTO.

Contesta las siguientes preguntas

1. ¿Qué significa producto interno?
2. ¿Con qué otro nombre se conoce al producto interno?
3. ¿En qué consiste el proceso de Grand Smith?
4. ¿Qué se obtiene en el proceso de Grand Smith?
5. Da un ejemplo de vectores ortogonales de dos dimensiones.
6. Da un ejemplo de vectores ortogonales de tres dimensiones.
7. Da un ejemplo de vectores ortonormales de dos dimensiones.
8. Explica con un ejemplo de vectores ortonormales de tres
9. Explica el concepto de ortogonalidad.
10. Define el concepto de ortonormalidad.

LO QUE APRENDÍ

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Aplicando el "Proceso de Gram-Schmidt" determine si la "Base Ortonormal" obtenida en cada uno de los casos es o no:

1. Sean los "Vectores" $v_1 = (1, 0, -1)$; $v_2 = (-2, 1, 1)$ y $v_3 = (-1, 1, 0)$. La "Base Ortonormal" es:

$B = \{ (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{6}, \sqrt{2/3}, -1/\sqrt{6}) \}$

a) SI
b) NO

Respuesta: b

2. Sean los "Vectores" $v_1 = (1, i, 0)$; $v_2 = (1, 2, 1 - i)$.

La "Base Ortonormal" es:

$B = \{ (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}, 1), ((1 + 2i)/18, (2 – i)/18, 0 \}$

a) SI
b) NO

Respuesta: b

3. Considérese la Base usual del "Espacio Euclidiano" de Dimensión en R^3:

$W = \{ e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)\}$

Entonces una Base Ortonormal es:

$W = \{ (e_1, e_2, e_3)$ de $R^3 \}$

a) SI
b) NO

Respuesta: a

4. El "Vector Unitario Ortonormal" a $v_1 = (1, 1, 2)$; $v_2 = (0, 1, 3)$ es:

$v = \{ 1/\sqrt{11}, -3/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11})$

a) SI
b) NO

Respuesta: a

5. Sean T_1: $R^2 \rightarrow R$ y T_2: $R^2 \rightarrow R$; definidas por $T_1(x, y) = x + 2y$ y $T_2(x, y) = 3x – y$.

Entonces $2T_1 - 5T_2$ es igual a:

$2T_1 – 5T_2 = -13x + 9y$

a) SI
b) NO

Respuesta: a

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 1

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas, una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

Aplicando el "Proceso de Gram-Schmidt" determine si la "Base Ortonormal" obtenida en cada uno de los casos es o no:

1. Sean los "Vectores" $v_1 = (1, 0, -1)$; $v_2 = (-2, 1, 1)$ y $v_3 = (-1, 1, 0)$. La "Base Ortonormal" es:

$$B = \{ (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{6}, \sqrt{2/3}, -1/\sqrt{6}) \}$$

   a) si
   b) no

2. Sean los "Vectores" $v_1 = (1, i, 0)$; $v_2 = (1, 2, 1 - i)$. La "Base Ortonormal" es:

$$B = \{ (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}, 1), ((1 + 2i)/18, (2 - i)/18, 0 \}$$

   a) si
   b) no

3. Considérese la Base usual del “Espacio Euclidiano” de Dimensión en R^3:

   EXW = { e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)}

   Entonces una Base Ortonormal es:

   W = { (e_1, e_2, e_3) de R^3 }

   a) si
   b) no

4. El “Vector Unitario Ortonormal” a v_1 = (1, 1, 2); v_2 = (0, 1, 3) es:

   v´ = { 1/11, -3/11, 1/11)

   a) si
   b) no

5. Los “Vectores” v_1 = (2, -5, 1) y v_2 = (-3, 0, 6) son “Ortogonales”.

   a) Si
   b) **No**

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 2

Aplicando el "Proceso de Gram-Schmidt" determine si la "Base Ortonormal" obtenida en cada uno de los casos es o no:

1) Sean los "Vectores" $v_1 = (1, 0, -1)$; $v_2 = (-2, 1, 1)$ y $v_3 = (-1, 1, 0)$. La "Base Ortonormal" es:

$$B = \{ (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{6}, \sqrt{2}/3, -1/\sqrt{6}) \}$$

- a) si
- b) No

2) Sean los "Vectores" $v_1 = (1, i, 0)$; $v_2 = (1, 2, 1 - i)$. La "Base Ortonormal" es:

$$B = \{ (1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2}, 1), ((1 + 2i)/18, (2 - i)/18, 0 \}$$

- a) si
- b) No

3) Considérese la Base usual del "Espacio Euclidiano" de Dimensión en R^3:

W = { e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)}

Entonces una Base Ortonormal es: W = { (e_1, e_2, e_3) de R^3 }

- a) si
- b) No

4) El "Vector Unitario Ortonormal" a v_1 = (1, 1, 2); v_2 = (0, 1, 3) es:

v´ = { 1/11, -3/11, 1/11)

- a)
- b) No

5) Los "Vectores" v_1 = (2, -5, 1) y v_2 = (-3, 0, 6) son "Ortogonales".

- a) si
- b) No

6) Encuentre el valor de "m" de tal forma que los "Vectores" a = (3, 1, 2) y b = (-2, m, 1) sean ortogonales.

- a) 2
- b) 5
- c) 4
- d) 6
- e) 1

7) Dos "Vectores" a y b son "Ortogonales" si y sólo si a · b = 0.

- a) si
- b) no

8) Encuentre el producto interno a · b de los siguientes vectores: a = (2, 1, 1) y b = (3, -1, -2).

- a) 3
- b) 5
- c) 4
- d) 6
- e) 7

9) Encuentre el producto interno a · c de los siguientes vectores: a = (2, 1, 1) y c = (-1, 4, 5).

- a) 8
- b) 9
- c) 11
- d) 6
- e) 12

10) Encuentre el producto interno 3b · 2c de los siguientes vectores: a = (2, 1, 1) y c = (-1, 4, 5)

- a) -104
- b) -102
- c) -103
- d) -106
- e) -107

MESOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

TITULO:	"Algebra Lineal"
AUTOR:	Bernard Kolman David
EDITORIAL:	Pearson. Prentice Hall, Octava Edicion
No. DE PAGINAS:	648

TITULO:	"Algebra Lineal" Una introducción Moderna
AUTOR:	David Poole
EDITORIAL:	Thomson, Primera Edicion, 2004
No. DE PAGINAS:	763

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

TITULO:	“Algebra Lineal” y sus aplicaciones
AUTOR:	David C. Lay
EDITORIAL:	Pearson Tercera Edición, 2004
No. DE PAGINAS:	492

SITIOS DE INTERÉS

http://depa.fquim.unam.mx/~jesusht/cvvalineal.pdf

UNIDAD 5

Matrices

OBJETIVO ESPECIFICO

El alumno identificara las propiedades de una matriz y realizara operaciones con matrices

INTRODUCCIÓN

Las matrices, aunque parezcan al principio objetos extraños, son una herramienta muy importante para expresar y discutir problemas que surgen en la vida real. En los negocios a menudo es necesario calcular y combinar ciertos costos y cantidades de productos. Las tablas son una forma de representar estos datos. Sin embargo, agrupar los datos en un rectángulo nos muestra una representación más clara y fácil **de los datos. Tal representación de los datos se denomina matriz.**

Otras aplicaciones de las matrices directamente relacionadas con el área informática es en el uso del internet, por ejemplo los motores de búsqueda para localización y recuperación de información en internet, utilizan matrices para seguir el rastro de las ubicaciones en donde esta se encuentra, el tipo de información que se haya en cada ubicación, las palabras clave que aparecen en ellas, e incluso la manera en que los sitios web se vinculan entre si con otros, utilizan matrices. En gran medida, la eficacia de Google, estriba en la manera en que utiliza las matrices para determinar cuales sitios están referenciados en otros sitios. Esto es, en lugar de mantener de manera directa el rastro del contenido de la información de una pagina Web real o de un tema de búsqueda individual, la estructura de la matriz de Google determina las paginas Web que coinciden con el tema de búsqueda, y luego presenta una lista de tales paginas en un orden de importancia . La teoría de matrices es ampliamente utilizada en la informática. Las bibliotecas gráficas como por ejemplo OpenGL se valen de transformaciones espaciales y de las matrices para representar gráficos 3D a 2D que luego se traducen a imagen en los monitores.

Las transformaciones en las que intervienen las matrices. Comenzaron éstas su aplicación en 1850 y se han aplicado a multitud de campos: álgebra, geometría, cálculo, informática, física, etc. Recientemente han alcanzado un desarrollo sorprendente en aplicaciones de animación: en definitiva, transformación de figuras en espacios de dos **y tres dimensiones.**

Teoría de graficas

La teoría de graficas es una área relativamente nueva de las matemáticas, que se utiliza ampliamente para formular modelos de muchos problemas informáticos, en los negocios, las ciencias sociales y las ciencias físicas, en estas graficas se involucra el concepto de grafo, que es una red de nodos y líneas, los cuales son representados por una matriz de adyacencia.

Son muchas las circunstancias, que se puedan describir usando matrices: suma de
matrices, multiplicación escalar, multiplicación de una matriz por un vector,
multiplicación de dos matrices. También podemos aplicar estos cálculos dentro de esta área matemática del algebra lineal en temas como sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales, transformaciones lineales, etc.

LO QUE SÉ

Anota lo que sabes sobre las “Determinantes”, así como algunas aplicaciones básicas como antecedentes básicos para el conocimiento de las “Matrices”

TEMARIO DETALLADO
(8 HORAS)

5. Matrices

5.1. Operaciones con Matrices

5.2. Inversa y traspuesta de una matriz cuadrada

DESARROLLO DE LA UNIDAD

5.1. Operaciones con matrices

Una matriz es un conjunto de renglones o columnas ordenadas de mxn, donde m es el número de renglones y n el número de columnas.

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix}$$

Un arreglo horizontal es [a11 a12 ..... a1n] y un arreglo vertical es

$$\begin{bmatrix} a11 \\ a21 \\ : \\ am1 \end{bmatrix}.$$

Dentro de las primeras operaciones tenemos las elementales, las cuales se llevan a cabo sobre los renglones o columnas de una matriz.

Las operaciones que se pueden ejecutar son las siguientes:

1. Suma y resta
2. Multiplicación por escalar
3. Multiplicación de matrices
4. Producto Cartesiano

1. Suma y Resta

Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix}$$

La suma estará representada por

$$A + B = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a11+b11 & a12+b12 & \dots & a1n+b1n \\ a21+b21 & a22+b22 & \dots & a2n+b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1+bm1 & am2+bm2 & \dots & amn+bmn \end{bmatrix}$$

Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Supóngase B, entonces la resta de matrices está representada por A-B.

Y la sustracción se lleva a cabo restando a cada uno de los elementos de la matriz A, cada uno de los elementos de la matriz B de su misma posición, de ambas matrices, y colocando el resultado en la matriz resultante y en la misma posición de los elementos restados.

Sean A y B las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix}$$

Y

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix}$$

La resta 3 se realiza de la siguiente manera

$$A - B = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a11-b11 & a12-b12 & \dots & a1n-b1n \\ a21-b21 & a22-b22 & \dots & a2n-b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1-bm1 & am2-bm2 & \dots & amn-bmn \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo la resta de las matrices A y B siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.Multiplicacion por escalar

Y La resta es igual a la Multiplicación por un escalar. Supóngase que se tiene una matriz A y un escalar k constante, entonces, la multiplicación de una matriz por un escalar se representa con kA. La multiplicación se lleva a cabo multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el escalar y el resultado se pone en la misma posición de la matriz resultante.

Sean A una matriz y k un escalar, entonces el producto escalar de la matriz sería:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ am1 & am2 & \dots & amn \end{bmatrix}$$

Y k el escalar

La multiplicación por un escalar se realiza de la siguiente manera: $$kA=\begin{bmatrix} ka11 & ka12 & \dots & ka1n \\ ka21 & ka22 & \dots & ka2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ kam1 & kam2 & \dots & kamn \end{bmatrix}$$
Ejemplo del cálculo de la resta de las matrices A y B es el siguiente: $$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Y el escalar 4. $$4A=\begin{bmatrix} 4(1) & 4(1) & 4(1) \\ 4(3) & 4(1) & 4(2) \\ 4(1) & 4(1) & 4(1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 12 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Multiplicación de Matrices

Supóngase que se tienen dos matrices A y B. Para poder realizar la multiplicación de estas dos matrices primero se debe comprobar que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de renglones de la matriz B.

Suponiendo que se tiene una matriz A con *n* renglones y *m* columnas, entonces la matriz B deberá tener *m* renglones y el número de columnas puede variar digamos *k*, entonces la matriz resultante será una matriz con *n* renglones y *k* columnas.

Sean A una matriz de nxm y B una matriz de mxk $$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1m \\ a21 & a22 & \dots & a2m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & an2 & \dots & anm \end{bmatrix}$$
Y $$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1k \\ b21 & b22 & \dots & b2k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmk \end{bmatrix}$$
La multiplicación de A por B se realiza de la siguiente manera: $$AxB = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1m \\ a21 & a22 & \dots & a2m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & an2 & \dots & anm \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1k \\ b21 & b22 & \dots & b2k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bm1 & bm2 & \dots & bmk \end{bmatrix} = \mathbf{A}$$ $$AxB = \begin{bmatrix} a11(b11) + a12(b21) + \dots . + a1m(bm1) & \dots . & \dots & a11(b1k) + a12(b2k) + \dots . + a1m(mk) \\ a21(b11) + a22(b21) + \dots . + a2m(bm1) & . & \dots & a21(b1k) + a22(b2k) + \dots . + a2m(bmk) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1(b11) + an2(b21) + \dots . + anm(bm1) & \dots & \dots & an1(1k) + an2(b2k) + \dots . + anm(bmk) \end{bmatrix}$$

Ejemplo del cálculo de la multiplicación de las matrices A y B que se muestran a continuación: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
La multiplicación se realiza de la siguiente manera: $AxB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(2)+1(2)+1(0) & 1(1)+1(1)+1(1) & 1(2)+1(2)+1(1) \\ 3(2)+1(2)+2(0) & 3(1)+1(1)+2(1) & 3(2)+1(2)+2(1) \\ 1(2)+1(2)+1(0) & 1(1)+1(1)+1(1) & 1(2)+1(2)+1(1) \end{bmatrix}$ **5** $AxB = \begin{bmatrix} 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1 \\ 6+2+0 & 3+1+2 & 6+2+2 \\ 2+2+0 & 1+1+1 & 2+2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 10 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ **M**

4. Producto Cartesiano

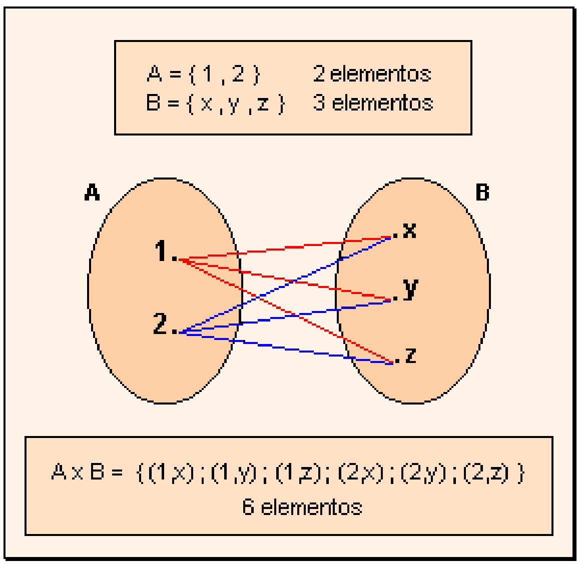
El producto cartesiano de dos conjuntos A x B es el conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar con un elemento perteneciente al conjunto A y un elemento del conjunto B.

A tiene **m** elementos
B tiene **n** elementos ⇒ **A x B** tiene **m x n** elementos

Los elementos de A x B son pares ordenados. Cada par que se forma con un elemento del conjunto A y uno del conjunto B, en ese orden y recibe el nombre de par ordenado. Sus elementos se colocan entre paréntesis, separados por coma.

$$\boxed{(x, y) \neq (y, x)}$$

Ejemplo n° 1:



Ejemplo n° 2:

Si *A* =*{1,2}* y *B* =*{-1,O,1}* entonces *A* x *B* ={(1,-1), (1,0), (1,1), (2,-1), (2,0), (2,1)}. *A* tiene 2 elementos, *B* tiene 3, y A x B tiene 2 x 3 = 6

Ejemplo 3:

Para los conjuntos A={2,5,9} y B={p,q}, el producto Cartesiano de estos dos conjuntos contendrá los siguientes elementos:

AxB = {(2,p),(2,q),(5,p),(5,q),(9,p),(9,q)}

Es muy importante darse cuenta de que, en general, el producto Cartesiano no es conmutativo. Algunas veces lo es, pero otras no. En el ejemplo mostrado, el producto Cartesiano BXA de los dos conjuntos citados será:

BxA = {(p,2),(p,5),(p,9),(q,2),(q,5),(q,9)}

Esta definición de producto Cartesiano se puede extender fácilmente al producto Cartesiano de más de dos conjuntos, tales como los productos Cartesianos AxBxC y RxIxQ

5.2. Inversa y traspuesta de una matriz cuadrada

La matriz inversa es de suma importancia en el Álgebra Lineal y su aplicación en el área administrativa.

El cálculo de la inversa se hará utilizando el método de Gauss-Jordan.

Este método requiere de los siguientes procesos para su obtención:

- Encontrar en el extremo izquierdo de la matriz, la columna que no esté integrada de únicamente ceros.
- De ser necesario, se intercambiará el renglón superior con otro cualquiera, con el propósito de que el elemento localizado cumpla con la condición del paso anterior.
- Si el elemento diferente de cero, encontrado en el proceso 1, es un valor cualquiera a, entonces se deberá multiplicar todo ese renglón por 1/a a efecto de que el primer elemento tome un valor de uno.
- A continuación se suma o resta, múltiplos apropiados del primer renglón a los demás renglones de tal manera que la columna encontrada en el proceso 1, todos los elementos por abajo del primer uno tengan un valor de cero.
- Descartar por el momento al primer renglón, y volver a aplicar el proceso inicial a la submatriz obtenida, iniciando con el proceso 1, hasta obtener una matriz unitaria.

- Empezando por el último renglón, se avanza hacia arriba, sumando múltiplos apropiados de cada renglón a los renglones que están arriba de ella, de tal manera que se cumpla la condición estipulada en el proceso 4, hasta obtener la forma reducida escalonada [3]

Ejemplo de la obtención de la inversa de una matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inicio del cálculo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como el valor del renglón uno columna uno es 1, se cumple con esa parte.

- El siguiente paso sería hacer cero el tres del segundo renglón y el uno del 3er renglón, ambos de la primera columna.

- Para hacer cero el tres, multiplicamos por -2 el primer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al segundo renglón de la misma matriz

[3] Véase, O. Pineda, (1998), *Álgebra Lineal: Un Enfoque Económico y Administrativo*, México, IPN

- Para hacer cero el uno, multiplicamos por -1 el primer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al tercer renglón de la misma matriz

- Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Quedando así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} A$$

Como el valor del renglón dos y columna dos es -1 y debe ser 1 se multiplica por -1.

Quedando como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como el valor del renglón dos y columna dos es uno, enseguida hay que hacer el uno del renglón uno y columna dos y -1 del renglón tres y columna dos.

- El siguiente paso sería hacer cero el uno del primer renglón de la columna dos, para ello al renglón uno se le resta el renglón dos de la matriz anterior.

- Para hacer cero el -1 del renglón tres y columna dos, sumamos renglón uno y el tres de la matriz anterior.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el valor del renglón tres columna tres es dos, hay que hacerlo primero uno, para ello multiplicamos ese renglón por 1 ó 2.

Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Quedando así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- Como el valor del renglón tres de la columna tres es uno, se cumple con esa parte.

- El siguiente paso sería hacer cero el uno negativo del renglón uno y columna tres y el dos del renglón dos y columna tres de la matriz derecha anterior.

- Para hacer cero el -1, al renglón uno le restamos el renglón tres de la matriz anterior.

- Para hacer cero el dos, multiplicamos por -2 el tercer renglón de la matriz del lado derecho anterior y lo sumamos al primer renglón de la misma matriz.

- Todos los cálculos realizados anteriormente se aplican a la matriz del lado izquierdo anterior.

Dónde:

$$4\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.5 & .5 & .5\\ 1 & 0 & -1\\ .5 & -.5 & .5\end{bmatrix} \text{U}$$

Donde la matriz inversa es:

$$\begin{bmatrix}-1.5 & .5 & .5\\ 1 & 0 & -1\\ .5 & -.5 & .5\end{bmatrix}$$

Matriz Transpuesta

La matriz transpuesta está dada por una matriz en la cual se intercambian los renglones por columnas, dando como resultado la matriz transpuesta.

$$A=\begin{bmatrix}a11 & a12 & \dots & a1m\\ a21 & a22 & \dots & a2m\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ an1 & an2 & \dots & anm\end{bmatrix}$$

Su transpuesta es:

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \ldots & a1n \\ a21 & a22 & \ldots & a2n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ am1 & am2 & \ldots & amn \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Obtención de la matriz transpuesta de A.

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \ldots & a1m \\ a21 & a22 & \ldots & a2m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ an1 & an2 & \ldots & anm \end{bmatrix}$$

La transpuesta es:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

RESUMEN DE LA UNIDAD

En este tema se trataron los conceptos fundamentales y las operaciones mas importantes de aplicación directa, como son : suma de matrices, multiplicación escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices, producto cartesiano

GLOSARIO

FORMA ESCALONADA	Se dice que una matriz esta esta en forma escalonada reducida por filas si satisface las propiedades siguientes: la primer entrada es diferente de cero, Todas las filas cero, si las hay aparecen como al final. Para cada fila diferente de cero, el líder aparece a la derecha y debajo de cualquier 1 lider, en las filas que le preceden, si una columna tiene un líder las demás entradas de esa columna son cero.
IMATRIZ	Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mn entradas acomodadas en m filas y n columnas
SUBMATRIZ	Una matriz obtenida a partir de una matriz A eliminando filas y columnas

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

1.- Realice las operaciones indicadas, refiérase a las siguientes matrices:

A = $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ D = $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ E= $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

a) A+B

b) C+D

c) C+D+E

d) E^2

e) 5D

a) A+B=

b) C+D=

e)

ACTIVIDAD 2

2.- Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Sean las Matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Encuentra la solución correspondiente a las siguientes Operaciones entre Matrices, de acuerdo a lo que se pide:

1) Determina A + B.

- a. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$
- b. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
- c. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
- d. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
- e. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

2) Determina 3A – 4B.

a. $\begin{bmatrix} 13 & 3 & 18 \\ 4 & 16 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 13 & 3 & 18 \\ 6 & 16 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 13 & 3 & 18 \\ 6 & 16 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 13 & 3 & 18 \\ 6 & 15 & 2 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$

3) Determina AC

a. $\begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & 8 \\ 11 & -3 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & -8 \\ 11 & -3 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & -8 \\ -11 & -3 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

4) Obtén el 3AD.

a. $\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 8 \\ -9 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -9 \\ -9 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix}$

5) Determina BD

a. $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -1 \\ -9 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$

ACTIVIDAD 3

3.- Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas. Una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

Sean las Matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2- & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para cada uno de las siguientes Matrices Cuadradas determina su Inversa:

1) Determina A^{-1}.

a. $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 11 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 11 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

2) Determina B^{-1}.

a. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -10 & -7 & 6 \\ -8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -10 & -7 & 6 \\ -8 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

3) Determina C^{-1}.

a. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \\ -10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

4) Determina D^{-1}.

a. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

5) Determina E^{-1}.

a. $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/9 & -2/9 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/9 & -2/9 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -1/9 & -2/9 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ 1/9 & -2/9 \end{bmatrix}$

ACTIVIDAD 4

4.-Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas. Una vez que concluyas, obtendrás de manera automática tu calificación.

Sean las Matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2- & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Indica si las siguientes aseveraciones son verdaderas (V) o falsas (F).

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

a. Verdadero

b. Falso

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a. Verdadero

b. Falso

$$C^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

a. Verdadero

b. Falso

$$D^T = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

a. Verdadero

b. Falso

La Matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ es la Transpuesta de E.

a. Verdadero

b. Falso

ACTIVIDAD 5

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Sistemas de Ecuaciones Lineales Compatibles Indeterminados, por el Método de Gauss-Jordan.

1) $3x_1 + 3x_2 – x_3 + x_4 + 4x_5 = 4$

$x_1 + x_2 + x_3 – 2x_4 – x_5 = 1$

$-2x_1 – 2x_2 +3x_3 – 3x_4 – 5x_5 = -3$

Si $x_2 = a = 3$; $x_4 = b = 4$, $x_5 = c = -1$

a. $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 4, x_5 = -1$

b.

$x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 4, x_5 = -1$

c.

$x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = -4, x_5 = -1$

d.

$x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = -4, x_5 = -1$

e.

$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 4, x_5 = -1$

2) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1$

$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 1$

$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = -2$

Si $x_2 = a = 1$; $x_3 = b = (1/3)$

a.

$x_1 = 8, x_2 = 1, x_3 = (1/3), x_4 = -(1/9)$

b.

$x_1 = -8, x_2 = 1, x_3 = (1/3), x_4 = -(1/9)$

c.

$x_1 = 8, x_2 = 1, x_3 = (1/3), x_4 = (1/9)$

d.

$x_1 = -8, x_2 = -1, x_3 = (1/3), x_4 = -(1/9)$

e.

$x_1 = 8, x_2 = -1, x_3 = -(1/3), x_4 = -(1/9)$

3) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$

Si $x_2 = a = -2$

a. $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = -3$

b. $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 3$

c. $x_1 = -4, x_2 = -2, x_3 = -3$

d. $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 3$

e. $x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = 3$

4) $-2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -1$

$4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2$

Si $x_1 = a = (1/2)$

a. $x_1 = (1/2), x_2 = -1, x_3 = 0$

b. $x_1 = -(1/2), x_2 = 1, x_3 = 1$

c. $x_1 = (1/2), x_2 = (1/2), x_3 = 1$

d. $x_1 = -(1/2), x_2 = -1, x_3 = 0$

e. $x_1 = (1/2), x_2 = 1, x_3 = 0$

5) $2x - y - kz = 0$

$x - y - 2z = 1$

$-x + 2y - 0z = k$

CUESTIONARIO
DE REFORZAMIENTO

1. ¿Qué es una matriz?
2. ¿Qué se entiende por entrada de una matriz?
3. ¿Qué indican los números ***m*** y ***n***?
4. ¿Dónde se ubica la entrada ***a58***?
5. ¿Qué característica tiene una matriz cuadrada?
6. ¿Cuáles son los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada?
7. ¿Cómo se realiza la suma de matrices?
8. Escribe una matriz cero de *3X2*.
9. ¿Qué es un escalar?
10. Define el producto de un escalar por una matriz.
11. ¿Qué significa que la suma de matrices sea conmutativa?
12. Si ***A*** es una matriz ***rxt*** y ***B*** es una matriz ***txq***, entonces la matriz ***C*** que resulta del producto ***AB***, ¿qué dimensión tiene?
13. ¿Es la multiplicación de matrices conmutativa? ¿Por qué?
14. ¿Qué condiciones debe cumplir una matriz para ser llamada matriz identidad?
15. ¿Qué es una matriz transpuesta?

16. Da un ejemplo de una matriz transpuesta de 4x4.
17. ¿Cómo se lleva a cabo la multiplicación de dos matrices?
18. ¿Cuáles son las características que deben tener las matrices a multiplicar?
19. ¿Cuántos renglones y columnas tiene el resultado de multiplicar dos matrices
20. ¿Qué es la matriz inversa?
21. ¿A que es igual el producto de una matriz A por su inversa A^{-1}?

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 1

Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas.

Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre la solución correspondiente a los siguientes “Operaciones entre Matrices” de acuerdo a lo que se pide:

1.Determine A+ B:

- a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
- d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
- e) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Determine A+ (B+C):

- a) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$
- c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

3. Determine A+0:

❍ a) A^{-1}

❍ b) 0

❍ c) -A

❍ d) $-A^{-1}$

❍ e) A

Sean las “Matrices”:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Obtener el 4ª:

❍ a) $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$

5. Determinar (1/2) A + 3B:

❍ a) $\begin{bmatrix} (19/2) & 11 \\ -23 & -2 \end{bmatrix}$

❍ b) $\begin{bmatrix} (19/2) & 11 \\ 23 & -2 \end{bmatrix}$

❍ c) $\begin{bmatrix} (19/2) & -11 \\ -23 & -2 \end{bmatrix}$

❍ d) $\begin{bmatrix} (19/2) & -11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$

❍ e) $\begin{bmatrix} (19/2) & 11 \\ 23 & 2 \end{bmatrix}$

MESOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

TITULO:	"Algebra Lineal"
AUTOR:	Bernard Kolman David
EDITORIAL:	Pearson. Prentice Hall, Octava Edicion
No. DE PAGINAS:	648

TITULO:	"Algebra Lineal" Una introducción Moderna
AUTOR:	David Poole
EDITORIAL:	Thomson, Primera Edicion, 2004
No. DE PAGINAS:	763

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

TITULO:	"Algebra Lineal" y sus aplicaciones
AUTOR:	David C. Lay
EDITORIAL:	Pearson Tercera Edición, 2004
No. DE PAGINAS:	492

SITIOS DE INTERNET

http://www.promocion.org/que-es-y-como-funciona-google.htm

http:/www.google.com/technology/index.html

www.readwriteweb.es/tecnologias/como-**funciona-google**/

www.recursosmatematicos.com/descarga.htm

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

Aplicaciones del producto cartesiano

http://matematicas-de-la-simetria.blogspot.com/2007/11/el-producto-de-dos-grupos.html

UNIDAD 6

DETERMINANTES

OBJETIVO ESPECIFICO

El alumno conocerá las propiedades y aplicaciones de las determinantes

INTRODUCCIÓN

La idea del Determinante proviene de mucho tiempo más atrás que la del concepto de Matriz. El Determinante fue descubierto por Kramer durante sus trabajos orientados a la resolución de problemas que se formulaban a través de los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

La Teoría de los Determinantes fue expuesta por primera vez en el año de 1750, es decir cien años antes de Sylvester y Cayley empezaran a hablar de las Matrices.

Hoy en día, el concepto del Determinante tiende a ser referido como la consecuencia de la Teoría de Matrices y, por consecuencia, es considerado como el Proceso de Axiomatización de las Matrices.

En esta unidad veremos lo que se refiere a la definición del Determinante, así como las propiedades que lo caracterizan e identifican como tal; posteriormente, veremos cómo se define y aplica la Regla de Kramer, y finalmente, cómo se definen y obtienen los Eingevalores y los Eingevectores, a fin de poder vincularlos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática.

Hoy en día la tecnología avanza rápidamente, por este motivo se requieren modelos más complejos para la solución de problemas, utilizando las matemáticas y en particular los Determinantes.

LO QUE SÉ

Investiga el concepto, propiedades básicas y las reglas más importantes referentes a los Determinantes, así como algunas aplicaciones básicas.

TEMARIO DETALLADO

(8 HORAS)

6. Determinantes

6.1 Definiciones y propiedades

6.2 Regla de Kramer

6.3 Eigenvalores, eigenvectores

6.1 Definiciones y propiedades

Un determinante es un número que se asigna de cierto modo a una formación cuadrada de números. Esta idea fue considerada en 1683 por el matemático Japones Seki Takakasu y de manera independiente, en 1693 por el matemático Aleman Gottfried Leibniz, unos 160 años antes de que se desarrollara una teoría de matrices por separado.

En la actualidad se han definido dos métodos importantes para obtener el determinante de un arreglo de números o matriz.

a) Regla de Sarrus
b) Método de cofactores

a) Regla de Sarrus

Sea A una matriz cuadrada, la determinante de una matriz cuadrada es un valor constante que se calcula con todos los elementos de la matriz.

Determinante de una matriz de 2x2

Sea la matriz A = entonces el determinante de A es:

El calculo se realiza haciendo una multiplicación cruzada de los elementos “ a” y “d” menos los elementos “c” y “b”.

Ejemplo:

Determinante de una matriz de 3x3

Sea la matriz A = entonces el determinante de A es:

1.-Escribir las dos primeras columnas de la matriz a la derecha de la matriz A.

2.- Localizar los elementos de las tres diagonales primarias y las tres diagonales secundarias

3.- Multiplicar los elementos de la diagonal primaria(roja) y de cada diagonal secundaria (verde).

4.- El determinante resultante es igual a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos los productos de las tres diagonales secundarias ó restar la suma de los productos de las diagonales secundarias.

$$\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} \\ \;\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{matrix}\end{array}$$

Ejemplo:

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades de los determinantes nos auxilian en la manipulación de una matriz de números para encontrar el valor de su determinante, directamente o diagonal izando la matriz , este método es muy conveniente para determinantes muy grandes de mas de 5x5.

En todos los casos sea A una matriz cuadrada

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES
i) Si todos los elementos de un renglón o columna de la matriz A son ceros, entonces $\|A\|$ =0.
ii) Cuando dos renglones o columnas de la matriz a son idénticos, entonces $\|A\|$ =0.
iii) Cuando la matriz A es triangular superior o inferior entonces $\|A\|$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
iv) Si A es una matriz identidad, entonces su determinante es igual a uno.
v) Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos renglones o columnas, entonces: $\|A\| = -\|B\|$
vi) Si la matriz B se obtiene de la matriz A al multiplicar por un renglón o columna por un escalar "k" entonces: $\|B\| = k\|A\|$
vii) El determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de su determinante, o sea $\|AB\| = \|A\|\|B\|$.
viii) Si A es una matriz nxn, entonces det A^T = det A.
ix) $A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ Adj A
x) Si A es invertible entonces $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$

Ver la siguiente dirección electrónica
http://www.vadenumeros.es/segundo/propiedades-de-los-determinantes.htm

Ejemplo:

Matriz nula

El determinante de una matriz nula es cero. $\det(O) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Matriz unidad o identidad

El determinante de la matriz unidad es uno. $\det(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Matriz diagonal

El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$

Matriz triangular

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. $\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8$

Desarrollo de un determinante

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea o columna cualquiera por sus adjuntos respectivos. Simbólicamente, el determinante calculado por columnas:

$$det\,(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Y, si no lo queremos hacer por columnas, dicho determinante calculado por filas:

$$det\,(\,A\,)\;=\;a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+\ldots+a_{nj}\cdot A_{nj}$$

Ejemplo: Obtén el determinante de A

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

Utilizando el renglón 1

Se recomienda que hagas el cálculo con el método de Sarrus para comprobar el resultado.

MATRIZ ADJUNTA

La matriz adjunta obtenida por determinantes se aplica para obtener la matriz inversa de una matriz A.

Los menores complementarios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

son

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3 \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -6 \qquad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12 \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 \qquad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Matriz adjunta

Para una matriz cuadrada de orden $n,\ A = (a_{ij}),$ se llama ***adjunto*** del elemento $a_{ij},$ y lo representamos por $A_{ij},$ al producto $(-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$, es decir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de los elementos de una matriz cuadrada A se llama ***matriz adjunta*** de A y se denota por $Adj\,(A)$

Ejemplo

Los adjuntos de la matriz A del ejemplo anterior son:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -3 & A_{12} = 6 & A_{13} = -3 \\ A_{21} = 6 & A_{22} = -12 & A_{23} = 6 \\ A_{31} = -3 & A_{32} = 6 & A_{33} = -3 \end{array}$$

La matriz adjunta de A es

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

6.2 Regla de Kramer

La Regla de Kramer es un proceso que nos permite calcular la solución de un sistema con *n* ecuaciones y *n* incógnitas. AX=B

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & ann \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \\ b4 \end{bmatrix}$$

La Regla de Kramer consiste en encontrar las soluciones para cada una de las variables:

- **Las Determinantes se calculan con la regla de Sarrus, vista en el punto 5,1**

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Primero calculamos la Determinante del sistema.

Regla de Cramer

La regla de Cramer da una solución para sistemas compatibles determinados en términos de determinantes y adjuntos dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(\mathbf{A})}$$

Donde A_j es la matriz resultante de remplazar la j-ésima columna de A por el vector columna **b**. Para un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Nota: Cuando en la determinante original det(A) el resultado es 0, el sistema indica múltiples o sin coincidencia.

- Las Determinantes se calculan con la regla de Sarrus, vista en el punto 5,1

Ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones por Cramer

Veremos a continuación algunos ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones aplicando la regla de Cramer. Comenzaremos con los de 2 incógnitas para pasar enseguida a los de 3 incógnitas.

Sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

En el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas que vamos a resolver, procedemos primero a marcar en rojo la columna de los términos independientes para no perderla de vista en ningún momento:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Obviamente la matriz de coeficientes es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos x e y usando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 6 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1$$

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ x-y+2z=10 \\ 3x+y-z=25 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Y usando la Regla de Cramer obtenemos los valores de las incógnitas:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 2 \\ 25 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=8 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=4 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & 10 \\ 3 & 1 & 25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=3$$

6.3 Eigenvalores, eigenvectores

Eingevalores

Los eingevalores son valores que se restan a la diagonal de una matriz para que su valor sea igual a cero.

Si tenemos una matriz A:

$$A=\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & ann \end{bmatrix}$$

Entonces, su determinante será:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & ann \end{vmatrix}$$

Para obtener los eingevalores k1, k2,…., kn hacemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} a11-k1 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22-k2 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & a2n & \dots & ann-kn \end{vmatrix}=0$$

Donde k1, k2,….., kn son los eingevalores.

Ejemplo:

Calcular los eingevalores de la siguiente matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} = 0$$

Y la determinante nos da

=(1-k)(2-k)-1=0

=1-2k+k2-1=-2k+k2=k(k-2)=0

De aquí obtenemos dos eingevalores: cero y dos

Eingevectores

Un eingevector es un vector asociado a una matriz, el cual se obtiene con la ayuda de los eingevalores. Es decir que para su cálculo, primero hay que considerar los eingevalores de la matriz.

Para la obtención de los eingevectores se tienen que encontrar los valores para el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} a1 & a2 & \dots & an \end{bmatrix}$$

De tal manera que se dé la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} a11-k & a12 & \ldots & a1n \\ a21 & a22-k & \ldots & a2n \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots \\ an1 & an2 & \ldots & ann-k \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \end{bmatrix}$$

Donde a1, a2… an son valores constantes cualesquiera.

Ejemplo:

Calcular los eingevectores de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primero obtenemos los eingevalores

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} = 0$$

Y la determinante nos da.

=(1-k)(2-k)-1=0

=1-2k+k2-1=-2k+k2=k(k-2)=0

De aquí obtenemos dos eingevalores: cero y dos.

Para obtener los eingevectores.

$$\begin{bmatrix} 1-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}$$

Tenemos que para k=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 + a2 \\ a1 + 2a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}$$

Esto implica que a1+a2=a1 implica que a2=a1-a1=0, o sea, a2=0

- Sustituyendo en a1+2 a2=a2 nos da que a1+2(0)=0 y, por lo tanto, a1=0
- Y tenemos un vector (0,0) o solución trivial.

Tenemos que para k=2

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a1 + a2 \\ a1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a1 \\ a2 \end{bmatrix}$$

- Esto implica que -a1+a2=a1, implica que a2=a1+a1=2 a1 o sea a2= 2 a1
- Sustituyendo en a1=a2
- Para que ambas se cumplan a2= 2 a1 y a1=a2 la solución debe ser la trivial
- Por lo tanto, la única solución que tiene es la trivial: el eigenvector (0,0).

RESUMEN DE LA UNIDAD

De acuerdo a la pregunta que se te formuló al principio de ésta unidad; se presupone que tu respuesta con respecto a que sabes de los “Determinantes”; seguramente habrás contestado que si has tenido contacto con ellos; específicamente con los de segundo y tercer orden.

La idea del “Determinante” proviene de mucho tiempo más atrás que la del concepto de “Matriz”. El “Determinante” fue descubierto por Cramer durante sus trabajos orientados a la resolución de problemas que se formulaban a través de los “Sistemas de Ecuaciones Lineales”.

La “Teoría de los Determinantes” fue expuesta por primera vez en el año de 1750; es decir cien años antes de que Sylvester y Cayley empezaran a hablar de las “Matrices”.

Hoy en día en concepto del “Determinante” tiende a ser referido como la consecuencia de la “Teoría de Matrices” y por consecuencia es considerado como el “Proceso de Axiomatización de las “Matrices”.

En esta unidad vimos lo que se refiere a la definición del “Determinante”; así como sus propiedades que lo caracterizan e identifican como tal; también abordamos cómo se define y aplica la “Regla de Kramer” y finalmente como se definen y obtienen los “Eingevalores y los Eingevectores” a fin de poder vincularlos en el campo profesional de la “Licenciatura en Informática”.

GLOSARIO DE LA UNIDAD

DETERMINANTE	Es una matriz A de nxn , el determinante de A denotado mediante de (A) es un escalar que se calcula como la suma de todos los posibles productos de n entradas de A. cada uno con un signo apropiado , con exactamente una entrada de cada fila y exactamente una entrada de cada columna.
IMATRIZ	Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mn entradas acomodadas en m filas y n columnas
SUBMATRIZ	Una matriz obtenida a partir de una matriz A eliminado filas y columnas

ACTIVIDADES
DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Determina A por la Regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 14 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 12 \\ -21 & 9 & -6 \end{vmatrix}$$

- a. 5
- b. 3
- c. 0
- d. -3
- e. 4

A) Determina │A│ si…

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

- a. -1
- b. 3

c. 2

d. -3

e. -5

B) Por la Regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

a. 5

b. 3

c. 8

d. 9

e. 11

ACTIVIDAD 2

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Determinantes por la Regla de Sarrus.

1) Sea A:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$$

a. 6a + 2b

b. 5a – 2b

c. 2a + 2b

d. 6a – 2b

e. 6a – 3b

2) Sea B:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a \\ 2a & 6 \end{vmatrix}$$

a. -4a2

b. 3a2

c. 5a2

d. -3a2

e. 4a2

3) Sea C: $\begin{vmatrix} a^2 & a^2 \\ 2a & 6 \end{vmatrix}$

a. 6a3 – 2a2

b. 6a2 + 2a3

c. 6a2 - 2a3

d. 6a3 + 2a2

e. -6a3 – 2a2

ACTIVIDAD 3

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Sistemas de Ecuaciones Lineales Compatibles Determinados, aplicando la Regla de Kramer

1) 2x+y-3z =12

5x-4y+7z=27

10x+3y–z =40

a. x = 4.5, y = 1, z = 1

b. x = 4.5, y = 0, z= -2

c. x= 5, y = -4, z = -2

d. x = 0, y = 4.5, z = 3

e. x = 5, y = 4, z = 2

2) $x + y + z = 4$

$2x - 3y + 5z = -5$

$3x + 4y + 7z = 10$

- a. $x = 4$, $y = 1$, $z = 1$
- b. $x = 4$, $y = 0$, $z = -1$
- c. $x= 3$, $y = 4$, $z = 0$
- d. $x = 0$, $y = 4$, $z = -1$
- e. $x = 3$, $y = 2$, $z = -1$

3) $x + 4y - z = 6$

$2x + 5y - 7z = -9$

$3x – 2y + z = 2$

- a. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$
- b. $x = 4$, $y = 0$, $z= 3$
- c. $x= 0$, $y = 4$, $z = 1$
- d. $x = 0$, $y = 3$, $z = 2$
- e. $x = 5$, $y = 4$, $z= 3$

- d. $x = 0$, $y = 4$, $z = 1$
- e. $x = 5$, $y = 4$, $z = 4$

ACTIVIDAD 4

Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Encuentra la solución correspondiente a los siguientes Determinantes por el Método de cálculo que se te pide:

1) **Por la Cofactores**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

- a. -4
- b. 3
- c. 5
- d. -3
- e. -5

2) **Por Cofactores o Condensación.**

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

- a. 345
- b. 356
- c. 348
- d. 338
- e. 354

3) Por Cofactores.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

- a. 29
- b. 27
- c. 25
- d. 28
- e. 30

CUESTIONARIO
DE REFORZAMIENTO

1. ¿Qué significado tiene la palabra ‘determinante?

2. ¿Cuáles son las propiedades de una determinante?

3. Desarrolla un ejemplo de una determinante igual a cero.

4. Desarrolla un ejemplo de una determinante mayor a cero.

5. Desarrolla un ejemplo de una determinante menor a cero.

6. Explica cómo se lleva el cálculo de una determinante por el método de Sarrus.

7. Da un ejemplo de una eingevalor a partir de una matriz de 2x2.

8. Da un ejemplo de una eingevalor a partir de una matriz de 3x3.

9. Da un ejemplo de una eingevector a partir de una matriz de 2x2.

10. Da un ejemplo de una eingevector a partir de una matriz de 3x3.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 1

Elige la respuesta correcta para las siguientes preguntas.

Encuentre la solución correspondiente a los siguientes "Determinantes" de la "Matriz A".

Sea A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) -2
- b) 3
- c) -3
- d) 4
- e) 3

1. Sea B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- ❍ a) -4
- ❍ b) -3
- ❍ c) -2
- ❍ d) 1
- ❍ e) 3

2. Dada la “Matriz A”; cuyo “determinante” es igual a 12, entonces el valor de k es:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{vmatrix}$$

- ❍ a) -12
- ❍ b) 13
- ❍ c) 12
- ❍ d) 11
- ❍ e) -10

3. El “Determinante” de D es:

$$\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

- ❍ a) -11
- ❍ b) -10
- ❍ c) -12
- ❍ d) -9
- ❍ e) -13

4. El “Determinante” de E es:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

- a) -5
- b) 6
- c) -7
- d) 4
- e) -4

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 2

Relaciona las columnas anotando en el paréntesis la letra que corresponda correctamente.

1. Método que se aplica solamente a “Determinantes” de Segundo y Tercer Orden.	( )	**a) Eingevalores**
		b) Segundo Orden
2. El factor que multiplica al elemento en el desarrollo del “Determinante” por el “Método de Cofactores” se denomina:	( )	**c) Tercer Orden**
		d) Permutaciones
		e) Sarrus
		f) Eingevectores
3. Para calcular el valor de un “Determinante” empleando el método de Sarrus cuando se efectúa el producto de los elementos de la diagonal principal y a este se resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria, entonces se dice que el “Determinante” es de:	( )	**g) Cofactor**
		h) Kramer
4. El método que en los “Determinantes” se utiliza para resolver los “Sistemas de Ecuaciones Lineales” se llama:	( )	
5. Son valores que se restan a la diagonal de una matriz, para que su valor sea igual a cero.	( )	
6. Para calcular el valor de un “Determinante empleando el método de Sarrus en donde se efectúa el producto de los elementos de la diagonal principal y de las dos diagonales paralelas a ella; a la suma de dichos productos se restan los productos de los elementos de la diagonal secundaria y de las dos paralelas a ella, entonces se dice que el “Determinante” es de:	( )	
7. Los diferentes arreglos que se pueden hacer de un conjunto finito de elementos se llaman:	( )	
8. Son vectores asociados a matrices los cuales se obtienen con la ayuda de los “Eigenvalores”.	( )	

MESOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

TITULO:	"Algebra Lineal"
AUTOR:	Bernard Kolman David
EDITORIAL:	Pearson. Prentice Hall, Octava Edicion
No. DE PAGINAS:	648

TITULO:	"Algebra Lineal" Una introducción Moderna
AUTOR:	David Poole
EDITORIAL:	Thomson, Primera Edicion, 2004
No. DE PAGINAS:	763

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

TITULO:	"Algebra Lineal" y sus aplicaciones
AUTOR:	David C. Lay
EDITORIAL:	Pearson Tercera Edición, 2004
No. DE PAGINAS:	492

SITIOS DE INTERÉS

www.recursosmatematicos.com/descarga.htm

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

http://www.vadenumeros.es/segundo/propiedades-de-los-determinantes.htm

UNIDAD 7

PRÁCTICAS EN LABORATORIO

OBJETIVO ESPECIFICO

El alumno resolverá problemas de algebra lineal utilizando software

INTRODUCCIÓN

En el desarrollo de este tema se muestran todos los conocimientos adquiridos durante el semestre y algunos otros de otras materias que, en su conjunto, hacen que seas capaz de resolver problemas, combinándolos con el uso de la computadora.

De acuerdo a la pregunta que se te formuló al principio de ésta unidad; se presupone que tu respuesta con respecto a que sabes de software; seguramente habrás contestado que si has tenido contacto con ellos; específicamente con el Excel.

La idea del Software Para La Resolución De Problemas Matemáticos Diversos proviene del Siglo XX en donde el hombre se preocupó por entender y comprender el desarrollo tecnológico con que este iba evolucionando de una forma acelerada hasta nuestros días.

La Resolución de Problemas Matemáticos Por Medio Del Uso De Software se ha hecho más presente hoy en día (2009) ante el constante cambio que el hombre ha tenido en su relación con el medio en el cual se desenvuelve dentro de este Planeta llamado Tierra en donde su desarrollo comprende muchas áreas que el mismo ha descrito y definido con el fin de tener un mejor bienestar y seguir sobreviviendo.

En esta unidad veremos lo que se refiere a las Aplicaciones a través de software (Excel) de los diversos Temas vistos a los largo de las Unidades anteriores; a fin de poder dar solución de una manera más rápida a todo tipo de Problemas Diversos en el campo profesional de la Licenciatura en Informática y su relación con las áreas Contables-Administrativas.

LO QUE SÉ

Dentro de tu formación académica en el área de la Informática ¿te enseñaron el manejo, aplicación y programación de distintos tipos de Software enfocados a las áreas económico administrativas?

TEMARIO DETALLADO
(12 HORAS)

7.1 Caso práctico Sistema de Ecuaciones Lineales

7.1. Caso Práctico: Sistema de Ecuaciones Lineales

Supóngase que el importe de una compra de cuatro refrescos chicos y cinco refrescos grandes es por $94.00, si se realiza una nueva compra por dos refrescos chicos y uno refresco grande y el importe de esta compre es por $26.00. ¿Cuál es el precio del refresco chico y grande?

Para solucionar este ejercicio utilizaremos la hoja Excel

Paso 1

Escribamos en un renglón y celdas diferentes los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de esa compra.

	A	B	C	D	E
1					
2		4	5	94	
3					

Paso 2

En un segundo renglón los valores de la segunda compra de la misma manera que el primer renglón, es decir los valores del número de refrescos chicos en una celda y los grandes en la siguiente y después el valor del importe de la segunda compra.

	A	B	C	D	E
3					
4		2	1	26	
5					

Paso 3

Transformamos el primer renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la segunda compra.

	A	B	C
5			
6			
7		=B4*B2	
8			

	A	B	C	D
5				
6			=B4*C2	
7				

	A	B	C	D	E
5					
6				=B4*D2	
7					

Resultando:

	A	B	C	D	E
5					
6		8	10	188	
7					

Paso 4

Transformamos el segundo renglón multiplicándolo por el número de refrescos chicos adquiridos en la primera compra.

	A	B	C
7			
8		=B2*B4	
9			

	A	B	C	D
7				
8			=B2*C4	
9				

	A	B	C	D	E
7					
8				=B2*D4	
9					

Resultando

	A	B	C	D	E
7					
8		8	4	104	
9					

Paso 5

De los dos renglones resultantes de los pasos 3 y 4, al renglón obtenido en el paso 3 se le resta el renglón obtenido en el paso 4. Aquí da como resultado en la celda correspondiente a los refrescos chicos el valor de cero y en las otras celdas no necesariamente un valor igual a cero.

	A	B	C
9			
10		=B6-B8	
11			

	A	B	C	D
9				
10			=C6-C8	
11				

	A	B	C	D	E
9					
10				=D6-D8	
11					

Resultando:

	A	B	C	D	E
9					
10		-	6	84	
11					

Paso 6

Del resultado obtenido en la diferencia del importe de las compras (obtenido en el paso 5), este se divide entre valor obtenido correspondiente a los refrescos grandes, este cociente representa el precio del refresco grande.

	A	B	C
11			
12		=D10/C10	
13			

Resultando:

	A	B	C
11			
12		14	
13			

Paso 7

Para obtener el precio del refresco chico se multiplicara la celda que contiene el precio del refresco grande (celda paso 6) por el numero de refrescos comprados en la primera compra (celda del paso 1), el producto anterior se le resta al importe de la primera compra (celda paso 1) y la resultante de esta diferencia se divide entre el numero de refrescos chicos comprados en la primera compre (celda paso 1).

	A	B	C
13			
14		=B12*C2	
15			

Resultando:

	A	B	C
13			
14		70	
15			

A la compra total se le resta el valor anterior

	A	B	C
15			
16		=D2-B14	
17			

Lo dividimos entre el número de refrescos chicos comprados la primera vez

Resultando:

	A	B	C
17			
18		6	
19			

Finalmente los valores obtenidos en los pasos seis y siete son el resultado buscado en el ejemplo mostrado

ACTIVIDADES
DE APRENDIZAJE

ACTIVIDAD 1

1.- Elige la respuesta correcta a las siguientes preguntas.

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1) Un inversor obtuvo el primer año de su negocio una utilidad igual a la mitad de su capital invertido en dicho negocio y tuvo egresos por $ 6,000.00 por gastos diversos. Durante el segundo año obtuvo una utilidad igual a la mitad de lo que tenía, así como tuvo gastos por $ 6,000.00. Posteriormente en el transcurso del tercer año tuvo una utilidad igual a la mitad de lo que tenía, así como gastos por $ 6,000.00. Si el monto que tiene hasta ese momento es de $ 32, 250.00. ¿Cuál fue la Inversión Inicial con la que empezó el negocio?

a. $ 15,500.00.
b. $ 22,500.00.
c. $ 18,000.00.
d. $ 19,000.00.
e. $ 16,000.00.

2) Un comerciante empleo una Inversión Inicial de $ 1,910.00; para comprar su mercancía consistente en la adquisición de 50 trajes con costos unitarios de $ 40.00 y $ 35.00 cada uno. Determine la cantidad de trajes que adquirió con respecto a cada uno de los costos unitarios.

a. Trajes de $ 40.00 = 32; Trajes de $ 35.00 = 18.
b. Trajes de $ 40.00 = 31; Trajes de $ 35.00 = 19.
c. Trajes de $ 40.00 = 33; Trajes de $ 35.00 = 17.
d. Trajes de $ 40.00 = 34; Trajes de $ 35.00 = 16.
e. Trajes de $ 40.00 = 30; Trajes de $ 35.00 = 20.

3) Un padre de familia le compra tres juguetes a su hijo consistente en un Potro, un Coche y un Perro. El Perro le costó $ 20.00; mientras que el Caballo y el Perro le costaron el triple que el Coche; el Perro y el Coche costaron (3/5) partes de lo que costó el Caballo. Determine el costo del Caballo y el Coche.

a. Caballo = $ 120.00; Coche = $ 50.00.
b. Caballo = $ 90.00; Coche = $ 55.00.
c. Caballo = $ 105.00; Coche = $ 60.00.
d. Caballo = $ 100.00; Coche = $ 40.00.
e. Caballo = $ 95.00; Coche = $ 45.00

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN 1

Elige la opción que conteste correctamente cada pregunta.

Utilizando como herramienta de trabajo al Excel, resuelve los siguientes casos prácticos que a continuación se te exponen y elige la respuesta correcta:

1.- Una persona después de haber gastado la mitad de lo que tenía y posteriormente prestar la mitad de lo que le quedó; le sobraron $ 21.00. Determine la cantidad que originalmente tenía.

- a) $ 85.50
- b) $ 82.50
- c) $ 88.00
- d) $ 89.00
- e) $84.00

2.- Un comerciante adquiere su mercancía consistente en la adquisición de trajes y sombreros. Para esto cuenta con una inversión de $ 4,180.00 para 5 trajes y 3 sombreros; además cuenta con una inversión de $ 6,940.00; para 8 trajes y 9 sombreros. Determine el precio al que adquirió cada traje y cada sombrero:

- a) Sombrero = $ 810.00; Traje = $ 65.00
- b) Sombrero = $ 820.00; Traje = $ 70.00
- c) Sombrero = $ 790.00; Traje = $ 80.00
- d) Sombrero = $ 800.00; Traje = $ 60.00
- e) Sombrero = $ 785.00; Traje = $ 75.00

3.- Se tienen entre tres personas $ 140.00. Además la tercera persona tiene la mitad de lo que tiene la primera; mientras que la primera tiene $ 10.00 más que la segunda. Determina la cantidad de dinero que tienen cada persona:

- a) 1$^{er.}$ persona = $ 60.00; 2$^{do.}$ persona = $ 50.00; 3$^{er.}$ persona = $ 30.00
- b) 1$^{er.}$ persona = $ 65.00; 2$^{do.}$ persona = $ 55.00; 3$^{er.}$ persona = $ 35.00
- c) 1$^{er.}$ persona = $ 70.00; 2$^{do.}$ persona = $ 60.00; 3$^{er.}$ persona = $ 40.00
- d) 1$^{er.}$ persona = $ 50.00; 2$^{do.}$ persona = $ 40.00; 3$^{er.}$ persona = $ 25.00
- e) 1$^{er.}$ persona = $ 75.00; 2$^{do.}$ persona = $ 50.00; 3$^{er.}$ persona = $ 35.00

GLOSARIO DE LA UNIDAD

DETERMINANTE	Es una matriz A de nxn , el determinante de A denotado mediante det (A) es un escalar que se calcula como la suma de todos los posibles productos de n entradas de A. cada uno con un signo apropiado , con exactamente una entrada de cada fila y exactamente una entrada de cada columna.
IMATRIZ	Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mn entradas acomodadas en m filas y n columnas
SUBMATRIZ	Una matriz obtenida a partir de una matriz A eliminando filas y columnas

MESOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

TITULO:	"Algebra Lineal"
AUTOR:	Bernard Kolman David
EDITORIAL:	Pearson. Prentice Hall, Octava Edicion
No. DE PAGINAS:	648

TITULO:	"Algebra Lineal" Una introducción Moderna
AUTOR:	David Poole
EDITORIAL:	Thomson, Primera Edicion, 2004
No. DE PAGINAS:	763

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

TITULO:	“Algebra Lineal” y sus aplicaciones
AUTOR:	David C. Lay
EDITORIAL:	Pearson Tercera Edición, 2004
No. DE PAGINAS:	492

SITIOS DE INTERÉS

http://www.frro.utn.edu.ar/repositorio/catedras/electrica/2_anio/fundamentos_informatica/apuntes/matlab/practica_matlab_&_simulink.pdf

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

www.frro.utn.edu.ar/.../matlab/practica_matlab_&_simulink.pdf -